M 2522

Biblioteca „ASTRA" SIBIU

GAZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

ANUL XXVIII.

NUMĂRUL 4. — DECEMVRIE 1922

BIBLIOTECA CENTRALĂ „ASOCIAȚIUNII" SIBIU

SUMARUL

1. Munca Matematică . . . . . *I. Ionescu*
2. Comparațiune între suma divizorilor unui număr și suma numerelor prime lui și inferioare dânsului . . . . . *Lt. I. Linteș*
3. Note Matematice: 16—23.
4. Chestiuni de examen.
5. Bibliografie.
6. Cereri: 95—96.
7. Probleme rezolvate: 1895, 2410, 2449, 2942, 2943, 2949, 2962, 2973.
8. Exerciții: 16—22.
9. Probleme propuse: 3001 — 3010.

ABONAMENTUL 50 LEI PE AN.

BUCUREȘTI
IMPRIMERIA FABRICILOR DE CHIBRITURI ȘI TIMBRE - FILARET
1922

74300

SPRE ŞTIINŢA

Gazeta Matematică se publică de către **Societatea „Gazeta Matematică“** având sediul în Bucureşti, compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie de 3 membri, care pentru anul XXVIII se compune din D-nii **N. I. Georgescu,** Inginer-Şef, **Tr. Lalescu,** Doctor în Matematici, Profesor Universitar şi **I. D. Teodor,** Cassier, Inginer Inspector General, Profesor la Şcoala Politechnică, Directorul General al Regiei Monopolurilor Statului.

Manuscrisele destinate „Gazetei Matematice“ se vor trimite D-lui GEORGE BORNEANU, Inginer, sub-directorul Fabricilor de chibrituri şi timbre, Bucureşti.

Se pot trimite şi pe acelaş nume în Str. Sf. Constantin 31, Bucureşti.

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse şi exerciţiile se vor redijà în conformitate cu instrucţiunile se se pot procurà dela D-l Cassier *I. D. Teodor,* în schimbul sumei de 1 (un) leu ce se poate trimite prin poştă.

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evità confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie.

In vederea sporirii taxelor poştale, corespondenţii pot trimete de aci înainte manuscrisele scrise pe ambele pagini ale unei foi, fără a lăsà spaţii albe pe margini sau dedesubt, tăind foile în consecinţă.

Nu se admite însă a se tratà pe aceeaşi foaie mai multe chestiuni sau probleme.

Articolele, notele, problemele propuse, exerciţiile, recreaţiile ce se trimit pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICĂ“, trebue să fie originale, iar nu luate din cărţi sau reviste speciale de matematici.

Probleme nerezolvate: 171, 485, 581, 691, 886, 87, 914, 44, 1000, 08, 40, 56, 58, 83, 92, 146, 62, 78, 80, 214, 36, 70, 71, 87, 97, 99, 355, 64, 67, 77, 79, 84, 86, 98, 99, 412, 50, 82, 90, 553, 84, 87, 626, 37, 50, 76, 79, 80, 711, 29, 33, 35, 53, 64, 90, 835, 76, 82, 84, 905, 06, 14, 29, 44, 45, 49, 59, 73, 79, 87, 2003, 04, 16, 17, 32, 70, 74, 94, 111, 12, 26, 56, 70, 216, 300, 47, 53, 91, 92, 95, 408, 14, 20, 22, 28, 29, 30, 31, 34, 39, 40, 43, 44, 48, 53, 56, 58, 59, 60, 61, 62, 66, 69, 71, 73, 77, 79, 81, 84, 87, 91, 92, 97, 500, 01, 02, 03, 10, 11, 12, 24, 29, 32, 37, 38, 39, 43, 44, 45, 46, 53, 55, 56, 60, 66, 69, 71, 75, 77, 78, 80, 81, 82, 87, 91, 93, 96, 97, 98, 99, 602, 03, 07, 08, 10, 13, 23, 35, 38, 39, 41, 43, 44, 45, 47, 50, 55, 56, 58, 60, 65, 69, 71, 75, 84, 86, 92, 93, 94, 95, 96, 705, 09, 12, 13, 17, 26, 27, 28, 34, 35, 38, 43, 45, 47, 52, 58, 59, 60, 64 69, 78, 80, 81, 89, 96, 809, 14, 16, 21, 27, 29, 41, 51, 52, 53, 57, 60, 65, 74, 86, 88, 89, 98, 902, 09, 12, 15, 16, 20, 26, 29, 30, 32, 36, 37, 44, 45, 50, 53, 55, 56, 59, 60, 61, 69, 70, 83, 89, 91, 92, 95, 98, 99, 3000.

La redacţia revistei **„Gazeta Matematică“** *se primesc abonamente pentru* **„Revista de matematicas y fisicas elementales“** *din Buenos-Aires. Costul unui abonament anual este de 40 lei.*

MUNCA MATEMATICĂ.

(URMARE ŞI SFÂRŞIT).

In numărul trecut, am spus că voiu rezumà aci partea privitoare la munca matematică din *Enquête sur la méthode de travail des mathématiciens*, publicat în *L'enseignement mathématique* 1905 şi 1906.

Chestiunea, care se apropie mai mult de studiul nostru, poartă No. 21 *a* şi erà formulată astfel:

„In rezumat, ce sfaturi ai da unui tânăr, care face studii matematice".

Din răspunsurile primite, rees următoarele:

1. Studiile matematice trebuesc să se facă cu profesori buni, cari să le priceapă bine şi cari să fie dovotaţi ştiinţei. Elevii şi studenţii, cari vor să facă matematicele, să urmeze cursurile la liceele şi facultăţile de ştiinţe, unde se găsesc asemenea profesori, să lucreze sub direcţiunea lor şi să le caute prietenia.

2. Pentru învăţătură şi pentru citire în orele libere, să se întrebuinţeze numai cărţi bune de matematice, lucrări şi reviste alese, operele originale ale marilor matematiciani ca: EULER, LAGRANGE, GAUSS, CAUCHY, JACOBI, etc. Din biblioteci, se vor alege, cărţile şi din reviste articolele, care interesează pe tinerii cari voesc să studieze matematicile; chestiunile care nu produc plăcere la citire, pot fi lăsate pentru mai târziu.

3. Cursurile trebuesc urmate şi aplicaţiunile lor făcute cu toată regularitatea şi cu toată atenţiunea, iar nu „astăzi da şi mâine ba", sau după notiţe, ori rezumate. Să nu se treacă la chestiuni noi, până ce nu s'au priceput bine cele vechi. Să se ia note în clasă şi în aceiaşi zi, acasă, se se redijeze lecţiunea urmată, completând-o chiar cu ceeace se citeşte prin cărţi, referitor la aceleaşi chestiuni.

4. Studiul trebue să fie continuu şi ordonat; citire puţină, dar cu atenţiune încordată şi cu gândire multă. Nu se va da nimic la publicare, până ce nu a fost bine studiat, bine judecat, bine redactat.

5. Cei cari vor să facă matematici, nu trebuesc să se descurajeze nici o dată. Voinţa, iniţiativa, perseverenţa, răbdarea sunt elemente care garantează succesul în matematici. O chestiune rebelă, care nu s'a putut rezolvà la prima, la a doua încercare, se va reluà mai târziu, pe căi analoage, sau pe căi diferite.

74300

6. Tinerii nu trebuesc să se specializeze dela început, ocupându-se numai de una din ramurile matematicilor ca: aritmetică, geometrie, algebră, mecanică, etc., căci acestea se ajută unele pe altele, pentru a susține edificiul măreț al matematicilor moderne. La fiecare din ele, se va da atențiune și părților practice: calcule numerice, construcțiuni grafice, operațiuni financiare, mecanisme, mașini, etc., căci acestea ușurează cercetările matematice și le consolidează cunoștința lor. Studiile colaterale matematicilor, ca fizica, astronomia, etc., nu trebuesc neglijate, căci în ele se găsesc aplicațiuni interesante ale matematicilor și procură probleme frumoase și interesante de studiat.

7. Cei cari nu simt nici o atențiune pentru matematică, să nu se ocupe de dânsa; de asemenea nici cei cari doresc să facă averi mari, pentru a se bucură de fericirile lumei materialiste actuale, căci la acestea nu pot ajunge prin matematici, ci prin legi și procedee contrare ei. Matematica va spune, de exemplu, că $2+2=4$, pe când averile mari se realizează scriind $2+2=5$, când e de luat și $2+2=3$, când este de dat!

Chestiunile 22 și 23 se referă la regule particulare de higienă, regim, ore de masă, repaos, somn. Cele mai multe răspunsuri conchid la *„viață regulată“*, sau la *„regimul oricărui intelectual“*. Unii matematiciani au răspuns chiar că *„nu s'au gândit nici o dată la asemenea chestiuni“*. Mai toți recomandă repaos după masă și întreruperea lucrului, când se simte oboseală intelectuală. Nu trebuesc sacrificate masa și somnul pentru dorința de a studià, de a rezolvà, sau de a terminà mai repede o chestiune. Pentru somn, nu se pot da regule precise; unii matematiciani dorm 10 ore pe zi, altora le ajung 6 ore. Unul din ei cere: *lumină, soare, aer, apă*“.

Chestiunea 24 se referă la alternarea lucrurilor matematice cu alte lucruri intelectuale sau fizice. Din răspunsurile primite, reese că *„pentru genii nu există regule“*; că e de dorit să se alterneze munca intelectuală cu muncă fizică, studiile teoretice cu studii experimentale. După trei ore cel mult de muncă matematică, să se facă un repaos, precum și ori decâte ori se simte oboseală sau nu se poate înaintà în studiul unei chestiuni. Odihna se poate lăsà pe a doua zi, numai când cinevà a intrat pe calea cea bună și când, cu oarecare efort, s'ar puteà ajunge la un oarecare rezultat într'o zi. Plăcerea pe care o produce rezolvarea chestiunilor în asemenea

cazuri, este atât de mare, încât unii au răspuns că: *„li se pare că matematicile nu obosesc nici o dată“*.

Chestiunea 25 *a* se referă la continuitatea lucrului matematic. Nu se poate scoate nici o concluzie precisă din răspunsurile date. Unii preferă să lucreze săptămâni şi luni întregi, pentru a rezolvà o chestiune, altora munca regulată le este imposibilă, altul a răspuns că pentru dânsul: *„facultatea de a lucrà variază după o lege necunoscută“*. Alţii *„cercetează intermitent“*, dar redijează cu *„asiduitate continuă“*. Totul depinde de timp, de ocupaţiuni, de temperament. Chestiunea 25 *b* se referă la momentele de antrenare, depresiune, incapacitate de a lucrà, iar 25 *c* la fazele de activitate şi de inerţie în munca matematică şi dacă aceste faze sunt sau nu periodice. Din răspunsurile primite, nu reese nimic precis; după unii, o activitate mare de 15 zile cere un timp de repaos variabil. Cei mai mulţi nu s'au preocupat de aceste chestiuni. Chestiunea 25 *d* se referă la influenţa circumstanţelor locale, fizice, meteorologice, etc., asupra muncei matematice. Frigul mare şi căldurile excesive nu sunt favorabile; unuia îi place să lucreze mai mult iarna, dar să aibă cald în casă! Pe unii vremea frumoasă îi scoate la plimbare şi nu mai lucrează cu aceeaşi intensitate. Timpul noros, ploios, pare defavorabil muncei matematice. O lumină bună, în special lumina soarelui, pare din contră foarte favorabilă.

Chestiunea 26 se referă la exerciţiile fizice. Numai un scoţian şi un olandez au răspuns că nu au nevoe de nici un exerciţiu. Cei mai mulţi preferă plimbarea pe jos sau cu bicicleta, mai puţin fac înot sau călărit; alţii fac gimnastică, scrimă; unii se ocupă cu grădinăritul, alţii taie lemne, etc. Din acest punct de vedere, matematicianii nu diferă de restul muritorilor.

Chestiunea 27 se referă la timpul cel mai priincios pentru munca matematică, în cursul unei zile. Unii preferă dimineaţa, alţii seara, alţii toată ziua, alţii după etate. Unul spune că cele mai bune lucrări le-a făcut dimineaţa la orele 4; altul lucrează dela 5 la 10; un rus dela 22 la 2. Unii spun că lucrul de seară strică somnul. Din răspunsuri, reese că latinii sunt matinali şi că rassele germanice preferă să lucreze şi să studieze seara şi noaptea.

Chestiunea 28 se referă la modul cum petrec vacanţele matematicianii. Sunt puţini cari nu au vacanţe; unii lucrează vacanţele pentru că nu pot altfel, alţii de plăcere, alţii se odihnesc. Pentru

unii, lucrările de vacanțe sunt preferabile, căci numai sunt preocupați de alte lucrări. Unul răspunde că „*știința nu are vacanțe*", altul că „*lucrează fără deosebire de timp și spațiu*"; alții cer în vacanțe; „*repaos complet sau recreație*". Deci fiecare să facă cum îi convine mai mult!

Chestiunea 29 *a* cereà să spună care este cea mai bună poziținne pentru a meditâ sau lucrà matematicele: în picioare, pe scaun, culcat, ori plimbându-se. Cei mai mulți lucrează la masă șezând pe scaun; puțini în picioare la tablă și un număr mai mic preferă a sta culcați. Plimbarea favorizează inspirația. Chestiunea 29 *b* se referă la scriere pe hârtie sau pe tablă, în timpul cercetărilor. Mai toți preferă studiul pe hârtie. Chestiunea 29 *c* se referă la sgomotul în timpul lucrului. Pentru mulți sgomotul este dăunător, la începutul lucrului; mai târziu, când creerul este absorbit de studiu, nu mai are nici o importanță. Unii chiar spun că lucrează mai cu atențiune în sgomote uniforme, ca acela produs de circulațiunea pe străzi, dar că sgomotele familiare, ca trântiri de uși, plânsete de copii, ciocăniri, muzici, deturnează atențiunea dela lucru. Conversațiile jenează pe mulți dela lucrul matematic. Chestiunea 29 *d* se referă la meditațiunile în plimbări și călătorii. S'a răspuns că plimbarea favorizează cugetarea, inspirația și organizarea planului de lucru. Chestiunea 29 *e* se referă la influența excitantelor și calmantelor. La 10% din matematicieni, le plac băuturile alcolice, 90% le condamnă. Tutunul este condamnat de 63% din matematicieni; unul din cei ce-l fumează spune că este un „*obiceiu detestabil*". Ceaiul are mai mulți partizani.

Chestiunea 1 *b* se referă la predispoziținni ereditare. Sunt rare cazurile de matematicieni în familie, ca BERNOULLI. Unul a răspuns că tatăl lui erà literat, bunicul medic; altul că toți ascendenții erau agricultori, la altul negustori. Din 32 matematicieni, numai 7 au avut printre ascendenți un matematician, inginer, fizician sau astronom.

Celelalte chestiuni privesc mai mult pe matematicianii de profesiune și producțiunile matematice, așà că mă opresc numai la rezumarea chestiunilor de mai sus. Adaog numai câtevà extrase din o scrisoare a lui LAGRANGE;

„*Citeam totdeauna cu condeiul în mână, desvoltând toate*
„*calculele. Aveam grije să revin des la considerații geometrice,*
„*pe care le cred foarte bune pentru a da o judecată justă și netă*".

„Totdeauna mi-am impus un program pentru a doua zi. Spiritul este leneş, trebuie să i se prevină mişelia lui naturală şi să-l ţinem vioiu, pentru a-i desvoltà toate forţele şi a le aveà disponibile la nevoe".

Cu acestea, încheiu sfaturile pe care am crezut necesar a le comunicà corespondenţilor Gazetei Matematice, în organizarea muncii lor pentru studiul ştiinţelor matematice şi pentru activitatea lor la această revistă. Fiecare va alege din ele pe acelea pe care timpul, mijloacele şi constituţiunea lor, le va permite să le realizeze.

Scopul nostru, după cum am spus în primul număr din primul an, nu este de a creeà matematiciani, ci *„desvoltarea gustului pentru studiul acestor ştiinţe şi al cercetărilor originale"*. Cine se îmbolnăveşte făcând matematicele, sau nu are nici un gust pentru ele, să se apuce deci de altcevà.

I. Ionescu.

COMPARAŢIUNE ÎNTRE SUMA DIVIZORILOR UNUI NUMAR ŞI SUMA NUMERELOR PRIME LUI ŞI INFERIOARE DÂNSULUI.

Fie S (N) suma divizorilor unui număr şi σ (N) suma numerelor prime cu N şi inferioare lui. Deci

$$N = a^{\alpha}\, b^{\beta}\, c^{\gamma} \ldots . \qquad (1)$$

Avem:

$$S(N) = \frac{a^{\alpha+1}-1}{a-1} \times \frac{b^{\beta+1}-1}{b-1} \times \cdots \qquad (2)$$

$$\sigma(N) = \tfrac{1}{2}\, a^{2\alpha-1}.\ b^{2\beta-1} \ldots . (a-1)(b-1) \ldots . \qquad (3)$$

Mai întâi de toate, nu putem aveà nici odată $S(N) = \sigma(N)$, căci dacă a ar fi cel mai mare factor prim al lui N, el împarte pe $\sigma(N)$ dar nu pe S (N). Să punem condiţia $\sigma(N) > S(N)$ şi să vedem când poate fi îndeplinită. Aceasta ne dă condiţia:

$$a^{2\alpha-1}.b^{2\beta-1}.c^{2\gamma-1} \ldots . (a-1)^2 (b-1)^2 (c-1)^2 \ldots . > 2(a^{\alpha+1}-1)\,(b^{\beta-1}-1) \ldots . \qquad (4)$$

Observăm că $(a-1)^2>2$, dacă $a>2$ şi $a^{2\alpha-1}>a^{\alpha+1}$, dacă $a^{\alpha-2}>1$ adică $\alpha>2$. Neegalitatea este dar satisfăcută pentru factori primi mai mari ca 2 şi exponenţi mai mari ca 2. Să presupunem, mai întâi, că N nu conţine factorul 2. In acest caz, cum $(a-1)^2(b-1)^2\ldots.>2$, reese că trebue să avem $a^{2\alpha-1}<a^{\alpha+1}-1$ şi a fortiori $a^{2\alpha-1}<a^{\alpha+1}$, ori $a^{\alpha}<a^2$, deci $\alpha<2$ pentru ca sensul neegalităţii să se schimbe. Factorii nu pot fi decât la puterea întâia, şi neegalităţile (4) devin:

$$a\,b\,c\ldots\ (a-1)^2\ (b-1)^2\ (c-1)^2\ldots>2\ (a^2-1)\ (b^2-1)\ldots$$

$$a\,b\,c\ldots\ (a-1)\ (b-1)\ (c-1)\ldots>2\,(a+1)\,(b+1)\,(c+1)\ldots$$

Această neegalitate va fi satisfăcută dacă

$$a\,(b-1)>2\,(a+1),\ b\,(b-1)>b+1,\ c\,(c-1)>(c+1),\ldots$$

$$a^2-3\,a-2>0,\quad b^2-2\,b-1>0,\quad c^2-2\,c-1>0,\ldots$$

Prima este satisfăcută pentru $a>3$, celelalte pentru $b>2$, $c>2,\ldots.$ Pentru a nu fi satisfăcută, unul din factori trebue să fie 3. Facem $a=3$ şi avem:

$$3\,b\,c\ldots\ (b-1)\ (c-1)\ldots>4\ (b+1)\ (c+1)\ldots$$

Aceasta este satisfăcută dacă

$$3\,b\,(b-1)>4\,(b+1),$$

căci $c>3,\ldots.$ Deci trebue să avem

$$3\,b^2-7\,b-4>0,$$

care este satisfăcută pentru $b>3$. Deci N nu poate conţine decât factorul 3. Avem $S(3)=4$, $\sigma(3)=3$, deci $\sigma(3)<S(3)$. Avem $S(3^2)=13$, $\sigma(3^2)=27$ deci $\sigma(9)>S(9)$.

Să considerăm acum numerele N în care intră şi factorul 2. Neegalitatea (4) devine atunci:

$$2^{2\alpha-2}.\ b^{2\beta-1}.\ c^{2\gamma-1}\ldots(b-1)^2(c-1)^2\ldots>(2^{\alpha+1}-1)(b^{\beta+1}-1)\ldots$$

Neegalitatea va fi verificată dacă $2^{2\alpha-2}>2^{\alpha+1}-1$, sau mai bine, dacă $2^{2\alpha-2}>2^{\alpha+1}$, ori $2\alpha-2>\alpha+1$, adică $\alpha>3$ şi $\beta,\gamma,\ldots$ trec de 1, căci atunci $b^{2\beta-1}>b^{\beta+1}-1,\ldots.$ Făcând $\beta=\gamma=\ldots.=1$, găsim:

$$2^{2\alpha-2}.\,b\,c\ldots.(b-1)\,(c-1)>(2^{\alpha+1}-1)\ (b+1)\ (c+1)\ldots.$$

Pentru $\alpha = 1$ rămâne de examinat

$$b\,c\ldots.\ (b-1)\ (c-1)\ldots. > 3\,(b+1)\ (c+1)\ldots.$$

E destul a lua

$$b\ (b-1) > 3\ (b+1), \qquad b^2 - 4\,b - 3 > 0,$$

ceeace are loc pentru $b \geqslant 5$. Facem $b = 3$ şi neegalităţile se reduc la

$$c\,d\ldots.\ (c-1)\ (d-1) > 2\ (c+1)\ (d+1)\ldots.$$

E destul a luà

$$c\ (c-1) > 2\,(c+1), \qquad c^2 - 3\,c - 2 > 0,$$

care este satisfăcută pentru $c > 3$. Deci numai $2 \times 3 = 6$ ar puteà face excepţie. Avem $S\,(2.\,3) = 12$, $\sigma\,(2.\,3) = 6$, deci $\sigma\ (6) < S\,(6)$.

Pentru $\alpha = 2$ va rămâne:

$$4\,b\,c\,d.\ldots.\ (b-1)\,(c-1)\ (d-1)\ldots. > 7\,(b+1)\,(c+1)\,(d+1)\ldots.$$

E destul a lua

$$4\,b\ (b-1) > 7\ (b+1), \qquad 4\,b^2 - 11\,b - 7 > 0,$$

care este satisfăcută pentru $b > 4$. Deci vom puteà lua $b = 3$ şi ne rămâne

$$6\,c\,d\ldots.\ (c-1)\ (d-1)\ldots. > 7\ (c+1)\ (d+1)\ldots.$$

care este satisfăcută dacă

$$6\,c^2 - 13\,c - 7 > 0,$$

care este satisfăcută pentru $c \geqslant 5$. Deci este de cercetat numai numărul $2^2.\ 3 = 12$. Avem $S\ (2^2.\,3) = 28$, $\sigma\ (2^2.\,3) = 24$. Deci $\sigma\,(12) < S\,(12)$.

Pentru $\alpha = 3$, avem

$$16\,b\,c\ldots.\ (b-1)\ (c-1) > 15\ (b+1)\ (c+1)\ldots.$$

E destul a lua:

$$16\,b^2 - 31\,b - 15 > 0,$$

care este satisfăcută pentru $b \geqslant 3$. E de examinat deci numai $2^3 = 8$.

Avem $S\,(2^3) = 15$, $\sigma\ (2^3) = 16$. Deci $\sigma\ (8) > S\ (8)$. Mai rămân de cercetat numerele 2 şi 2^2. Avem $S\,(2) = 3$, $\sigma\,(2) = 1$, deci $\sigma\,(2) < S\,(2)$ şi $S\,(4) = 7$, $\sigma\,(4) = 4$, deci $\sigma\,(4) < S\,(4)$.

Pentru 1 avem $S\,(1) = 1$, $\sigma\,(1) = 1$, deci egalitate.

Concluzia generală este dar următoarea:

Suma divizorilor unui număr este totdeauna inferioară sumei numerelor prime cu el şi inferioare lui, afară de numărul 1 care dă egalitatea acestor sume şi de numerele 2, 3, 4, 6 şi 12, la care prima sumă este mai mare ca a doua.

LT. I. LINTEŞ,

NOTE MATEMATICE.

D-nul AD. MINEUR, profesor la Universitatea din Bruxelles, redactor al cunoscutei reviste belgiene de matematici *Mathesis*, ne trimete următoarele interesante observaţiuni relative la soluţiile problemelor 2823, 2868 şi 2893, pe care, cu plăcere, ne grăbim a le publică.

16. *Sur la question* 2823 (*Gazeta Matematică*, Vol. XXVII, pag. 432). Les points A, B, C, D, A', B', C', D', appartiennent à une même hyperbole équilatère (H). Les faisceaux:

A'(ABCD), B'(ABCD), C'(ABCD), D'(ABCD) ont donc le même rapport anharmonique R, égal à celui des points A", B", C", D" où les parallèles menées par A, B, C, D à l'asymptote Oy de (H) coupent l'autre asymptote Ox. Si $xy = k$ est l'équation de l'hyperbole (H) rapportée aux asymptotes Ox, Oy et si

$$(\alpha, k/\alpha), \quad (\beta, k/\beta), \quad (\gamma, k/\gamma), \quad (\delta, k/\delta)$$

sont les coordonnées des points A, B, C, D,

$$R = \frac{\alpha-\gamma}{\gamma-\beta} : \frac{\alpha-\delta}{\delta-\beta}.$$

Mais

$$4\lambda^2 = (\alpha+\beta-\gamma-\delta)^2 + (k/\alpha+k/\beta-k/\gamma-k/\delta)^2,$$

$$4\mu^2 = (\beta+\gamma-\delta-\alpha)^2 + (k/\beta+k/\gamma-k/\delta-k/\alpha)^2,$$

$$4\nu^2 = (\gamma+\alpha-\beta-\delta)^2 + (k/\gamma+k/\alpha-k/\beta-k/\delta)^2$$

et

$$\lambda^2-\mu^2 = \frac{1}{\alpha\beta\gamma\delta}(\beta-\delta)(\alpha-\gamma)(\alpha\beta\gamma\delta+k^2),$$

$$\mu^2-\nu^2 = \frac{1}{\alpha\beta\gamma\delta}(\gamma-\delta)(\beta-\alpha)(\alpha\beta\gamma\delta+k^2),$$

$$\nu^2-\lambda^2 = \frac{1}{\alpha\beta\gamma\delta}(\alpha-\delta)(\gamma-\beta)(\alpha\beta\gamma\delta+k^2).$$

On en déduit

$$\frac{\lambda^2-\mu^2}{\nu^2-\lambda^2}=\frac{\alpha-\gamma}{\gamma-\beta}:\frac{\alpha-\delta}{\beta-\delta}=-R.$$

17. *Sur la question* 2868 (*Gazeta Matematică*, Vol, XXVII, p. 434). Ayant posé

$$AB_1/B_1C=CA_1/A_1B=BC_1/C_1A=\alpha\ ,$$

$$B_1M/MC_1=C_1N/NA_1=A_1P/PB_1=\beta\ ,$$

les coordonnées barycentriques absolues de B_1 et C_1 sont

$$1/(1+\alpha),\quad 0,\quad \alpha/(1+\alpha)\quad \text{et}\quad \alpha/(1+\alpha),\quad 1/(1+\alpha),\quad 0\ ;$$

les coordonnées barycentriques relatives de M sont $(\alpha+\beta)$, β, α; l'équation de AM est $y/\beta=z/\alpha$;
les coordonnées barycentriques absolues de A_2 sont

$$0,\quad \beta/(\alpha+\beta),\quad \alpha/(\alpha+\beta)\ ;$$

par analogie, les coordonnées barycentriques absolues de B_2 et C_2 sont

$$\alpha/(\alpha+\beta),\quad 0,\quad \beta/(\alpha+\beta)\quad \text{et}\quad \beta/(\alpha+\beta),\quad \alpha/(\alpha+\beta),\quad 0.$$

La propriété résulte de ce que les sommes des coordonnées de même nom des points A_2, B_2, C_2 sont égales.

18. *Sur la question* 2893 (*Gazeta Matematică*, Vol. XXVII, p. 437). 1) Les parallèles à MP, BP par C et N engendrent des faisceaux projectifs. Il suffit de mettre P en A, en C et à l'infini sur AC pour trouver que ces faisceaux sont perspectifs et admettent la droite AB comme axe de perspectivité ; le point Q est donc sur la droite AB.

2) La propriété s'obtient immédiatement en observant que l'hexagone BPMCQN est un hexagone de Pascal inscrit à l'hyperbole formée de droites AB, AC.

Note. Les propriétés 1 et 2 se généralisent facilement en remplaçant les couples de droites parallèles par des couples de droites qui se coupent sur une même droite située à distance finie.

Ad. Mineur.
Rochefort (Belgique).

19. *Zece trigonometrii diverse.* (A se vedeà *Gazeta Matematică*, Anul XXVII, pag. 150, nota).

1. **Analitică.** *G. S. Klügel.* — Analytische Trigonometrie. Brunswig 1770.
2. **Britannică.** *H. Briggs.* — Trigonometria Britannica. London 1633.
3. **Elementară.** *J. Casey.* — A treatise on elementary trigonometry. Dublin 1890.
4. **Numerică.** *N. J. Chignell.* — Numerical trigonometry. Oxford 1914.
5. **Parabolică.** *S. Günther.* — Parabolische Logarithmen und parabolische Trigonometrie. Leipzig 1882.
6. **Plană.** *B. Cavalieri.* — Trigonometria plana e sphaerica. Bologna 1643.
7. **Rectilinie.** *A. Cagnoli.*—Trigonometrie rectilique et sphérique. 1808.
8. **Sferică.** Vezi No. 6 şi No. 7.
9. **Tecnică.** *H. W. Marsh.* — Technical trigonometry. New-York 1914.
10. **Tradiţională.** *F. M. Morgan.*— Traditional trigonometry. (Vezi Bulletin of the American mathematical Society, Vol. XXI, pag. 96).

(Va urmà). I. IONESCU.

20. *Suma patratelor primelor* n *numere.* Pentru a găsì suma

$$S_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2, \qquad (1)$$

am dat în *Gazeta Matematică,* Anul XXII, pag. 132, o metodă intuitivă analoagă cu cea dată de Indieni pentru sumarea cuburilor prin ajutorul tablei lui PITAGORA.

Demonstraţiile date prin cursurile elementare de algebră sunt cam artificiale, nu se vede cum s'au imaginat metodele prin care s'au găsit acele demonstraţii. Se poate da însă unora din ele o altă formă, care să conducă direct la soluţia problemei.

Dacă am puteà găsì o expresiune N_n aşà ca să avem

$$n^2 = N_{n+1} - N_n, \qquad (2)$$

atunci înlocuind în S_n patratele prin valorile lor, am aveà:

$$S_n = (N_2 - N_1) + (N_3 - N_2) + \ldots + (N_{n+1} - N_n),$$

$$\therefore \quad S_n = N_{n+1} - N_1 \qquad (3)$$

şi suma ar fi găsită. Să presupunem că N_n este un polinom în n, adică

$$N_n = a n^m + b n^{m-1} + c n^{m-2} + \ldots + k n + l. \qquad (4)$$

Inlocuind în (2), avem:

$$n^2 = a[(n+1)^m - n^m] + b[(n+1)^{m-1} - n^{m-1}] + \ldots$$
$$\ldots + k[(n+1) - n].$$

Partea întâia fiind de gradul II şi a doua va fi de gradul II, deci $m = 3$, şi avem:

$$n^2 = a(3n^2 + 3n + 1) + b(2n + 1) + c$$
$$n^2 = 3an^2 + (3a + 2b)n + (a + b + c). \qquad (5)$$

Această relaţie va fi o identitate aşà că

$$3a = 1, \qquad 3a + 2b = 0, \qquad a + b + c = 0,$$

de unde

$$a = \frac{1}{3} \quad , \quad b = -\frac{1}{2} \quad , \quad c = \frac{1}{6} \qquad (6)$$

deci după (4):

$$N_n = \frac{n^3}{6} - \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6} = \frac{(n-1)\,n(2n-1)}{6}. \qquad (7)$$

Găsim acum:

$$N_1 = 0, \qquad N_{n+1} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

şi după (3):

$$S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

I. Ionescu.

21. *Asupra problemei 2954* (*Gazeta Matematică*, pag. 74). Intr'un articol al D-lui M'Cay, dela Trinity College din Dublin, întitulat: *Sur l'hyperbole de* Kiepert, publicat în revista belgiană *Mathesis,* année 1887, pag. 208 şi u., se găseşte enunţată, la paragraful 17, următoarea proprietate:

„Dacă pe cele trei laturi ale unui triunghiu ABC, se descriu „trei segmente de cerc capabile de un acelaş unghiu ε, centrul „radical al celor trei cercuri astfel obţinute este un punct P_2 al „hiperbolei lui Kiepert; centrul de homologie al triunghiului ABC „şi al triunghiului format de centrele celor trei cercuri este un alt

„punct P_1 al aceleaşi hiperbole; punctele P_1, P_2 şi centrul O al „cercului ABC sunt în linie dreaptă".

După cum se poate vedeà foarte uşor, enunţul problemei 2954 nu este decât prima parte a proprietăţii de mai sus, pusă sub o formă puţin diferită.

V. C.

22. *Un exerciţiu greşit.* La pagina 181, din volumul XXVII, este publicat următorul exerciţiu cu No. 35: „*Să se găsiască numerele a căror diferenţă este 100 şi al căror raport este* $\mathscr{M}6$".

Soluţia dată acelui exerciţiu este:

„Avem $x-y=100$ şi $x/y=\mathscr{M}6$.

Din a doua egalitate, avem:

$$(x-y)/y=(\mathscr{M}6-1)/1 \quad \therefore \quad 100/y=\mathscr{M}6-1,$$

care spune că unul din numere este acel divizor al lui 100, care mărit cu 1 este $\mathscr{M}6$ şi anume chiar 6".

După această concluzie, rezultă că soluţia problemei este,

$$y=5 \quad , \quad x=105.$$

Ceeace nu este adevărat, căci deşi $y+1=6$, totuşi $100/5=20$ nu este $\mathscr{M}6-1$.

Rectificarea de adus concluziei date exerciţiului 35, este următoarea:

„*Din* $100/y=\mathscr{M}6-1$, *se deduce că y este unul din divizorii lui 100, care dă la cât* $\mathscr{M}6-1$. *Se găseşte uşor* $y=20$, *căci*

$$100/20=5=\mathscr{M}6-1.$$

Deci numerele căutate sunt 120 şi 20.

Problema se poate generalizà în felul următor. Ştiind că $x\pm y=A$ şi $x/y=\mathscr{M}k$, să se găsiască x şi y. Procedând la fel, se găseşte

$$(x\pm y)/y=(\mathscr{M}k\pm 1)/1 \quad \therefore \quad A/y=\mathscr{M}k\pm 1.$$

y va fi acel divizor a lui A, prin care împărţind pe A se obţine la cât $\mathscr{M}k\pm 1$.

Locot. Col. Gh. Buicliu.

23. *Asupra problemei 2907 pag. 439.* Să considerăm expresia

$$E = m^n,$$

m şi n fiind reale sau complexe. Punând

$$m = \rho e^{i\theta} \quad , \quad n = a + bi$$

avem $$E = e^{(a+bi)(\lg\rho + i\theta_1)} \quad , \quad \theta_1 = \theta + 2k\pi,$$

k fiind un întreg oarecare. Sau $E = e^{a\lg\rho - b\theta_1 + i(b\lg\rho + a\theta_1)}$.

Se observă că din cauza lui k, E are o infinitate de valori.

1°. In ce caz E are o singură valoare?

Izolând pe k în exponent, va trebui ca $e^{2k(a+bi)\pi i}$ să păstreze aceeaşi valoare, oricare ar fi k întreg. Rezultă imediat

$$b = 0 \quad , \quad a = p \quad , \quad p \text{ întreg oarecare.}$$

Deci numai dacă puterea n este un întreg oarecare, expresia E are o singură valoare.

2°. In ce caz E are q valori?

cum $$e^{2k\pi i(a+bi)} = e^{2k'\pi i(a+bi)},$$

rezultă $a = p/q$, $b = 0$, p, q fiind întregi oarecari.

Deci numai dacă n este un număr raţional, E are un număr finit de valori, altfel are o infinitate de valori.

3°. In ce caz toate valorile lui E sunt reale?

Va trebui să avem:

$$b\lg\rho + a(\theta + 2k\pi) = p\pi, \quad p \text{ întreg.}$$

Dând lui k două valori distincte şi scăzând, se deduce că

$$a = r/s \quad , \quad r, s \text{ fiind numere întregi.}$$

Dacă în expresia $$e^{i(b\lg\rho + a\theta + 2k\pi a)},$$

dăm lui k o valoare multiplu de s, partea $e^{2k\pi ai}$ este reală.

Rezultă deci că $b\log\rho + a\theta = p_1\pi$, p_1 fiind întreg.

Dar atunci, trebuind ca $e^{2k\pi ia}$ să fie reală, oricare ar fi k, rezultă că $s = 2$.

Deci E va avea toate valorile reale dacă

$$b\lg\rho + a\theta = p_1\pi \quad \text{şi} \quad a = r/2.$$

In cazul particular $a = 0$, $\rho = 1$ aceste egalităţi sunt satisfăcute. Adică expresia E este egală cu o cantitate de modul

unitate, ridicată la o putere imaginară $b\,i$. Este generalizarea problemei 2907.

In acest caz, toate valorile vor fi: $e^{\frac{1}{2}\pi} \cdot e^{2k\pi}$, k un întreg oarecare.

Un alt caz interesant este $a = 0$, $\rho = e$ şi $b = k\pi$; în acest caz toate valorile sunt reale.

TH. ANGHELUŢĂ.

CHESTIUNI DE EXAMEN.

FACULTATEA DE ŞTIINŢE DIN CLUJ.

SESIUNEA OCTOMVRIE 1922.

ANALIZA.

1. Se consideră o curbă C reprezentată în planul axelor dreptunghiulare $x\,O\,y$ prin ecuaţia $y = f(x)$. Fie A şi B intersecţiile axelor $O\,x$ şi $O\,y$ cu tangenta într'un punct $P(x, y)$ al curbei C. Când punctul P descrie curba C, punctul M, având ca abscisă O A şi ordonată O B, descrie curba Γ. Fie R şi S intersecţiile axei $O\,x$ cu tangenta în M la curba Γ şi cu dreapta P M. Să se demonstreze că segmentele R A şi A S sunt egale.

2. Să se determine liniile asimptotice ale suprafeţei

$$z = \log(\cos y / \cos x)$$

şi să se arate că cele două linii asimptotice, ce trec printr'un punct oarecare al suprafeţei, sunt ortogonale.

(7 octomvrie, ora 8 dim.).

Să se arate că expresiunea

$$P_n(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \frac{d^n (1-x^2)^{n+\frac{1}{2}}}{d\,x^n}$$

este un polinom de gradul n în x şi că avem

$$\int_{-1}^{+1} \sqrt{1-x^2}\, P_m\, P_n\, d\,x = 0, \qquad m \neq n.$$

Să se deducă natura rădăcinilor ecuaţiei $P_n(x) = 0$.

(7 octomvrie, ora 3 p. m.).

CALCUL DIFERENŢIAL ŞI INTEGRAL (partea I).

Să se calculeze integrala

$$\int \frac{1 + 3\cos^2 x - \cos x(\cos^2 x - 2)}{\sin x(3 - \cos x)}\, d\,x.$$

(19 octomvrie, ora 8 dim.).

Să se calculeze integrala dublă

$$\int\int \sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}}\, dx\, dy\,,$$

domeniul de integrare fiind cercul cu centrul în origină şi de rază 1.

(19 octomvrie, ora 3 p. m).

MECANICA.

Un punct mobil, a cărui massă este egală cu unitatea, se mişcă pe o curbă plană a cărei ecuaţie, în coordonate polare, este $r = a\cos^2\frac{1}{2}\theta$. Acest punct este supus unei forţe atractive ce emană din origină, valoarea algebrică a forţei fiind

$$F = -3a^5/r^4.$$

In momentul iniţial, mobilul are viteza $V_0 = a\sqrt{2}$ şi este situat în punctul unde curba tae axa polară. Se se studieze mişcarea punctului şi să se calculeze reacţiunea curbei. Se va găsi că reacţiunea este nulă şi să se explice rezultatul.

(7 octomvrie, ora 8 dim.).

Pe un plan orizontal se sprijină un cilindru circular drept, gol în interior, constituit dintr'o foae indeformabilă şi fără grosime. In interiorul acestui cilindru se găsesc alte două cilindre circulare, drepte, de aceeaşi lungime, pline, greutatea unităţii de volum din materia ce le constitue fiind 1. Toate cilindrele au axele lor orizontale şi sistemul întreg stă în echilibru.

Se cer relaţiunile pentru calculul practic al unghiului diedru făcut de planul determinat de axele cilindrului gol şi a unuia din cilindrele pline cu planul vertical. Toate suprafeţele considerate au proprietatea de a alunecă fără frecarea unele asupra altora.

(7 octomvrie, ora 3 p. m.).

BIBLIOGRAFIE.

Mathesis. Vol. XXXVI. Octomvrie 1922. Bruxelles. Aplicarea teoriei residuurilor la demonstrarea unei teoreme a lui HERMITE asupra indicelui unei fracţii raţionale, de P. SERGESCU. Asupra tangentelor comune la două cercuri de J. DEGUELDRE. Asupra desvoltării în fracţie continuă a rădăcinii cubice a unui număr, de M. KRAITCHIK. Asupra punctului lui FEUERBACH de M. P. DE LÈPINEY. Asupra Agnesianelor de M. R. GOORMAGHTIGH. Asupra transversalelor unghiulare ale triunghiului de M. A. DE HUISSER.

Revista de matimaticas y fisicas elementales. Anul IV. Septemvrie 1922. No. 5. Buenos Aires. Transformările lui LORENZ de G. ITZIGSOHN. Identităţi aritmetice deduse trigonometriceşte, de LT. I. G. LINTEŞ. Sumări diferite ale termenilor în progresie aritmetică, de A. E. DE CESARE.

M. KRAITCHIK. *Décomposition de* $a^n \pm b^n$ *en facteurs dans le cas où* **nab** *est un carré parfait, avec une table des décompositions numériques*

pour toutes les valeurs de a et b inférieures à 100. (Supliment la *Mathesis*, Octomvre 1922).

GRIFFITH CONRAD EVANS. *Functionals and their applications selected topics, including integral equations*, New-Jork 1918. Publicată de *American mathematical Society*.

Bulletin de la Section scientifique de l'Académie roumaine. An VII. No. 7—10. Asupra zerorilor funcțiunii ζ (s) de O. ONICESCU.

Idem. An. VIII No. 1 — 2.

Revista matematică din Timișoara. Anul II No. 9. 15 Noembrie 1922. Timișoara. Discuția și rezolvarea ecuației de gradul al treilea cu ajutorul discriminanților de E. CARAMAN.

Buletinul Asociației de matematici pare și aplicate. Anul II. No. 3 Noemvrie. București (litografiat). Asupra funcțiunilor de compoziție de O. ONICESCU. Observări asupra criteriilor de convergență de TH. ANGHELUȚĂ. Notions de calculul tensoriel de P. NICOLAS.

Revista Artileriei. Anul XXXVI No. 5 — 6. August-Septemvrie 1922. București. Luneta busolă rusă de baterie, de Maior DORIAN și Căpitan MANOLESCU.

W. HEFFER & SONS. Cambridge, 4 Petty Cury. England. Catalogue of works on the mathematical, physical and chimical sciences. No. 217. 1922.

CERERI.

95. In ce carte aș puteà găsi tratate mai pe larg *coordonatele tripolare?*

F. E. GEORGESCU.

96. *Unde aș puteà găsi* un studiu amănunțit al *punctelor permutante?*

B. M. BARBĂLATT.

PROBLEME REZOLVATE.

PROBLEMA 1895. *Știind că* **p** *este un număr de o singură cifră, să se găsiască cea mai mică valoare a numărului întreg și pozitiv* **n**, *pentru care* $\mathbf{p}^n$ *începe cu* **n**.

LOCOT. COL. GH. BUICLIU.

Soluție dată de D-nii: GH. I. DUMITRESCU, A. HRISTESCU, I. PĂSĂRICĂ, G. NICOLESCU, M. CHERMĂNESCU și S. GHIOLU.

Ridicând numerele de o singură cifră la diferite puteri consecutive, se găsesc următoarele soluții pentru p, n și p^n, care răspund problemei

p . . .	n . . .	p^n . . .
1 . . .	1 . . .	$1^1 = \mathbf{1}$
2 . . .	6 . . .	$2^6 = \mathbf{64}$
4 . . .	10 . . .	$4^{10} = \mathbf{1048576}$
5 . . .	2 . . .	$5^2 = \mathbf{25}$
6 . . .	13 . . .	$6^{13} = \mathbf{13060694016}$
7 . . .	3 . . .	$7^3 = \mathbf{343}$
8 . . .	4 . . .	$8^4 = \mathbf{4096}$
9 . . .	5 . . .	$9^5 = \mathbf{59049}$

Pentru 3 nu găsim soluţie, până la $n = 40$. Poate că 3^n să înceapă cu n pentru $n > 40$.

Observaţiuni. 1, După cum se vede, soluţia de mai sus este necompletă; ea nu dă valoarea lui n pentru $p = 3$ şi nici nu precizează dacă pentru $n > 40$ s'ar găsi vre-o valoare de a lui n pentru care 3^n să înceapă cu n. Totuşi există astfel de valori, dintre care cea mai mică este 185, căci $3^{185} = 1850\ldots$, după cum uşor ne putem convinge, cu ajutorul logaritmilor. Dar pentru găsirea acestei valori, trebuesc calcule multe şi din acest punct de vedere, problema 1895, este din acelea care pun la încercare numai răbdarea rezolvitorului şi obişnuinţa efectuărei calculelor numerice. Când am propus problema 1895, văzând că nu găsesc soluţie pentru $n < 20$, mi-am propus să caut numărul cu care începe 3^n pentru toate valorile lui n până la 200 şi numai aci să conchid ca rezolvitorii de mai sus, *„poate că numai pentru $n > 200$ numărul 3^n ar puteà începe cu n“*. S'a întâmplat ca 3^{185} să înceapă cu 185... deci am avut mai puţine calcule de făcut decât îmi propusesem să fac.

Pentru a ajunge la numărul cu care începe 3^{185}, n'am calculat toate puterile lui 3 ci am procedat astfel: Fie $a, b, c, d, \ldots$. cifrele lui 3^n, începând dela stânga la dreapta. Avem evident:

$$3^n = (10a + b)10^{r-1} + c10^{r-2} + \cdots \text{ şi } 3^{n+1} = 3(10a + b)10^{r-1} + 3c10^{r-2} + \cdots$$

Cum $3a$, $3b$, $3c$,.. pot fi maximum 27 fiecare, rezultă că numărul cu care începe 3^{n-1} poate fi maximum $3\,(10a + b) + 2$ şi minimum $3\,(10a + b)$. Deci dacă se cunoaşte numărul de 2 cifre ab, cu care începe 3^n, numărul de 2 cifre $a'b'$ cu care va începe 3^{n+1} va fi cuprins între numărul de 2 cifre cu care începe $3ab$ şi numărul de 2 sau 3 cifre cu care începe $(3ab + 2)$. Cu această observaţie şi ştiind, din ridicări la puteri succesive, că 3^{30} începe cu 34 facem calculele întocmind următorul tabel:

3 la puterea	începe cu un număr cuprins între	şi	între
21	10..		12..
22	30..		38..
23	90..		116.
24	27..		35..
25	81.		107.
26	24..		32..

Se vede că 3^{26} ar puteà începe cu 26. Dar avem:

$$\log 3^{26} = 26 \log 3 = 12{,}40512 \quad \text{deci} \quad 3^{26} = 254...$$

Deci 3^{26} nu începe cu 26. Continuăm tabloul luând pe 25.. ca număr cu care începe 3^{25} şi ori de câte ori vom găsi că n se cuprinde între cele 2 limite ale tabloului, vom face verificarea şi vom găsi exact numărul cu care începe 3^n, după cum am făcut cu 3^{26}. Rezultatul tuturor acestor calcule este înscris în tabelul următor, în care, pentru numerele, pentru care s'a calculat cu ajutorul logaritmilor numărul cu care începe 3^n s'a înscris rezultatul la mijloc între semnele $<$ şi $<\ldots$

3 la puterea	începe cu un număr cuprins între		și		cuprins între
26	24..	<	254..	<	32..
27	75..				77..
28	22..				23..
29	68..				71..
30	20..				21..
31	60..				65..
32	18..				19..
33	54..				59..
34	16..				17..
35	48..				53..
36	14..				16..
37	42..				50..
38	12..				15..
39	36..	<	405..	<	47..
40	12..				14..
41	36	<	364..	<	44..
42	10..				11..
43	30..				35..
44	90..				107..
45	27..				32..
46	81..				98..
47	24..				29..
48	72..				89..
49	21..				26..
50	63..				80..
51	18..				24..
52	54..				74..
53	16..				22..
54	48..	<	581..	<	68..
55	17..				1745..
56	51..				523..
57	15..				157..
58	45..				47..
59	13..				14..
60	39..				44..
61	11..				13..
62	33..				41..
63	99..				125..
64	29..				37..
65	87..				113..
66	26..				34..
67	78..				104..
68	23..				31..
69	69..	<	834..	<	95..
70	24..				25..
71	72..				77..
72	21..				23..
73	63..				71..
74	18..				21..
75	54..				65..
76	16..				19..
77	48..				59..
78	14..				17..

3 la puterea	începe cu un număr cuprins între		și		cuprins între
79	42..				53..
80	12..				16..
81	36.				50..
82	10..				15..
83	30..				47..
84	90..				143..
85	27..				43..
86	81..	<	107..	<	131..
87	30..				39..
88	90.				119..
89	27..				35..
90	81..	<	87..	<	107..
91	26..				28..
92	78..				86..
93	23..				26..
94	69..				80..
95	20..				24..
96	60..				74..
97	18..				22..
98	54..				68..
99	16..				20..
100	48..				62..
101	14..				18..
102	42..				56..
103	12..				17..
104	36..				53..
105	108..				161..
106	30..				48..
107	90..	<	112..	<	146..
108	33..				44..
109	99..	<	101..	<	134..
110	30..				40..
111	90..	<	91..	<	122
112	27..				36..
113	81..				110..
114	24..				33.
115	72..				101..
116	21..				30..
117	63..				92..
118	18..				27..
119	54..				83..
120	16..				25..
121	48..				87..
122	14..				26..
123	42..				80..
124	12..	<	145..	<	24..
125	43..				74..
126	12..	<	130..	<	22..
127	390..				392..
128	117..				1178..
129	33..				35..
130	99..				107..
131	29..				32..

3 la puterea	începe cu un număr cuprins între	și	cuprins între
132	87..		98..
133	26..		29..
134	78..		89..
135	23..		26..
136	69..		80..
137	20..		24..
138	60..		74..
139	18..		22..
140	54..		68..
141	16..		20..
142	48..		62..
143	14..	< 16.. <	18..
144	48..		50..
145	14..	< 152.. <	15..
146	456..		458..
147	136..		137..
148	40..		41..
149	120..		125..
150	36..		37..
151	10..		11..
152	30..		35..
153	90..		107..
154	27..		32..
155	81..		98..
156	24..		29..
157	72..		89..
158	21..		26..

3 la puterea	începe cu un număr cuprins între	și	cuprins între
159	63..		80..
160	18..		24..
161	54..		74..
162	16..	< 196. >	22..
163	58..		59..
164	174..		179..
165	52..		53..
166	15..		161..
167	45..		48..
168	13..		14..
169	39..		44..
170	11..		13..
171	33..		41..
172	99..		125..
173	29..		37..
174	87..		113..
175	26..		34..
176	78..		104..
177	23..		31..
178	69..		93..
179	20..		28..
180	60..		86..
181	18..	< 22.. <	26..
182	66..		68..
183	19..		20..
184	57..		62..
185	171..	< 185.. <	188..

Metoda întrebuințată comportă mai puține calcule decât dacă s'ar face ridicările la putere, căci ca să trec de exemplu dela 3^{21} la 3^{32} immulțesc cu 3 numai numerele 10 și 12 iar nu un număr de 11 cifre cât are 3^{21}. Pe de altă parte, s'au făcut numai 17 verificări cu ajutorul logaritmilor.

Pentru facerea și verificarea calculelor de mai sus, am întrebuințat aproape o oră și 40′, deci mărimea tabloului calculelor nu poate produce nici o mirare și nici răbdarea cerută pentru efectuarea calculelor nu este prea mare.

2. D-l D. Lefter a căutat să rezolve în numere întregi ecuația

$$p^n = 10^r n + z$$

întrebuințând calcule și metode foarte anevoioase, fără însă a putea ajunge la soluția problemei. D-sa a găsit numai soluțiile parțiale :

p: 2, 5, 7.
n: 6, 2, 3.

Locot. Col. Gh. Buicliu.

PROBLEMA 2410. *Să se calculeze minimul sumei:*

$$S = 2x^2y^3z^4 + 5x^4y^2z^3 + 7x^3y^4z^2,$$

știind că:

$$x^4y^5z^6 + x^8y^{10}z^{12} = 2.$$

V. ALACI.

Soluție dată de D-nii: A. BRENER, I. N. CIORĂNEANU, I. GH. DUMITRESCU, M. GHERMĂNESCU, L. HAHN, S. KAUFMANN, A. MANOLIU, ST. NICOLESCU, E. PAPAFIL, M. REINHORN, G. ROSENBERG și I. SUCHĂR.

Relația de condiție se poate scrie:

$$(x^4y^5z^6 + \tfrac{1}{2})^2 = 9/4,$$

de unde:

(1) $x^4y^5z^6 = 1$ sau (2) $x^4y^5z^6 = -2.$

Produsul puterilor fiind constant, pentru ca suma S să fie minimă, trebue să avem; „G. M." An. XIX p. 405:

$$\frac{2x^2y^3z^4}{\begin{vmatrix} 4 & 4 & 3 \\ 5 & 2 & 4 \\ 6 & 3 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{5x^4y^2z^3}{\begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 3 & 5 & 4 \\ 4 & 6 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{7x^3y^4z^2}{\begin{vmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 3 & 2 & 2 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}}.$$

Calculând determinații și lăsând factorul 3 la o parte, putem scrie:

$$(3) \qquad \frac{2x^2y^3z^4}{11} = \frac{5x^4y^2z^3}{2} = \frac{7x^3y^4z^2}{2} = \lambda,$$

λ fiind valoarea comună a rapoartelor.

Scoțând din (3) valorile numărătorilor, deducem:

$$(4) \qquad \text{minim. } S = 11\lambda + 2\lambda + 2\lambda = 15\lambda.$$

Rămâne a determină pe λ și pentru aceasta observăm că relația (1) ridicată la puterea 9^a se poate scrie:

$$\frac{(2x^2y^3z^4)^{11}\,(5x^4y^3z^2)^2\,(7x^3y^4z^2)^2}{2^{11} \times 5^2 \times 7^2} = 1,$$

sau ținând socoteală de (3), avem:

$$(11\lambda)^{11}.\ (2\lambda)^2.\ (2\lambda)^2 = 2^{11} \times 5^2 \times 7^2,$$

de unde:

$$\lambda = \sqrt[15]{\frac{2^7 \times 5^2 \times 7^2}{11^{11}}}.$$

Valoarea lui λ introdusă în (4), ne dă:

$$\text{minim } S = 15 \sqrt[15]{\frac{2^7 \times 5^2 \times 7^2}{11^{11}}}.$$

Relaţia de condiţie (2) nu o vom utiliză, fiindcă teorema pe care am utilizat-o, presupuneà variabilele pozitive.

PROBLEMA 2449. *Să se stabilească identitatea :*

$$\lim_{n=\infty} \sum_{k=1}^{n} \sin \frac{k^2 \pi}{\alpha n^2+\beta n+\gamma} \sin \frac{a k \pi}{\alpha n^2+\beta n+\gamma} = a \sin^2 \frac{\pi}{2\alpha}.$$

V. Alaci.

Soluţie dată de D-nii: M. Ghermănescu, E. Grigoriu, A. Th. Nicolau, Sub-Locot. V. Pintilescu şi M. Sarian.

Avem succesiv:

$$\sum_{k=1}^{n} \sin \frac{k^2 \pi}{\alpha n^2+\beta n+\gamma} \sin \frac{a k \pi}{\alpha n^2+\beta n+\gamma}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\sum_{k=1}^{n} \cos \frac{k(k-a)\pi}{\alpha n^2+\beta n+\gamma} - \sum_{k=1}^{n} \cos \frac{k(k+a)\pi}{\alpha n^2+\beta n+\gamma}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\sum_{k=1}^{a} \cos \frac{k(k-a)\pi}{\alpha n^2+\beta n+\gamma} + \sum_{k=a+1}^{n} \cos \frac{k(k-a)\pi}{\alpha n^2+\beta n+\gamma}\right.$$

$$\left. - \sum_{k=1}^{n-a} \cos \frac{k(k+a)\pi}{\alpha n^2+\beta n+\gamma} - \sum_{k=n-a+1}^{n} \cos \frac{k(k+a)\pi}{\alpha n^2+\beta n+\gamma}\right].$$

Dar

$$\sum_{k=a+1}^{n} \cos \frac{k(k-a)\pi}{\alpha n^2+\beta n+\gamma} - \sum_{k=1}^{n-a} \cos \frac{k(k+a)\pi}{\alpha n^2+\beta n+\gamma} = 0,$$

termenii reducându-se 2 câte 2, deci:

$$\sum_{k=1}^{n} \sin \frac{k^2 \pi}{\alpha n^2+\beta n+\gamma} \sin \frac{a k \pi}{\alpha n^2+\beta n+\gamma}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\sum_{k=1}^{a} \cos \frac{k(k-a)\pi}{\alpha n^2+\beta n+\gamma} - \sum_{k=n-a+1}^{n} \cos \frac{k(k+a)\pi}{\alpha n^2+\beta n+\gamma}\right].$$

Cum însă

$$\lim_{n=\infty} \sum_{k=1}^{a} \cos \frac{k(k-a)\pi}{\alpha n^2+\beta n+\gamma} = a \quad \text{şi} \sum_{k=n-a+1}^{n} \cos \frac{k(k+a)\pi}{\alpha n^2+\beta n+\gamma} = a \cos \frac{\pi}{\alpha},$$

rezultă că:

$$\lim_{n=\infty} \sum_{k=1}^{n} \sin \frac{k^2 \pi}{\alpha n^2+\beta n+\gamma} \sin \frac{a k \pi}{\alpha n^2+\beta n+\gamma}$$

$$= \frac{1}{2}\left(a - a \cos \frac{\pi}{\alpha}\right) = a \sin^2 \frac{\pi}{2\alpha}.$$

A se vedeà pentru generalizare, articolul „*Asupra unor însumări trigonometrice*" R. M. din Timişoara No. 5 An. II.

PROBLEMA 2942. *Să se găsiască trei numere întregi a căror sumă să fie 196, produsul 205800 şi cel mai mare comun divizor 7.*

Lt. I. LINTEŞ.

Soluţie dată de D-nii: A. TAUBER (cl. VII „Lc. Laurian" Botoşani), T. POPOVICIU (Arad), A. ABRAMOVICI (cl. V Lc. Naţional-Iaşi), I. B. FLORESCU (cl. VIII particulară), C. GEORGESCU şi M. VASILIU.

Fie $A = 7a$, $B = 7b$, $C = 7c$, numerele căutate. Conform enunţului, avem:

$$A + B + C = 196 \quad , \quad \text{deci } a + b + c = 28,$$

$$A \,.\, B \,.\, C = 205800 \quad , \quad \text{„} \quad a \,.\, b \,.\, c = 600.$$

Numerele *a, b, c* sunt mai mici ca 28, şi sunt *divizori ai lui 600*, deci vor puteà aveà numai valorile:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 20, 24, 25.

Insă numerele *a, b, c*, având suma 28, deci *pară*, vor fi sau toate pare, sau două impare şi unul par. Toate pare nu pot fi, căci ar aveà pe 2 divizor comun şi deci numerele A, B, C, pe 14, în loc de 7; rămâne dar numai cazul când două din numere sunt impare şi unul par.

In aceste condiţiuni, făcând grupările divizorilor de mai sus — luaţi câte trei — având suma 28, găsim:

(1, 2, 25); (1, 3, 24); (1, 12, 15);
(3, 5, 20); (3, 10, 15); (5, 8, 15).

Dintre acestea, numai numerele 5, 8, 15, înmulţite ne dau 600, deci soluţiunile problemei vor fi:

35 , 56 , 105.

1. Au rezolvat problema făcând uz de algebră D-nii: C. Georgescu, Fl. Georgescu, M. Dumitrescu, Şt. Solacoglu, S. Solacolu E. Ştefănescu şi M. Nicolau.

2. Au rezolvat problema, mărginindu-se la relaţiunile:

$$a+b+c=28 \quad \text{şi} \quad a.b.c=600$$

şi deducând că $a=5$, $b=8$ şi $c=15$, D-nii: A. Pamula, N. Tailer, Pincu Katz, I. Constantinescu, I. Coşereanu, A. Buşilă, Cristea Goilav, V. Dan, I. Fântânaru, D. Popoviciu, T. Nicuţă, A. Miclescu, S. Vasilachie, I. Dragomir, O. Popea, F. Negretzu, E. Iliescu, T. Popa, F. Dobrescu, D. Măru, W. Solomon, M. Fajon, Gh. Stancu, I. Teodorescu, N. Arcadian şi D. Bercovici.

3. D-l E. Ştefănescu ne mai trimite în ultimul timp, o interesantă soluţie pe cale algebrică, pe care, din lipsă de spaţiu, nu o putem publică.

Lt. I. Linteş.

PROBLEMA 2943. *Numărătorul şi numitorul unei fracţii au cel mult trei cifre, iar fracţia rămâne neschimbată dacă scriem termenii ei răsturnaţi. Se cer fracţiile care îndeplinesc aceste condiţiuni.*

I. Ionescu.

Este evident că dacă am găsit o fracţie, putem aveà alta luând inversul ei. De aceea, ne putem ocupà numai de fracţiile mai mici ca 1, dacă lăsăm la oparte pe cele egale cu 1. Să ne ocupăm dar mai întâiu de acestea.

Fracţiile egale cu 1 au numărătorii egali cu numitorii. Dela

1 la 1000, în care se cuprind toate numerele de 1, 2 şi 3 cifre, putem lua ca numărător şi numitor, orice număr, care nu se termină cu 0, căci acestea nu au numere răsturnate propriu zise. Deci numărul soluţiunilor este $999-99=900$.

Să ne ocupăm acum de fracţiile în care răsturnatul numărătorului este acelaş cu el însuşi adică *numărătorul este simetric.* Pentru ca fracţia să nu-şi schimbe valoarea prin răsturnarea termenilor, dacă unul din termenii ei rămâne neschimbat prin această operaţiune, atunci şi celălalt rămâne neschimbat. Numerele de o cifră dau fracţii care intră în această categorie, deşi ele nu oferă nici un interes pentru problema pusă. Excluzând fracţiile egale cu 1, se vede că putem formă 9×8 fracţii de această natură, deci **72** de soluţiuni cu fracţii având numărătorul şi numitorul de o cifră.

Dacă numărătorul este de o cifră şi numitorul de două, atunci putem formă $9\times 9=81$ fracţii. Dacă amândouă au două cifre, putem formă $9\times 8=72$ fracţii, lăsând la o parte pe cele egale cu 1. Dacă numărătorul are o cifră, numitorul va aveà cifrele extreme egale şi cea mijlocie oricum; deci putem formă $9\times 9\times 10=810$ soluţiuni.

Dacă numărătorul are două cifre şi numitorul trei, ale numărătorului vor fi egale, deci avem tot $9\times 9\times 10=810$ soluţiuni. In fine, dacă numărătorul şi numitorul au trei cifre şi sunt simetrice, fiecare poate lua $9\times 10=90$ valoŗi de numere simetrice şi putem combinà două oarecare dintre ele ca numărător şi numitor afară de cele egale, care dau fracţii egale cu 1 şi care au fost examinate separat. Deci avem $90\times 89=8010$ soluţiuni.

Rezumând cele spuse, relativ la soluţiile cu termeni simetrici, avem:

Fracţii de forma	a/b	$(a\neq b)$	72	soluţii
„ „ „	a/bb		81	„
„ „ „	aa/b		81	„
„ „ „	aa/bb	$(a\neq b)$	72	„
„ „ „	a/bcb		810	„
„ „ „	aba/c		810	„
„ „ „	aa/bcb		810	„
„ „ „	aba/cc		810	„
„ „ „	aba/cdc	$(aba\neq cdc)$	8010	„
		Total	11556	

Să cercetăm acum soluțiile, în care termenii nu sunt simetrici. Pentru aceasta, fiecare trebue să aibă cel puțin două cifre.

Dacă numărătorul și numitorul au două cifre, fracțiile sunt de forma $ab/a'b'$. Trebue să avem în acest caz:

$$\frac{10a+b}{10a'+b'}=\frac{10b+a}{10b'+a'}.$$

$$\therefore \quad 100ab'+ba'+10aa'+10bb'=100ba'+ab'+10bb'+10aa'$$

$$\therefore \quad 99ab'=99ba', \text{ adică } a/a'=b/b'.$$

Deci cifrele numărătorului trebue să fie proporționale cu cifrele corespunzătoare ale numitorului. Cum $a\neq b$, (căci altfel numărătorul este simetric), urmează că și $a'\neq b'$.

E destul a considerà $a<b$, $a<a'$, căci prin răsturnarea termenului și răsturnarea fracțiilor avem și soluțiile pentru cazul $a>b$ și $a>a'$. Cu modul acesta, o soluțiune găsită dă loc la patru soluțiuni noi. Relația de mai sus se poate scrie:

$$a/a'=b/b'=m/n,$$

în care m/n este o fracție ireductibilă. De aci scoatem:

$$\begin{cases} a=km, \\ a'=kn, \end{cases} \qquad \begin{cases} b=lm, \\ b'=ln. \end{cases}$$

Cum $b>a$, avem și $l>k$. Deci l este cel puțin 2. Cum $b<10$, avem $m<5$. Tot așà se arată că $n<5$. Deci fracția m/n nu ar puteà fi decât 1/2, 1/3, 1/4, 2/3, 3/4. De aci constatăm că singurele soluțiuni sunt următoarele:

$$\frac{12}{24}, \frac{13}{26}, \frac{14}{28}, \frac{23}{46}, \frac{24}{48}, \frac{34}{68}; \frac{12}{36}, \frac{13}{39}, \frac{23}{69}; \frac{12}{48}; \frac{24}{36}, \frac{26}{39}, \frac{46}{69}; \frac{36}{48}.$$

Avem aci 14 soluțiuni. Fiecare mai dă loc la alte trei și deci în total vom aveà **56** soluții.

Dacă numărătorul are două cifre și numitorul trei, fracția este de forma $ab/a'c'b'$. Trebue să avem în acest caz:

$$\frac{10a+b}{100a'+10c'+b'}=\frac{10b+a}{100b'+10c'+a'}.$$

Gonind numitorii, simplificând și aranjând, găsim:

$$111\,(ab'-ba')=10\,[a(a'-c')+b(c'-b')].$$

Pentrucă 111 este prim cu 10, trebue să avem:

$$a\,b'-b\,a'=10\,n \qquad a(a'-c')+b(c'-b')=111\,n.$$

Se vede că chiar de am face $a=a'-c'=b=c'-b'=9$, prima parte dela egalitate a doua de abiă atinge 162; deci $n<2$. Singurele valori admisibile pentru n sunt deci $n=0$ şi $n=1$. In ultimul caz, am aveà:

$$a\,b'-b\,a'=10, \qquad a(a'-c')+b(a'-b')=111.$$

Trebue să avem $a<b$. Prima relaţie ne arată că în acest caz, se impune să avem $b'>a'$. In a doua relaţie, trebue să avem $a'-c'>0$, $c'-b'>0$, căci altfel prima parte nu trece peste $9\times 9=81$. Adunând aceste neegalităţi, scoatem $a'>b'$, care este în contradicţie cu relaţia de mai sus. Deci egalităţile sunt imposibile. Ne rămâne numai:

$$a\,b'-b\,a'=0, \qquad a(a'-c')+b(c'-b')=0,$$

$$\therefore \quad a/b=a'/b'=(b'-c')/(a'-c')=(a'+b'-c')/(a'+b'-c').$$

Dacă $a'+b'\neq c'$, atunci rapoartele sunt egale cu 1, deci $a=b$, $a'=b'$ şi termenii sunt simetrici, chestiune examinată. Rămâne dar să luăm:

$$c'=a'+b'. \qquad a/a'=b/b'.$$

De acì, reese că termenii fracţiei au cifrele extreme proporţionale, iar cifra mijlocie a numitorului este suma cifrelor lui extreme. Condiţia este ca această sumă să nu treacă de 9. O primă serie de soluţiuni se poate găsì luând $a=a'$, $b=b'$, $c'=a+b$. Avem astfel soluţiile:

12/132, 13/143, 14/154, 15/165, 16/176, 17/187, 18/198; 23/253, 24/264; 25/275, 26/286, 27/297; 34/374, 35/385, 36/396; 45/495.

Avem acì 16 soluţiuni. Prin răsturnare şi inversare, avem altele; în total $4\times 16=64$ soluţii. E de observat, că toate aceste fracţii sunt egale cu 1/11, căci ele au valoarea:

$$\frac{10\,a+b}{100\,a+10(a+b)+b}=\frac{10\,a+b}{110\,a+11\,b}=\frac{1}{11}.$$

Alte soluţiuni se obţin dacă luăm rapoartele $a/a'=b/b'$ egale cu 1/2, 1/3, 1/4, 2/3 şi 2/4, ca în cazul termenilor de două cifre. Soluţiile le putem deduce de acolo, schimbând numărătorii şi anume

introducând o cifră la mijlocul lor, egală cu suma cifrelor extreme. Găsim soluţiunile:

12/264, 13/286, 12/396.

Dacă mărim fracţiile şi procedăm la fel, mai găsim soluţiile: 24/132, 26/143, 28/154 46/253, 48/264, 68/374, 36/132, 39/143, 69/253, 48/132, 36/264, 39/284.

Avem dar 15 soluţii, care prin răsturnări şi inversări ne dau 60 soluţii în total.

Ne mai rămâne de examinat cazul când numărătorul şi numitorul au trei cifre; avem fracţiile de forma $abc/a'b'c'$. Trebue să avem în acest caz:

$$\frac{100\,a+10\,b+c}{100\,a'+10\,b'+c'}=\frac{100\,c+10\,b+a}{100\,c'+10\,b'+a'}.$$

Gonind numitorii, simplificând şi aranjând, găsim:

$$101\,(ac'-ca')=10\,[(cb'-bc')+(ba'-ab')].$$

Ca şi în cazul precedent, suntem conduşi a scrie:

$$ac'-ca'=10\,n, \qquad (cb'-bc')+(ba'-ab')=101\,n.$$

Se vede şi aci că la a doua egalitate, prima ei parte nu trece peste $2\times9\times9=162$, deci $n<2$. Pentru $n=1$ avem:

$$ac'-ca'=10, \qquad cb'-bc'+ba'-ab'=101.$$

$$ac'-ca'=10, \qquad b'(c-a)+b(a'-c')=101.$$

Dar, cum presupunem $a<c$, avem din prima parte că $c'>a'$. Deci la a doua egalitate, un termen este pozitiv şi altul negativ şi suma lor nu poate atinge 101.

Dacă n ar fi fost negativ, înmulţiam imediat cu (-1) şi procedam în acelaş mod. Rămâne dar că nu putem aveà decât:

$$ac'-ca'=0, \qquad b'(c-a)+b(a'-c')=0.$$

$$a/a'=c/c'=m/n,$$

$$\begin{cases} a=k\,m \\ a'=k\,n \end{cases} \qquad \begin{cases} c=l\,m \\ c'=l\,n. \end{cases}$$

Aceste egalităţi devin :

$$l'\,m\,(l-k)+b\,n\,(k-l)=0,$$

$$(b'\,m-b\,n)\,(l-k)=0,$$

$$b'\,m-b\,n=0 \qquad\qquad l-k=0.$$

$$b/b'=m/n, \qquad\qquad k=l.$$

A doua condiţie ne duce la $a=c$, $a'=c'$, deci la termeni simetrici. Prima ne dă :

$$a/a'=b/b'=c/c'=m/n.$$

De aci, reese că termenii au cifrele corespondente proporţionale. Din acest fapt şi din cele spuse la fracţiile cu termeni de două cifre, rees următoarele soluţiuni ale problemei :

112/224, 113/226, 114/228, 223/446, 224/448, 334/668, 112/336, 113/339, 223/669, 112/448, 224/336, 226/339, 446/669, 336/448, 122/244, 133/266, 144/288, 233/466, 244/488, 344/688, 122/366, 133/399, 233/699, 122/488, 244/366, 266/399, 466/699, 366/488, 123/246, 132/264, 124/248, 142/284, 234/468, 243/486, 123/369, 132/396, 246/369, 264/396.

Avem aci 38 soluţiuni. Prin răsturnare şi inversare, avem în total $4\times38=$**152** soluţii.

Aşa, dar, avem $56+64+60+152=$**332** soluţii cu numere nesimetrice.

Problema admite în total **11894** soluţii.

I. I.

Au dat soluţii cu cifre proporţionale D-nii : N. S. Teodoru, C. E. Georgescu, A. Niculescu, care a extins problema şi la alt sistem de numeraţie, O. Popea, C. Schönfeld, A. Tauber, care a extins problema la grupe de cifre, I. Coşereanu, T. Popa, D. Blumenfeld, C. Ionescu, F. Georgescu, F. Negretzu, E. Ştefănescu, C. I. Georgescu, M. Vasiliu, W. Solomon.

A dat câtevà soluţii de tipul $a\,b/a(a+b)b$ D-l C. E. Georgescu.

PROBLEMA 2949. *Fie* ABC *un triunghiu oarecare,* G *centrul său de greutate şi* O_1 *un punct oarecare din planul său. Se duc cevienele* AA_1, BB_1, CC_1 *corespunzătoare punctului* O_1 *şi prin ficare din vârfurile triunghiului* ABC *se duc paralele cu*

cevienele ce pleacă din celelalte două vârfuri. Aceste paralele se taie două câte două în punctele A_2, B_2, C_2 (BA_2 *şi* CA_2 *sunt respectiv paralele cu* CC_1 *şi* BB_1, *etc.). Să se arate:*

1. *Că dreptele* AA_2, BB_2, CC_2 *sunt concurente. Fie* O_2 *punctul lor de întâlnire;*

2. *Că dreapta* O_1O_2 *trece prin* G;

3. *Că între segmentele* GO_1 *şi* GO_2, *avem* $\overline{GO_1} = 2\,\overline{GO_2}$.

ION FUNDĂŢEANU.

Soluţie dată de D-nii: CONSTANTIN I. GEORGESCU (Elev al Liceului Mihai Viteazul), IULIAN M. NICOLAU (Elev Liceul I. C. Brătianu), A. POPEANU (Constanţa), AL. NICULESCU (Elev cl. VII Liceul Sf. Sava), TIBERIU POPOVICIU (Elev cl. VII Liceul Moise Nicoară, Arad), I. COŞEREANU (Timişoara), MIRON NICULESCU, ADRIAN A. BUŞILĂ (Elev Liceul Mihai Viteazul), TEODOR I. POPA, ERNEST OPRIŞANU (Student, Bucureşti), WILHELM SOLOMON (Elev cl. VI Liceul Matei Basarab), I. M. ŞERBĂNESCU.

1. Figurile BO_1CA_2, CO_1AB_2, AO_1BC_2 sunt paralelograme, căci au prin construcţie laturile opuse paralele. Aceste trei paralelograme ne dau respectiv:

$$BA_2 = CO_1\,, \qquad BO_1 = CA_2$$
$$CB_2 = AO_1\,, \qquad CO_1 = AB_2$$
$$AC_2 = BO_1\,, \qquad AO_1 = BC_2.$$

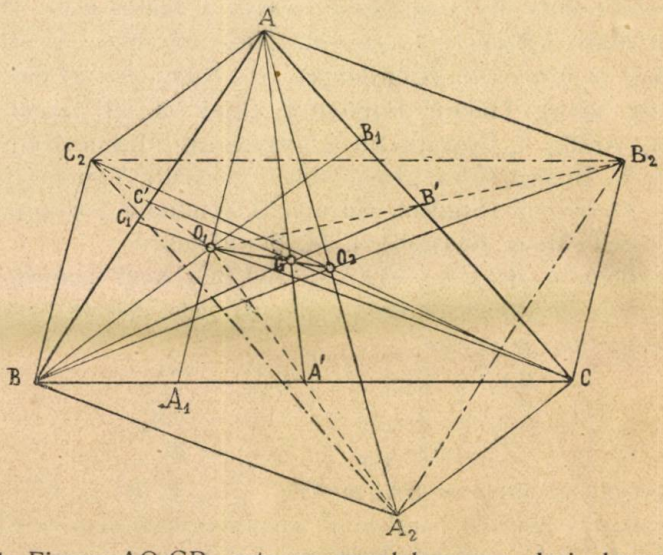
Rezultă că dreptele BA_2 şi AB_2; CB_2 şi BC_2; AC_2 şi CA_2 sunt respectiv egale şi paralele şi că, prin urmare, figurile ABA_2B_2, BCB_2C_2, CAC_2A_2 sunt paralelograme. Dar aceste paralelograme au două câte două câte o diagonală comună. Rezultă de aici, că diagonalele AA_2, BB_2, CC_2 se întretaie într'un acelaş punct O_2, mijlocul fiecărei din ele.

2. Fie A', B', C' picioarele medianelor triunghiului A B C. Figura BO_1CA_2 fiind un paralelogram, diagonalele BC, O_1A_2 se taie în părţi egale în A'. Rezultă de aici, că dreapta AA' este mediană atât în triunghiul ABC, cât şi în triunghiul AO_1A_2. Cu alte cuvinte, triunghiurile ABC, AO_1A_2 au acelaş centru de greutate G, care se află în ambele aceste triunghiuri, pe mediana comună AA' la două treimi din AA' dela vârful A. Dar O_1O_2 este o a doua mediană în triunghiul AA_2O_1; deci punctul G se află pe dreapta O_1O_2, ceeace demonstrează partea a doua a problemei.

3. Dreapta O_1O_2 fiind mediană în triunghiul AO_1A_2, avem $GO_1 = 2\,GO_2$.

Din demonstrația de mai sus, se vede că și triunghiurile BO_1B_2 și CO_1C_2, analoage cu AO_1A_2, au ca centru de greutate tot punctul G.

Soluție dată de D-nii: B. M. Barbălatt (Elev cl. VI Liceul Codreanu, Bârlad), Micu Grünbaum (Bârlad), N. Georgescu-Roegen (Elev cl. VII Liceul Militar Mănăstirea Dealului), Alex. Școdrano (Elev cl. VIII Liceul Durostor.)



1. Figura AO_1CB_2 este un paralelogram; deci dreapta CB_2 este egală și paralelă cu AO_1. De asemenea, figura AO_1BC_2 este prin construcție un paralelogram; deci latura BC_2 este egală și paralelă cu AO_1. Rezultă dar că dreptele BC_2 și CB_2 sunt egale și paralele și că, prin urmare, figura BCB_2C_2 este un paralelogram. Deci latura B_2C_2 este egală și paralelă cu BC.

Analog, putem demonstrà că laturile C_2A_2 și A_2B_2 sunt respectiv egale și paralele cu CA și AB.

Urmează că triunghiurile ABC și $A_2B_2C_2$ sunt homotetice; deci dreptele AA_2, BB_2, CC_2, care unesc vârfurile omoloage, sunt concurente în centrul de homotetie O_2 al acestor două triunghiuri. De altă parte, raportul de homotetie fiind egal cu 1, avem

$$O_2A_2 = O_2A \quad , \quad O_2B_2 = O_2B \quad , \quad O_2C_2 = O_2C.$$

2. Fie A', B', C' mijloacele laturilor BC, CA, AB. Figura CO_1BA_2 fiind un paralelogram, A' este mijlocul diagonalei O_1A_2. Analog putem arătă că B' şi C' sunt mijloacele diagonalelor O_1B_2 şi O_1C_2.

Rezultă de aici că triunghiurile $A_2B_2C_2$ şi A'B'C' sunt homotetice, raportul de homotetie fiind 2 : 1.

Triunghiurile ABC şi A'B'C' sunt de asemenea homotetice, centrul de homotetie fiind G, iar raportul de homotetie 2:1.

Se ştie însă că dacă două sisteme sunt homotetice cu un al treilea, ele sunt homotetice între ele şi că centrele lor de homotetie sunt în linie dreaptă; punctele O_1, G, O_2 sunt deci colineare.

3. In triunghiul AO_1A_2 dreptele AA' şi O_1O_2 sunt mediane; deci $GO_1 = 2\,GO_2$, relaţiune care se mai puteă stabili cu ajutorul rapoartelor de homotetie a figurilor ABC, A'B'C', $A_2B_2C_2$.

Alte soluţii de D-nii Em. Ştefănescu, Mircea Vasiliu, D. Măru şi Eugeniu I. Balan.

Observări. 1. Dacă O_1 este ortocentrul triunghiului ABC, atunci paralelogramele ABA_2B_2 , BCB_2C_2 , CAC_2A_2 devin dreptunghiuri înscrise în cercul ABC, iar O_2 este centrul cercului circumscris lui ABC. Se regăseşte astfel teorema cunoscută: *Ortocentrul, centrul de greutate şi centrul cercului circumscris unui triunghiu ABC sunt în linie dreaptă, iar distanţa* GH = 2GO.

Tiberiu Popoviciu şi N. Georgescu-Roegen.

2. Dacă O_1 este centrul cercului circumscris triunghiului ABC, avem $AO_1 = R$, iar dreapta O_2A' unind mijloacele laturilor A_2A , A_2O_1, este egală cu jumătatea lui AO_1 , adică $O_2A' = \frac{1}{2}R$. Analog găsim că $O_2B' = O_2C' = \frac{1}{2}R$. Deci, în acest caz, O_2 este centrul cercului circumscris lui A'B'C', *adică centrul cercului celor nouă puncte al triunghiului* ABC şi conform problemei, vom aveă $GO_1 = 2\,GO_2$, sau $GO = 2\,G\omega$, notând cu ω centrul cercului celor nouă puncte şi cu O centrul cercului circumscris lui ABC.

Dacă H e ortocentrul, în baza celor stabilite la punctul 1) avem OH = 2GO şi prin urmare

$$\omega O = G\omega + GO = \frac{3}{2}GO = \frac{3}{2} \times \frac{1}{3}OH = \frac{1}{2}OH,$$

adică centrul cercului lui Euler se află la mijlocul dreptei OH. Ţinând seamă de acest rezultat, se deduce uşor că cercul lui Euler trece prin mijloacele segmentelor AH, BH, CH şi apoi prin picioarele înălţimilor. Aceasta se poate considerà ca o nouă demonstraţie a proprietăţei cercului celor nouă puncte.

N. Georgescu-Roegen.

3. Problema, în punctele 2 şi 3, este de fapt o generalizare a proprietăţei dreptei lui EULER, generalizare făcută de D-nul CRISTEA MATEESCU în *Gazeta Matematică*, Vol. XVII, pag. 451, Nota matematică, No. 63.

MIRON NICULESCU.

PROBLEMA 2962. *Fie* A B C *un triunghiu oarecare şi* M, N *intersecţiile laturei* B C *cu dreptele* A M, A N *isogonale în raport cu unghiul* B A C. *Fie* P *intersecţia isogonalei* A N *cu cercul* A B C; Q *şi* R *proiecţiile lui* P *pe laturile* A C *şi* A B. *Se cere să se demonstreze*:

1. *Că produsul* $\overline{AM} \times \overline{QR}$ *reprezintă îndoitul ariei triunghiului* A B C;

2. *Că triunghiurile* M C Q *şi* M B R *sunt echivalente.*

V. CRISTESCU.

Soluţie dată de D-nul B. M. BARBĂLATT (Elev Cl. VI Liceul Codreanu, Bârlad).

1. Fie A_1 şi S picioarele perpendicularelor duse din A şi P pe latura B C şi D intersecţia isogonalei A M cu cercul A B C. Punctele R, S, Q determină dreapta lui SIMSON a punctului P şi se ştie, după o proprietate fundamentală a dreptelor isogonale, că R Q este perpendiculară pe A M. Unghiurile MAA_1, R S B sunt deci egale, ca având laturile perpendiculare. Dar unghiurile R S B, R P B sunt egale că având aceeaşi măsură în cercul P R B S descris pe P B ca diametru. Rezultă atunci că unghiul MAA_1 este egal cu unghiul R P B şi prin urmare triunghiurile dreptunghice MAA_1 şi B P R sunt asemenea. Avem deci:

$$AA_1/AM = PR/PB. \qquad (1)$$

Triunghiurile P R Q, P B C sunt şi ele asemenea. In adevăr $\sphericalangle QPR = \sphericalangle CPB$, ambele fiind suplimentare cu unghiul A. Iar $\sphericalangle PCB = \sphericalangle PAB = \sphericalangle DAC$ dreptele AP, AD fiind isogonale; dar $\sphericalangle DAC = \sphericalangle RQP$, ca având laturile perpendiculare; deci $\sphericalangle PCB = \sphericalangle RQP$. Avem dar din asemănarea triunghiurilor:

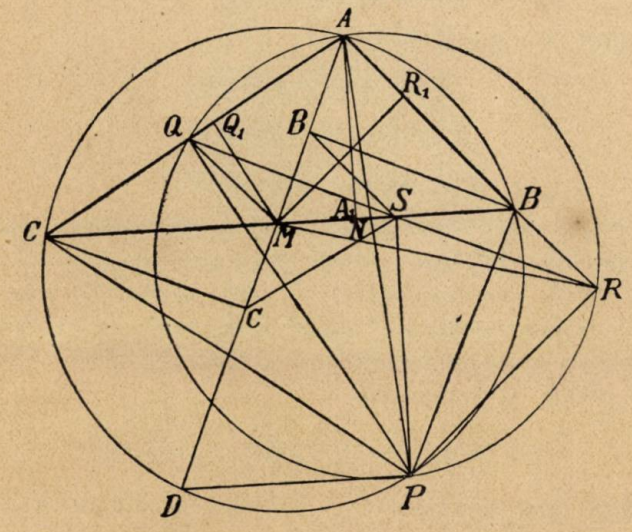
$$QR/BC = PR/PB. \qquad (2)$$

Relaţiunile (1) şi (2) ne dau

$$AA_1/AM = QR/BC, \tag{3}$$

$$\therefore \quad BC.AA_1 = AM.QR. \tag{4}$$

ceeace demonstrează prima parte a problemei, căci produsul $BC.AA_1$ este îndoitul ariei triunghiului ABC.



2. Patrulaterul $AQMR$ având diagonalele sale AM şi QR dreptunghiulare, rezultă imediat că produsul $AM.QR$ reprezintă îndoitul ariei acestui patrulater şi atunci după relaţia (4) urmează că aria triunghiului ABC este echivalentă cu aria patrulaterului $AQMR$. Scăzând atunci de o parte şi de alta partea comună $AQMB$, găsim imediat că ariile MCQ şi MBR sunt echivalente.

Soluţie dată de D-nii: Tiberiu Popoviciu (Elev Cl. VII Liceul Moise Nicoară, Arad), Alexandru Şcodrano (Elev Cl. VIII, Durostor), Ernest Oprişanu, Const. I. Georgescu.

Vom demonstrà întâi partea a doua a problemei.

Fie R_1 şi Q_1 proiecţiile lui M pe laturile AB şi AC. Avem

aria $MCQ = \frac{1}{2}\overline{CQ}.\overline{MQ_1}$, aria $MBR = \frac{1}{2}BR.MR_1$

Se ştie însă, după o proprietate fundamentală a dreptelor

isogonale, că distanțele lui P la laturile unghiului BAC sunt invers proporționale cu acele ale lui M la aceleași laturi, adică

$$MQ_1/MR_1 = PR/PQ. \qquad (1)$$

Triunghiurile dreptunghice CPQ și BPR sunt asemenea, căci $\sphericalangle PCQ = \sphericalangle PBR$ ca având aceeași măsură în cercul ABC ($\frac{1}{2}$ arc. ABP). Deci

$$PR/PQ = BR/CQ. \qquad (2)$$

Relațiile (1) și (2) ne dau

$$MQ_1/MR_1 = BR/CQ$$

$$\therefore \quad CQ.MQ_1 = BR.MR_1$$

$$\therefore \quad \text{aria } MCQ = \text{aria } MBR.$$

Pentru a demonstrà partea întâia a problemei, observăm că aria triunghiului ABC este echivalentă cu aria patrulaterului AQMR, căci aria MCQ este echivalentă cu aria MBR. Dar după o altă proprietate fundamentală a dreptelor isogonale, se știe că dreapta QR este perpendiculară pe AM. Patrulaterul AQMR fiind ortodiagonal, putem scrie deodată

$$\text{aria } ABC = \text{aria } AQMR = \tfrac{1}{2}\overline{AM} \cdot \overline{QR}.$$

Soluție dată de D-nii: Micu Grünbaum și B. M. Barbălatt (Bârlad). Din asemănarea triunghiurilor ABM și APC deducem imediat $\overline{AM} \cdot \overline{AP} = \overline{AB} \cdot \overline{AC}$. (3)

Insă în triunghiul ARQ, e ușor de văzut, că AP este un diametru al cercului circumscris acestui triunghiu. Deci

$$\overline{QR} = \overline{AP} \sin A. \qquad (4)$$

și prin urmare relația (3) devine

$$\overline{AM} \cdot \overline{QR} = \overline{AB} \cdot \overline{AC} \sin A$$

$$\therefore \quad \overline{AM} \cdot \overline{QR} = 2 \text{ aria } ABC.$$

ceeace demonstrează prima parte a problemei.

Pentru partea a doua, demonstrație analoagă cu cea dela soluția precedentă.

Altă soluție de D-l MIRON NICULESCU.

Observație. Fie BB' și CC' perpendicularele scoborâte din vârfurile B și C pe isogonala AM. Dacă observăm că aria triunghiului ABC se compune din ariile triunghiurilor ABM și ACM, atunci se vede imediat că îndoitul ariei triunghiului ABC este echivalent cu produsul

$$\overline{AM}\ (\overline{BB'} + \overline{CC'})$$

și atunci după prima parte a problemei, rezultă că avem

$$\overline{AM} \cdot \overline{QR} = \overline{AM}(\overline{BB'} + \overline{CC'}),$$

$$\therefore \qquad \overline{QR} = \overline{BB'} + \overline{CC'}.$$

V. CRISTESCU.

PROBLEMA 2973. *Să se calculeze suma seriei:*

$$1 + \frac{4}{a} + \frac{9}{a^2} + \frac{16}{a^3} + \frac{25}{a^4} + \ldots.$$

$a > 1$.

N. I. CIORĂNESCU.

1) Această problemă este tratată în „Culegerea de Probleme de Algebră" de A. G. IOACHIMESCU, Cap. XXXI, 23 precum și în „Revista Matematică din Timișoara" anul II, pag. 44.

2) In general, pentru rezolvarea problemelor de această natură, se pornește dela *seria tip:*

$$S = n + n^2 + n^3 + \ldots. \qquad = n/(1-n) \quad , \quad n < 1.$$

Derivând în raport cu n, avem:

$$S' = 1 + 2n + 3n^2 + \ldots. \qquad = 1/(1-n)^2.$$

Inmulțind cu n, avem:

$$S_1 = nS' = n + 2n^2 + 3n^3 + \ldots. = n/(1-n)^2.$$

Și derivând iarăși în raport cu n, obținem:

$$S'_1 = 1 + 4n + 9n^2 + 16n^3 + \ldots. = (1+n)/(1-n)^3.$$

Făcând $n = 1/a$, $a > 1$, avem tocmai seria care face obiectul problemei 2973 și a cărei sumă este:

$$a^2(a+1)/(a-1)^3.$$

1) Au arătat că problema No. 2973 e cunoscută D-nii: A. Tauber, Fl. Georgescu, A. Bușilă, Cristea Goilav, C. Schönfeld, D. Blumenfeld, C. I. Georgescu, I. Teodorescu, V. Ghițescu, Er. Oprișan, Em. Ștefănescu, I. Șerbănescu, T. Dordea, V. Vasilescu, S. Vasilache și C. E. Georgescu.

2) Au rezolvat ca la 2) problema D-nii: I. Șerbănescu, A. Bușilă, C. I. Georgescu, I. Stoenescu, Fl. Georgescu, C. E. Georgescu, B. M. Barbălatt.

3) Au rezolvat pe alte căi problema D-nii: A. Miclescu, Gh. Stancu, M. Grünbaum, I. Dragomir, A. Bușilă, E. Iliescu, L. Focșeneanu, I. Popescu-Văleni, V. Ghițescu, A. Stoenescu, I. Antoniu, C. T. Ionescu, I. Coșereanu.

4) Au rezolvat problema No. 2973, plecând dela seria lui Schömlich (Cours d'Algebre par B. Niewenglowski, tome I, pag. 315), D-nii Er. Oprișan și T. Popa.

5) Au mai găsit că:

$$1^3+\frac{2^3}{a}+\frac{3^3}{a^2}+\frac{4^3}{a^3}+\ldots=\frac{a^2(a^2+4a+1)}{(a-1)^4}$$

D-nii: C. I. Georgescu, Fl. Georgescu și I. Serbănescu.

6) D-l C. I. Georgescu, a mai găsit că:

$$1^4+\frac{2^4}{a}+\frac{3^4}{a^2}+\frac{4^4}{a^3}+\ldots=\frac{a^2(a^3+11a^2+11a+9)}{(a-1)^5},$$

$$1^5+\frac{2^5}{a}+\frac{3^5}{a^2}+\frac{4^5}{a^3}+\ldots=\frac{a^2(a^4+26a^3+66a^2+58a+9)}{(a-1)^6}$$

Lt. I. L.

EXERCIȚII.

16. Se cere un patrat de cinci cifre simetric, cu primele cifre în progresie aritmetică.

N. Tailer.

R. Plecăm dela ultimele cifre, care pot formă un patrat și facem numere în condițiile de mai sus. Nu putem avea decât 12321, 14741, 46864, 98789, 42024, 63036, 65456, 96369, 67876. Dintre acestea, $12321 = 111^2$. Celelalte nu sunt patrate.

17. Cel mai mare comun divizor a două numere este 12, câturile lor prin acesta sunt două numere consecutive, iar suma numerelor mărită cu cel mai mic comun multiplu al lor este divizibilă cu 11. Se cer cele două numere.

C. C. Ionescu.

R. Numerele sunt $12n$ şi $12(n+1)$ şi cel mai mic comun multiplu al lor $12n(n+1)$. Deci $12n+12(n+1)+12(n+1)n = 12(n^2+3n+1) = \mathcal{M}.11$. Dintre numerele 0—10 numai 2 şi 6 fac paranteza $\mathcal{M}.11$. Deci numerele căutate sunt $12(\mathcal{M}.11+2)$ şi $12(\mathcal{M}.11+6)$ sau $\mathcal{M}.132+24$ şi $\mathcal{M}.132+72$.

18. Fie M un punct pe baza B C a unui triunghiu A B C. Dacă R_1 şi R_2 sunt razele cercurilor circumscrise triunghiurilor ABM şi ACM, raportul R_1/R_2 nu depinde de poziţia punctului M pe dreapta B C.

MIRON NICULESCU.

R. Avem într'adevăr:

$$R_1 = \frac{AB \cdot BM \cdot MA}{4 \cdot \text{aria } ABM} \quad \text{şi} \quad R_2 = \frac{AC \cdot CM \cdot MA}{4 \cdot \text{aria } ACM},$$

de unde:

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{BM}{CM} \cdot \frac{\text{aria } ACM}{\text{aria } ABM} = \frac{AB}{AC} = C^t.$$

19. Se dau două cercuri (A) şi (B) de centre respectiv A şi B, care se tae în M. Se consideră toate triunghiurile dreptunghii cu unghiul drept în M şi care au celelalte două vârfuri respectiv pe (A) şi pe (B). Se cere locul geometric al mijlocului ipotenuzei. Soluţie geometrică.

P. SERGESCU.

R. Fie K şi S punctele unde una din laturile unghiului drept tae cercurile (A) şi (B); fie P şi Q punctele în care cealaltă latură a unghiului drept tae respectiv aceleaşi cercuri. Triunghiul dreptunghiu este sau KMQ, sau PMS. Pentru fixarea ideilor, ne mărginim la primul şi fie J mijlocul ipotenuzei KQ. Avem că MK trece prin A, căci $\sphericalangle$ PMK e drept; deasemenea, Q S trece prin B. In triunghiul K S Q, latura K S e paralelă cu dreapta J B, care uneşte mijlocul celorlalte două laturi. De asemenea, A J e paralelă cu PQ. Dar KS şi PQ sunt perpendiculare; deci AJ şi JB sunt perpendiculare între ele. Locul geometric al punctului J e cercul descris pe AB ca diametru.

20. Să se calculeze suma seriei:

$$1 + \frac{6}{a^2} + \frac{15}{a^4} + \frac{28}{a^6} + \ldots + \frac{(n+1)(2n+1)}{a^{2n}} + \ldots$$

unde $a > 1$.

GEORGESCU ER. FLORIAN.

R. Derivăm de două ori ambii membri ai relaţiei:

$$x^2 + x^4 + \ldots + x^{2n+2} + \ldots = \frac{x^2}{1 - x^2}$$

în care $x < 1$ şi facem apoi $x = 1/a$.

21. Să se rezolve ecuaţia:

$$\cos 2x = \cos(a + x).$$

IONESCU C. CORNELIU.

R. Ecuaţia se transformă în:

$$2 \sin \frac{x - a}{2} \sin \frac{3x + a}{2} = 0.$$

22. Să se determine într'un plan dat $P' \alpha P$, un triunghiu isoscel ABC, care să se proecteze pe unul din planele de proecţiune după un triunghiu echilateral de latură dată.

G. A. NICHIFOR.

R. Se va ţine seama de proprietatea liniei de cea mai mare pantă faţă cu planul de proecţiune ales.

PROBLEME PROPUSE.

3001. O faptă se serbează din 360 în 360 zile: Dacă s'a serbat într'un an la 1 Ianuarie, când se va mai serbà tot în ziua de 1 Ianuarie?

I. IONESCU.

3002. Un număr de două cifre are numărul divizorilor patrat perfect, iar altul de două cifre are numărul divizorilor un cub perfect. Scriind al doilea număr după primul, avem un patrat perfect. Care sunt patratele ce se pot obţine în aceste condiţiuni?

T. POPOVICIU.

3003. Fie T' triunghiul podar al triunghiului T', în raport cu un punct oarecare M, iar T'' triunghiul metoarmonic al lui T', în raport cu acelaş punct M. Să se arate că triunghiurile T şi T'' sunt omologice.

T. MAREŞ.

3004. Razele OA şi O'A' a două cercuri fixe fac între ele un unghiu constant. Din un punct fix M de pe OO', se duc paralele la OA şi O'A', care întâlnesc dreptele O'A şi OA' respectiv în N şi N'. Să se demonstreze că al patrulea vârf al paralelogramului MNN'M' se găseşte pe AA' şi să se găsiască locul geometric al punctelor N, N' şi M'.

LOCOT. COL. GH. BUICLIU.

3005. Se construesc 2 cercuri egale, tangente exterior unei elipse date, în extremităţile axei mari. Să se determine pe elipsă un punct P, astfel ca ducând perechile de tangente PM, PM' şi PN, PN' respectiv la cele 2 cercuri, suma triunghiurilor mixtilinii PMM' şi PNN' să fie minimă sau maximă.

V. ALACI.

3006. Să se stabiliască identitatea:

$$a_1\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} + b_1\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = c_1\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

şi să se generalizeze.

N. GEORGESCU-ROEGEN.

3007. Se dă ecuaţia

$$f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + c = 0$$

şi se cere să se determine c astfel ca ecuaţia în y ce se obţine făcând transformarea

$$y = x/(x-1),$$

să fie de gradul al treilea. Să se arate că $f(x) = (x-1)\varphi(x)$ şi să se explice rezultatul. Să se determine apoi b astfel ca ecuaţia $\varphi'(x) = 0$ să admită rădăcini raţionale. Să se discute ecuaţia $f(x) = 0$ în acest caz, a fiind un parametru variabil.

N. ABRAMESCU.

3008. Cât trebue să fie α pentru ca integrala

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\alpha \sin t - t \cos t}{t^3} \right)^3 dt,$$

să aivă sens şi în acest caz, să se calculeze valoarea ei.

TH. ANGHELUŢĂ.

3009. Să se afle unghiurile x cuprinse între $\frac{\pi}{2}$ şi $-\frac{\pi}{2}$, care verifică relaţiunea:

$$\operatorname{tg} x = \sqrt{\frac{\sin 220^0\, 35'\, 48''.\, \cos 138^0\, 40'\, 15''}{\operatorname{tg} 245^0\, 3'\, 20''.\, \operatorname{cotg} 305^0\, 15'\, 40''}}.$$

E. ABASOHN.

3010. Se dă drumul din repaos unei sănii de 0,8 tone greutate pe o coastă de deal acoperită cu zăpadă, dintr'un punct A şi sania se opreşte, din cauza frecării, într'un punct B, astfel că diferenţa de nivel între A şi B este de 125 m.

1) Să se găsiască greutatea cea mai mare de zăpadă ce s'a putut topi între A şi B datorită frecării, temperatura zăpezii fiind 0^0.

2) Dacă în loc de zăpadă, drumul ar fi acoperit cu ghiaţă perfect lucioasă, care este iuţeala cea mai mare, ce ar puteà aveà sania în punctul B?

CR. MATEESCU.

Dela apariția ultimului număr s'au primit spre publicare: articole (A), note (N), cereri (C), exerciții (E), probleme propuse (P), recreațiuni (R) și probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela D-nii *):

Adam M. (2964); *Agopian Gr.* (2975); *Amărăscu G.* (2933); *Antoniu I.* (2938, 72, 74, 75, 87, P.); *Arcadian N.* (2933, 64, 79, 88); *Ballan I. E.* (2964, 66, 68, 84); *Barbălatt M. B.* (2922, 72, 85, 94, 97, E, N, P.); *Bercovici D.* (2964, 79); *Bercovici E.* (2966, 76, 79, 88); *Bienstock O.* (2975); *Blumenfeld D.* (2972, 76, 77, 90); *Bogdan M.* (2922, 88); *Brăileanu A.* (E.); *Brăileanu Tr.* (2933); *Buşilă A.* (2421, 972, 75); *Charaş J.* (2964, 66); *Constantinescu I.* (2918, 64, 66, 75, 88, 90); *Coşereanu I.* (2968, 72, 79, 81, 88); *Dobrescu-Băbici* (2933, 64, 79, 87, 88); *Dordea Tr.* (2722, 964, 72, 90, E); *Drăgănescu S. Em.* (2968, 74, 82, 84); *Dragomir I.* (2972, 75, 79, 87, 88, 90, 97, E); *Dumitrescu M.* (2979); *Epure St.* (2988); *Focşăneanu L.* (2938, 64, 81, 88); *Focşeneanu M.* (2884, 918, 74, 75, 79, 81, 82, 84, 87, 88); *Georgescu E. C.* (2972, 76, 79, 81, 84, 86, 87, 88); *Georgescu I. C.* (2260, 922, 41, 72, 74, 75, 80, 81, P); *Georgescu E. Fl.* (2976, 79, 81, 86, 87, 88, 90, 92, 97, E, N, P, R); *Georgescu M.* (2933); *Ghiţescu V.* (2933, 64, 75, 79, 87, 88, 90); *Gogălniceanu M. M.* (2966, 79, 88); *Goilav Cr.* (2972, 75); *Grünbaum Micu* (2981, 84, 87, 94, P); *Iliescu E.* (2972, 90, R); *Ionescu I. Brezuica* (2966, 79, 87, 88); *Ionescu Carol* (2957, 66, 79); *Ionescu Cornel* (E); *Ionescu L.* (2972); *Ioniţă M. I.* (2979, 87, 88); *Iosipescu N.* (2964, 68, 76); *Katz S.* (2964, 76, 78, P.); *Lăzărescu Elena* (2979, 90, P.); *Marcus I. F.* (2990, E.); *Martinian B.* (2964, 66); *Măru D.* (2975); *Meirovici J.* (2964, 79); *Miclescu A.* (2979, 87, 88. 90, E.); *Michăescu St.* (2510, P.); *Mircea I. A.* (2966); *Mirescu P.* (2987, 88); *Moisil Gr.* (2615, 51, 61, 766, 813, 38, 56, 906, 96, A, P.); *Negreţu Fl.* (2957, 64, 66, 68, 79, P.); *Nicolau I.* (2972); *Nicolescu Sorin* (2933, 87, 88); *Niculescu Al.* (2975); *Niculescu Miron* (2981, 84, A, E, P.); *Oprişanu E.* (2972, 75, 88); *Orănescu O.* (P); *Pamula A.* (2972, 79, 88); *Pană V.* (2964); *Panaitescu G. A.* (2966, 79, 88, 97); *Panaitescu Al.* (2933, 79); *Pinchis M.* (2968, 79); *Popa T.* (2972); *Popea O.* (2965, 66, 76, 77, 79, 81, 88, 90); *Popeanu A.* (2988); *Popescu D. G.* (2849, 923, 46, 68, 81, 84, P.); *Popescu-Văleni I.* (2975); *Popoviciu T.* (2349, 682, 951, 52, 64, 66, 74, 75, 79, 81, 82, 84, 85, 87, 88, 90, 94, 97, E, P.); *Rovinaru C.* (2864, 933); *Russu E.* (2966, 81, 88); *Samoilă D.* (2988, E); *Schileru D.* (2958, 68, 79, 84, 87, 88, 97 E, R.); *Schönfeld C.* (2640, 972, E); *Şcodrano A.* (2683. 922, 33, 93, 97); *Şerbănescu I.* (2864, 918, 72, 74, 75, 81, 82, 84, 97); *Simionescu M.* (2933, 88); *Solacoglu S.* (2976, 79, 88); *Solacolu Şerban* (2979, 88); *Solomon D.* (2964); *Solomon W.* (2951, 57); *Stancu G.* (2972); *Stănescu N.* (2933, 79, 88); *Ştefănescu E.* (2972, 90, 92, 97, 98, E, P); *Stoenescu A.* (2975); *Stoenescu I.* (2939, 66, 75, 79, 88); *Tatler N.* (2933, 66, E); *Tauber A.* (2604, 61, 766, 838, 952, 72, 76, 78, 87, 88, 90, 92, 97, C, E); *Teodorescu St. I.* (2975, 79, 81. 87, 88); *Vasilescu D. M.* (2887, 933, 87, 88, 97); *Vasilescu V.* (2972); *Vasiliu I. A.* (2988); *Vasiliu M.* (2260, 964, 75, 78, 79, 87, 88); *Weiss L.* (2990);

---

*) **Articole, note, cereri, exerciţii şi probleme propuse nu se primesc spre publicare decât dela abonaţii „Gazetei Matematice“.**

Problemele de geometrie rezolvate cât şi cele de propus a căror soluţie nu va fi însoţită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în consideraţiune.

Soluţiunile primite în ultimul timp la problemele: 2191, 227, 318, 77, 81, 83, 86, 458, 61, 552, 53, 75, 85, 86, 94, 98, 604, 15, 91, 745, 73, 92, 807, 25, 49, 79, 95, 903, 10, 13, 20, 29, 31, 32, 39, 60, 71, 73 şi 92 nu au fost încă examinate de redactorii cărora le-au fost repartizate.

Colecțiunea „GAZETEI MATEMATICE“

27 VOLUME

Colecțiunea întreagă . . . . . Lei 1000,—

Se vând și volume izolate, cu prețul de 50 lei, afară de volumele: I, X, XV, XIX, XX și XXI care se vând numai cu colecțiunea întreagă.

Biblioteca „GAZETEI MATEMATICE“

1. **I. Ionescu, G. Țițeica, A. G. Ioachimescu** și **V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Aritmetică, Geometrie, Algebră și Trigonometrie. (520 pag. cu 3381 probleme).* (Epuizată).

2. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de probleme de algebră* (teoria ecuațiilor), (82 pag. cu 462 probleme). (Epuizată).

3. **N. Abramescu,** *Curs de algebră superioară* pentru cl. VIII reală, *Ediția III revăzută și adăogită,* 1921 . . . Lei 30,—

4. **A. G. Ioachimescu** și **G. Țițeica,** *Culegere de probleme de mecanică și geometrie analitică* (222 pag. cu 825 probleme și o planșă) (Epuizată) . . . . . Lei 20,—

5. **Tr. Lalescu** și **Șt. N. Mirea,** *Culegere de probleme de geometrie descriptivă și cosmografie* . . . . . Lei 15,—

6. **Tr. Lalescu,** Tratat de Geometrie analitică,

Fascicola I (Epuizată) . . . . . Lei 10,—

Idem, Fascicola II Conice . . . . . Lei 20,—

Idem, Fascicola III Cuadrice . . . . . Lei 20,—

7. **Gh. Lazăr,** *Trigonometria drept liniară* (după cursul predat de Gh. Lazăr la colegiul Sf. Sava) . . . . . Lei 5,—

8. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de probleme de Algebră,* ediția II-a revăzută și adăogită, 400 pagini cuprinzând 1765 probleme . . . . . Lei 60,—

La aceste prețuri se vor adăogà taxele poștale pentru expediție.

Biblioteca Technică a „GAZETEI MATEMATICE“

(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

I. Ionescu, *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcțiune și a principiilor de calcul.* Volum legat, cuprinzând 128 de pagini și 15 tabele numerice practice, pentru proiectarea construcțiunilor de beton armat. Lei 12,—

Gazeta Matematică apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 50 lei anual, se plătește înainte și începe la 15 Septemvrie, ori când s'ar face achitarea lui în cursul anului și nu se face pe termene mai scurte de un an. Abonamentele, schimbările de adrese, reclamațiunile și cererile pentru cărți din biblioteca «Gazetei Matematică», se vor trimete D-lui: **I. D. Teodor,** Inginer Inspector General, Directorul General al Regiei Monopolurilor Statului (adresa: Fabrica de Chibrituri, București).

Shimburile de reviste, uvrage pentru recenzii și orice alte cereri, afară de cele privitoare la cassierie și expediție, se vor trimite D-lui Inginer Inspector General I. IONESCU, Str. Căluşei 23, București.

GAZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

ANUL XXVIII.

NUMĂRUL 5. — IANUARIE 1923

BIBLIOTECA CENTRALĂ ASOCIAȚIUNII SIBIIU

SUMARUL

1. Sur la cubique de M. Cristea Mateescu et le théorème de Simson . . . . . *Ad. Mineur*
2. Despre formula creşterilor finite . . . . . *G. Bratu*
3. Comparaţie între produsul numerelor prime cu un număr dat şi inferioare lui şi produsul divizorilor acelui număr . . . . . *Lt. I. Linteş*
4. Note Matematice: 24—31.
5. Chestiuni de examen.
6. Bibliografie.
7. Probleme rezolvate: 2254, 2581, 2603, 2781, 2884, 2958, 2968, 2975, 2984, 2988.
8. Exerciţii: 23—30.
9. Probleme propuse: 3011 — 3020.

ABONAMENTUL 50 LEI PE AN.

BUCUREŞTI

IMPRIMERIA FABRICILOR DE CHIBRITURI ŞI TIMBRE - FILARET

1923

SPRE ŞTIINŢA

Gazeta Matematică se publică de către **Societatea „Gazeta Matematică“** având sediul în Bucureşti, compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie de 3 membri, care pentru anul XXVIII se compune din D-nii **N. I. Georgescu,** Inginer-Şef, **Tr. Lalescu,** Doctor în Matematici, Profesor Universitar şi **I. D. Teodor,** Cassier, Inginer Inspector General, Profesor la Şcoala Politechnică, Directorul General al Regiei Monopolurilor Statului.

Manuscrisele destinate „Gazetei Matematice“ se vor trimite D-lui GEORGE BORNEANU, Inginer, sub-directorul Fabricilor de chibrituri şi timbre, Bucureşti.

Se pot trimite şi pe acelaş nume în Str. Sf. Constantin 31, Bucureşti.

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse şi exerciţiile se vor redijà în conformitate cu instrucţiunile se se pot procurà dela D-l Cassier *I. D. Teodor,* în schimbul sumei de 1 (un) leu ce se poate trimite prin poştă.

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evità confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie.

In vederea sporirii taxelor poştale, corespondenţii pot trimete de aci înainte manuscrisele scrise pe ambele pagini ale unei foi, fără a lăsà spaţii albe pe margini sau dedesubt, tăind foile în consecinţă.

Nu se admite însă a se tratà pe aceeaşi foaie mai multe chestiuni sau probleme.

Articolele, notele, problemele propuse, exerciţiile, recreaţiile ce se trimit pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICĂ“, trebue să fie originale, iar nu luate din cărţi sau reviste speciale de matematici.

Probleme nerezolvate: 171, 485, 581, 691, 886, 87, 914, 44, 1000, 08, 40, 56, 58, 83, 92, 146, 62, 78, 80, 214, 36, 70, 71, 87, 97, 99, 355, 64, 67, 77, 79, 84, 86, 98, 99, 412, 50, 82, 90, 553, 84, 87, 626, 37, 50, 76, 79, 80, 711, 29, 33, 35, 53, 64, 90, 835, 76, 82, 84, 905, 06, 14, 29, 44, 45, 49, 59, 73, 79, 87, 2003, 04, 16, 17, 32, 70, 74, 94, 111, 12, 26, 56, 70, 216, 300, 47, 53, 91, 92, 95, 408, 14, 20, 22, 28, 29, 30, 31, 34, 39, 40, 43, 44, 48, 53, 56, 58, 59, 60, 61, 62, 66, 69, 71, 73, 77, 79, 81, 84, 87, 91, 92, 97, 500, 01, 02, 03, 10, 11, 12, 24, 29, 32, 37, 38, 39, 43, 44, 45, 46, 53, 55, 56, 60, 66, 69, 71, 75, 77, 78, 80, 81, 82, 87, 91, 93, 96, 97, 98, 99, 602, 03, 07, 08, 10, 13, 23, 35, 38, 39, 41, 43, 44, 45, 47, 50, 55, 56, 58, 60, 65, 69, 71, 75, 84, 86, 92, 93, 94, 95, 96, 705, 09, 12, 13, 17, 26, 27, 28, 34, 35, 38, 43, 45, 47, 52, 58, 59, 60, 64 69, 78, 80, 81, 89, 96, 809, 14, 16, 21, 27, 29, 41, 51, 52, 53, 57, 60, 65, 74, 86, 88, 89, 98, 902, 09, 12, 15, 16, 20, 26, 29, 30, 32, 36, 37, 44, 45, 50, 53, 55, 56, 59, 60, 61, 69, 83, 91, 92, 95, 99, 3000, 01, 05, 07, 08, 10.

La redacţia revistei **„Gazeta Matematică“** *se primesc abonamente pentru* **„Revista de matematicas y fisicas elementales“** *din Buenos-Aires. Costul unui abonament anual este de 40 lei.*

GAZETA MATEMATICA

Anul XXVIII *SUPLIMENT* No. 5.

RECREAŢIUNI.

1. Numere concrete, numere abstracte.

Nu trebuiesc confundate numerele concrete cu numerele abstracte, căci se poate ajunge şi la bătae. Un copil începuse să înveţe în clasele primare scăderea. Fiind acasă într'o zi, mama lui îl trimete să întrebe pe tatăl lui cât este ceasul, pentru ca să ştie dacă să pună masa. Tatăl îi spune că este 11 fără 10. Băiatul îşi închipuì că tatăl său i-a pus o problemă de scădere, şi se duce de spune mamei sale diferenţa 1, iar acesta ia la bătaie pe servitoare, că a întârziat cu punerea mesei.

D. MĂRU.

* * *

2. Inmulţire complicată.

Puneţi cuivà repede următoarele două întrebări:

1) Câte degete sunt la două mâini?

2) Dar la 10 mâini?

La prima veţi aveà totdeauna rezultatul exact, la a doua răspunsul este foarte des 100, în loc de 50.

N. I. C.

* * *

3. Curiosităţi Aritmetice.

Numerele 12; 112; 1112; 11112; 111112; 1111112; 13; 113; 1113, 11113 se bucură de următoarele proprietăţi:

1) Pătratul lor este răsturnatul pătratului răsturnatului lor. De exemplu $113^2 = 12769$; $311^2 = 96721$.

2) Pătratul sumei cifrelor lor este suma cifrelor pătratului lor. De exemplu $(1+1+3)^2 = 9+6+7+2+1$.

G. I. DUMITRESCU.

* * *

4. Jumătăţi neegale.

In romanul *Zadic*, *Voltaire* scrie:

„.... partager les revenus du roi en deux moitiés, inégales, dont la plus petite revenait à Sa Majesté, et la plus grande aux administrateurs".

I. I.

* * *

5. Rădăcină pătrăcină.

Aceasta nu are nimic a face cu rădăcina pătrată. Ea se găseşte în popor prin ghicitori. Astfel în Cimilituri de G. Pascu 1909, găsim ghicitoarea:

«Rădăcină pătrăcină rar voinic care o dăighină». Rezultatul este *«cartea».*

I. I.

* * *

6. Rezolvare logică a problemei 2964.

Pentru rezolvarea acestei probleme, nu e nevoie de cunoştinţa matematicilor, ci numai de logică. Problema 2964 este *prima problemă* a *primului număr* din anul curent al *Gazetei Matematice* şi are ca propunător pe D-l Maior G. I. Liteanu. Să trecem înapoi cu un an şi vedem că problema 2855 e *prima problemă* a *primului număr* din anul trecut al *Gazetei Matematice* şi are ca propunător tot pe D-l Maior G. I. Liteanu. Aceasta problemă apărută în 1921 a avut ca soluţie numărul 1921, deci şi problema 2964, propusă în condiţiuni absolut analoage, însă în 1922, nu poate să aivă de cât soluţia 1922, c. c. e. d. d.

I. Coşereanu.

* * *

7. Formula dinţilor!

In manualul de anatomie al D-lui Grădinescu, găsim că „Formula dentară la copii" este:

$$I\,\frac{4}{4}\,C\,\frac{2}{2}\,Pm\,\frac{4}{4} = \frac{10}{10} = 20.$$

Ce matematician ar puteà să descurce această formulă, în care $1 = 20$ şi $I\,C\,Pm = 1$?

D. Măru.

* * *

8. Regula de asociaţie.

Un vechiu şi harnic corespondent al *Gazetei Matematice*, în primul ei sfert de veac, ne trimesese: *«Pentru note, recreaţii.... sau pentru coş»* următoarele rânduri, cărora nu le am dat atunci nici una din acele trei destinaţiuni dorite de dânsul.

„Asupra regulei de asociaţie". Când în problema repartizării câştigului „într'o asociaţie intră capitaluri care au servit întreprinderii în timpuri diferite, „se procedează împărţindu-se câştigul proporţional cu produsul capitalului „prin timpul cât a stat. Acesta însă nu este just, după cum voiu arătà. In „adevăr, câştigul raportat C' trebuie să fie direct proporţional cu capitalul „depus C, aşa că $C'/C = \text{const.}$ Câştigul trebuie să fie încă direct propor- „ţional cu timpul cât s'a utilizat capitalul, aşa că $C'/t = \text{const}$; rezultă că $C'^2/C.t = \text{const}$, sau $C'/\sqrt{C.t} = \text{const.}$ adică împărţirea să se facă *proporţional „cu media geometrică a capitalului şi a timpului, şi nu cu produsul lor.* Aşà fiind, „regula de asociaţie în uz e numai convenţională, dar nu este însăşi expri-

„marea adevărului matematic. Exemplu: avem trei capitaluri: 400, 100, 500 „lei care stau respectiv 1, 9, 5 ani. După regula comună vom avea:

$$\frac{x}{400} = \frac{y}{900} = \frac{z}{2500} = \frac{190}{3800},$$

„presupunând că beneficiul total ar fi de 190 lei. Rezultă $x = 20$, $y = 45$ „$z = 125$. După regula dreptății ar fi:

$$\frac{x}{20} = \frac{y}{30} = \frac{z}{50} = \frac{190}{100},$$

„de unde $x = 38$, $y = 57$, $z = 90$. Cum se vede, această regulă favorizează „capitalurile mici, așa că aplicarea ei ar fi o adevărată revoluție economică".

Liceanul care ne-a trimes aceste rânduri se zice că azi ar fi director de bancă. Ar fi interesant de știut după care din cele două reguli distribuie beneficiile acționarilor? Metoda nu corespunde echității matematice căci este destul a presupune că timpul este același și anume un an, căci atunci veniturile s'ar împărți proporțional cu rădăcinile patrate ale capitalelor ce stau același timp, iar nu cu ele însăși, cum de altfel presupune și autorul nouei metode. Insă se poate ca echitatea socială să ceară alte reguli decât echitatea matematică și de aceea am ținut nepublicată metoda, până ce nu am puteà vedeà ce cere echitatea socială!

I. I.

* * *

9. Cum se învață derivatele în liceu.

O ceartă amicală între doi liceeni a dus la următorul dialog:

— „Am să te derivez până ce te voiu anulà!

— „Imi dai voie să mă prezint?

— „Da.

— „Eu sunt e^x".

F. Georgescu.

* * *

10. Toate numerele sunt egale cu zero.

Dacă a este oarecare, avem

$$\cos\pi + a\sin\pi = -1,$$

$$\therefore \quad 1 - \cos\pi + a\sin\pi = 0,$$

$$\therefore \quad 2\cos^2\tfrac{1}{2}\pi + 2a\sin\tfrac{1}{2}\pi\cos\tfrac{1}{2}\pi = 0.$$

Impărțim cu $2\cos\frac{1}{2}\pi$ și rămâne

$$\cos\tfrac{1}{2}\pi + a\sin\tfrac{1}{2}\pi = 0,$$

$$a\sin\tfrac{1}{2}\pi = 0,$$

și cum $\sin\frac{1}{2}\pi = 1$, rămâne $a = 0$.

D. Schileru.

* * *

11. Rezolvarea problemelor politice.

Intr'un ziar din Bucureşti s'au publicat următoarele:

„Ministrul a terminat spunând că are speranţa că printr'o politică leală de pace şi de demnitate naţională, guvernul va puteà să asigure o soluţie satisfăcătoare problemelor actuale“,

Ce n'ar da corespondenţii Gazetei Matematice să rezolve în asemenea mod problemele propuse în această revistă!

G. Zamfirescu.

* * *

12. O limită.

Iată un mijloc simplu de a găsi limita lui x^x pentru $x = 0$. Avem;

$$y = x^x.$$

Luăm logaritmii în sistemul cu bază x şi avem:

$$\log y = x \log x = x$$

$$\lim_{x=0} \log y = \lim_{x=0} x = 0.$$

Deci lim. $y = 1$.

C. E. Georgescu.

13. Matematicianí orbi.

In *Revue catholique des Revues françaises et étrangères* din 5 Mai 1896, se găseşte scris următoarele:

„Se citează orbi cari au fost, ca şi Penjon, laureaţi la Concursul general şi cari au ocupat ei insişi, în licee, o catedră de matematici“.

Penjon erà orb din naştere, a fost în 1810 profesor de matematici în liceul din Anvers şi a inventat o maşină de calcul. Le *Magasin pittoresque* din 1841 spune despre dânsul:

„Spectacolul singular şi mişcător al unui profesor orb, care posedă ştiinţele exacte cu succes, a fost reînnoit în zilele noastre de Berard, la colegiul Briançon şi de Penjon la colegiul din Anvers. E adevărat că primul a pierdut vederea la 23 ani,..., Penjon, orb din naştere, a tratat acelaş subiect cu mai multe desvoltări în *Annales des mathématiques, III 1812*“.

Mai sunt şi alţii, dar despre ei altă dată.

I. I.

* * *

14. Ciocnire de trenuri.

Un tren pleacă din Bucureşti cu 40 km. pe oră şi altul din Constanţa cu 60 km. pe oră, în acelaş timp. Ele se întâlnesc pe aceleaşi linii şi se ciocnesc de nu se mai deosibesc unul de altul. Care e mai aproape de Feteşti? Distanţele între Staţii se găsesc în „Mersul trenurilor“.

S. N.

11. Rezolvarea problemelor politice.

Intr'un ziar din Bucureşti s'au publicat următoarele:

„Ministrul a terminat spunând că are speranţa că printr'o politică leală de pace şi de demnitate naţională, guvernul va puteà să asigure o soluţie satisfăcătoare problemelor actuale“,

Ce n'ar da corespondenţii Gazetei Matematice să rezolve în asemenea mod problemele propuse în această revistă!

G. Zamfirescu.

* * *

12. O limită.

Iată un mijloc simplu de a găsi limita lui x^x pentru $x = 0$. Avem;

$$y = x^x.$$

Luăm logaritmii în sistemul cu bază x şi avem:

$$\log y = x \log x = x$$

$$\lim_{x=0} \log y = \lim_{x=0} x = 0.$$

Deci lim. $y = 1$.

C. E. Georgescu.

13. Matematicianí orbi.

In *Revue catholique des Revues françaises et étrangères* din 5 Mai 1896, se găseşte scris următoarele:

„Se citează orbi cari au fost, ca şi Penjon, laureaţi la Concursul general şi cari au ocupat ei insişi, în licee, o catedră de matematici“.

Penjon erà orb din naştere, a fost în 1810 profesor de matematici în liceul din Anvers şi a inventat o maşină de calcul. Le *Magasin pittoresque* din 1841 spune despre dânsul:

„Spectacolul singular şi mişcător al unui profesor orb, care posedă ştiinţele exacte cu succes, a fost reînnoit în zilele noastre de Berard, la colegiul Briançon şi de Penjon la colegiul din Anvers. E adevărat că primul a pierdut vederea la 23 ani,..., Penjon, orb din naştere, a tratat acelaş subiect cu mai multe desvoltări în *Annales des mathématiques, III 1812*“.

Mai sunt şi alţii, dar despre ei altă dată.

I. I.

* * *

14. Ciocnire de trenuri.

Un tren pleacă din Bucureşti cu 40 km. pe oră şi altul din Constanţa cu 60 km. pe oră, în acelaş timp. Ele se întâlnesc pe aceleaşi linii şi se ciocnesc de nu se mai deosibesc unul de altul. Care e mai aproape de Feteşti? Distanţele între Staţii se găsesc în „Mersul trenurilor“.

S. N.

SUR LA CUBIQUE DE M. CRISTEA MATEESCU ET LE THÉORÈME DE SIMSON*).

I. *La cubique* (S). 1° Les points α, β, γ sont des points du lieu du point S. (*Gazeta Matematică*, XXVIIi, Octomvrie 1922, p. 43). En effet, si b', c' sont les points où les droites $\alpha\beta$, $\alpha\gamma$ coupent les droites CA, AB, il y a un point a' de la droite BC et il n'y en a qu'un seul pour lequel l'aire du triangle $a'b'c'$ a une valeur donnée k (en grandeur et en signe).

2° Une droite quelconque x issue de α contient encore deux autres points du lieu. Quand un point S glisse sur la droite x, les points b, c engendrent des ponctuelles projectives sur CA et AB. Mais, à toute position du point b sur CA, correspond un seul point c_1 sur AB, pour lequel l'aire du triangle $a\,b\,c_1$ est égale à k et les points b, c_1 engendrent donc aussi des ponctuelles projectives sur CA et AB. Dès lors, les points du lieu, differents de α, situés sur x sont les points où cette droite est rencontrée par celles qui joignent le point γ aux points doubles des ponctuelles projectives engendrées par les points c, c_1 sur AB.

3° Conclusion. Le lieu du point S est une cubique (S) passant par les points α, β, γ.

4° Cas où $k = 0$. Dans ce cas particulier, la cubique (S) passe en outre par les points A, B, C.

5° Cas où k étant nul, les points α, β, γ sont sur une même droite d. Tout point de cette droite est évidemment un point de la cubique (S) et celle—ci est donc formée de la droite d et d'une conique Γ circonscrite au triangle ABC.

II. *Propriétés de la conique* Γ. 1° La conique Γ passe par les points A', B', C' où se coupent les droites $B\gamma$ et $C\beta$, $C\alpha$ et $A\gamma$, $A\beta$ et $B\alpha$.

2° Si α', β', γ' sont les points d'intersection de la droite d avec les droites BC, CA, AB, les points où la droite d coupe la conique Γ sont les points doubles des ponctuelles projectives $(\alpha\beta\gamma) \bar{\wedge} (\alpha'\beta'\gamma')$, $(ABC) \bar{\wedge} (A'B'C')$ placées sur la droite d et la conique Γ.

---

*) Voir *Gazeta Matematica*, Vol. XXVIII, p. 43—45.

La propriété des points S de la conique Γ est donc réciproque et il en résulte que la généralisation du théorème de SIMSON obtenue de cette manière ne diffère pas de celle, trouvée antérieurement par M. CL. SERVAIS, à laquelle il est fait allusion dans la note placée au bas de la page 55 de MATHESIS, Février 1922.

3° Si S est un point quelconque de la conique Γ et si A″, B″, C″ sont les points où celle—ci rencontre les droites Sα, Sβ, Sγ, les droites AA″, BB″, CC″ se coupent sur *d*; les tangentes à Γ en A et A″, B et B″, C et C″ se coupent en des points situés sur une droite passant par le pôle D de *d* pour Γ.

AD. MINEUR.

DESPRE FORMULA CREŞTERILOR FINITE.

I. Se ştie că, dacă $f(x)$ este o funcţie continuă şi derivabilă în intervalul x, $x+h$, avem

$$f(x+h)-f(x)=hf'(x+\theta h), \tag{1}$$

unde θ este un număr real cuprins între 0 şi 1. Valoarea lui depinde de x şi de h. Avem dar în general

$$\theta=\varphi(x, h).$$

De exemplu, pentru $f(x)=\log(1+x)$,
găsim

$$\log[1+h/(1+x)]=h/(1+x+\theta h),$$

de unde, punând $u=h/(1+x)$, avem

$$\theta=1/\log(1+u)+1/u.$$

D. RUDOLF ROTHE [1]) studiind cazurile particulare pentru θ, a ajuns la rezultatele următoare:

1. θ pentru $f(x)=ax+b$ este nedeterminat.
2. θ pentru $f(x)$ este acelaş ca pentru $\alpha f(x)+\beta x+\gamma$.
3. θ este constant numai pentru $f(x)=x^2$ (parabolă) şi atunci $\theta=\frac{1}{2}$.

[1]) *Zum Mittelwertsatze der Differentialrechnung*, Mathematische Zeitschrift, 9. B, 1921, p. 300.

4. $\theta = \varphi(h)$ numai pentru $f(x) = e^x$ (exponențială) și atunci

$$\theta = \frac{1}{h} \log \frac{e^h - 1}{h}.$$

5. $\theta = \varphi(x)$ nu poate fi pentru nici o funcțiune $f(x)$.

II. Noi vom considerà *formula lui* TAYLOR

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \ldots$$
$$\ldots + \frac{h^p}{p!} f^{(p)}(x) + \frac{h^{p+1}}{(p+1)!} f^{(p+1)}(x + \theta h), \tag{2}$$

care generalizează formula creșterilor finite și vom lua

$$f(x) = P(x) = A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \ldots + A_n.$$

Formula (2) pentru $p = n-1$ și $p = n$, ne dă succesiv :

$$P(x+h) = P(x) + hP'(x) + \ldots$$
$$\ldots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} P^{(n-1)}(x + \theta h), \qquad 0 < \theta < 1 \tag{3}$$

$$P(x+h) = P(x) + hP'(x) + \ldots$$
$$\ldots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} P^{(n-1)}(x) + \frac{h^n}{n!} P^{(n)}(x), \tag{4}$$

fiindcă $P^{(n)}(x) = n! . A_0$ este o constantă.

De aci, deducem

$$P^{(n-1)}(x + \theta h) = P^{(n-1)}(x) + \frac{h}{n} P^{(n)}(x)$$

și, după formula creșterilor finite,

$$P^{(n-1)}(x + \theta h) = P^{(n-1)}(x) + \theta h P^{(n)}(x).$$

Cum $P^{(n)}(x) \neq 0$, rezultă prin scădere $h/n - \theta h = 0$. *Deci în formula* (3), *avem* $\theta = 1/n$.

Pentru $n = 2$ regăsim, în formula creșterilor finite, $\theta = \frac{1}{2}$.

III. Pentru $p = n-2$ formula (1) devine :

$$P(x+h) = P(x) + hP'(x) + \ldots$$
$$\ldots + \frac{h^{n-2}}{(n-2)!} P^{(n-2)}(x + \theta h), \tag{5}$$

care comparată cu (4), ne dă :

$$P^{(n-1)}(x + \theta h) = P^{(n-2)}(x) + \frac{h}{n-1} P^{(n-1)}(x) + \frac{h^2}{n(n-1)} P^{(n)}(x),$$

sau încă

$$P^{(n-2)}(x)+\theta h P^{(n-1)}(x)+\frac{\theta^2 h^2}{1.2}P^{(n)}(x)=P^{(n-2)}(x)+\frac{h}{n-1}P^{(n-1)}(x)$$

$$+\frac{h^2}{n(n-1)}P^{(n)}(x),$$

de unde

$$(6)\qquad \left(\theta-\frac{1}{n-1}\right)P^{(n-1)}(x)+\frac{h}{2}\left(\theta^2-\frac{2}{n(n-1)}\right)P^{(n)}(x)=0.$$

Să însemnăm cu $F(\theta)$ primul membru al acestei ecuații și fie

$$\theta_1=\frac{1}{n-1}\quad,\quad \theta_2=\sqrt{\frac{2}{n(n-1)}}.$$

Se vede ușor că, pentru $n>2$, $F(\theta_1)$ și $F(\theta_2)$ au respectiv semnele expresiunilor $-hP^{(n)}(x)$ și $P^{(n-1)}(x)$. Pe de altă parte, dacă α este rădăcina binomului $P^{(n-1)}(x)$, se știe că pentru $x<\alpha$, avem $P^{(n)}(x)P^{(n-1)}(x)<0$ și pentru $x>\alpha$, avem $P^{(n)}(x)P^{(n-1)}(x)>0$.

Prin urmare,

pentru $x>\alpha$ și $\begin{cases} h>0 & \text{avem} \quad F(\theta_1)F(\theta_2)<0 \\ h<0 & \text{„} \quad F(\theta_1)F(\theta_2)>0 \end{cases}$

pentru $x<\alpha$ și $\begin{cases} h>0 & \text{„} \quad F(\theta_1)F(\theta_2)>0 \\ h<0 & \text{„} \quad F(\theta_1)F(\theta_2)<0. \end{cases}$

Rezultă dar, că în formula (5), pentru $x>\alpha$, luând $h>0$ și pentru $x<\alpha$, luând $h<0$, avem în ambele cazuri

$$(7)\qquad \frac{1}{n-1}<\theta<\sqrt{\frac{2}{n(n-1)}}.$$

Pentru $n=3$, aceste valori sunt $\frac{1}{2}$ și $1/\sqrt{3}$. Deci, dacă $P(x)$ este un polinom de grad 3 și dacă α este rădăcina binomului $P''(x)$, luând formula creșterilor finite pentru $a>\alpha$,

$$P(a+h)=P(a)+hP'(a+\theta h)$$

și pentru $b<\alpha$,

$$P(b-h)=P(b)-hP'(b-\theta h),$$

avem în ambele cazuri

$$(8)\qquad \tfrac{1}{2}<\theta<1/\sqrt{3}\quad \text{sau}\quad 0,5<\theta<0,578.$$

IV. *Formula creşterilor finite pentru un polinom de grad n.* Avem egalitatea

$$(9) \qquad P(x+h)-P(x)=hP'(x+\theta h)$$

$$=h\left[P'(x)+\theta hP''(x)+\ldots+\frac{(\theta h)^{n-1}}{(n-1)!}P^{(n)}(x)\right],$$

care comparată cu (4) ne dă ecuaţia în θ:

$$(10) \qquad \left(\theta-\frac{1}{2}\right)P''(x)+\left(\theta^2-\frac{1}{3}\right)\frac{h}{2}P'''(x)+\ldots$$

$$\ldots+\left(\theta^{n-1}-\frac{1}{n}\right)\frac{h^{n-2}}{(n-1)!}P^{(n)}(x)=0.$$

Să considerăm şirul rădăcinilor reale şi pozitive

$$(11) \qquad 1/2\ ,\ 1/\sqrt{3}\ ,\ 1/\sqrt[3]{4}\ ,\ \ldots\ ,\ 1/\sqrt[n-1]{n}$$

ale binoamelor din paranteze. *Acest şir e crescător.*

In adevăr, funcţiunea $y=n^{\frac{1}{n-1}}$ ne dă

$$y'=\frac{1}{(n-1)^2}\cdot n^{\frac{1}{n-1}}\left[\frac{n-1}{n}-\log n\right]$$

şi pentru n întreg >2 (deci $n>e$) avem $y'<0$; y descreşte, iar $1/\sqrt[n-1]{n}$ creşte cu n.

Să însemnăm cu $F(\theta)$ primul membru al ecuaţiei (10).

Dacă şirul

$$(12) \qquad P''(x)\ ,\ P'''(x)\ ,\ \ldots\ ,\ P^{(n)}(x)$$

are numai permanenţe şi h e pozitiv, sau dacă acest şir are numai variaţii şi h e negativ, avem

$$F\left(\tfrac{1}{2}\right).F\left(1/\sqrt[n-1]{n}\right)<0;$$

prin urmare θ *din formula creşterilor finite satisface neegalitatea*

$$\tfrac{1}{2}<\theta<1/\sqrt[n-1]{n}.$$

De exemplu, pentru $n=4$, avem $0,5<\theta<0,63$.

V. Propoziţia se generalizează pentru seriile întregi cu toţi termenii pozitivi. De exemplu, pentru $x>0$,

$$e^x=1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1.2}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots$$

are, în formula creşterilor finite,

$$\frac{1}{2} < \theta < 1, \tag{13}$$

ceeace se poate verifică şi direct.

Cum, pentru e^x, θ nu depinde de x, neegalitatea (13) are loc oricare ar fi x.

G. Bratu.
Profesor la Universitatea din Cluj.

COMPARAŢIUNE ÎNTRE PRODUSUL NUMERELOR PRIME CU UN NUMAR DAT ŞI INFERIOARE LUI ŞI PRODUSUL DIVIZORILOR ACELUI NUMĂR.

Fie P (N) produsul divizorilor unui număr şi Π (N) produsul numerelor inferioare lui N şi prime cu el. Zicem că nu putem aveà P (N) = Π (N). Se ştie că

$$P(N) = N^{\frac{n(N)}{2}},$$

în care n (N) este numărul divizorilor lui N. De aci, reese că P (N) $= \mathscr{M}$ N. Avem apoi (Fitz Patrick, Exercises d'arithmetique):

$$[\Pi(N)]^2 - 1 = \mathscr{M} N;$$

deci Π (N) este prim cu N. Deci nu putem aveà Π (N) = P (N).

Să considerăm acum şirurile:

$$1) \quad \begin{cases} 2 \leqslant a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < \ldots < a_m \\ 2 \leqslant b_1 < b_2 < b_3 < b_4 < \ldots < b_n \end{cases} \qquad (n < m).$$

Zicem că dacă

$$\sum_1^m a_i > \sum_1^n b_i \quad , \quad \text{avem şi} \quad \prod_1^m a_i > \prod_1^n b_i .$$

Lucrul este evident dacă, în general, fiecare număr din şirul al doilea este mai mic decât unul din şirul întâiu.

Este evident de asemenea, că ne punem în condiţiuni mai defavorabile, dacă mărim Σb_i până ce rămâne cu 1 sub Σa_i, căci numerele b_i cresc, în total sau în parte, şi măresc produsul Π_i. De asemenea, Πb_i creşte, dacă luăm n cât mai aproape de m, căci dacă în loc de b, luăm numerele c şi $(b-c)$, suma nu se schimbă, dar pro-

dusul $c\,(b-c) > b$, dacă $b\,(c-1) > c^2$, sau $b > c + 1 + 1/(c-1)$, adică c diferă cu mai mult decât 1 de b.

Am ajuns dar la concluzia să examinăm numai cazul când în (1), primul şir are numai un termen mai mare ca al doilea şi pentru ca $\Pi\, a_i$ să fie cât mai mic, vom lua $a_1 = 1$; astfel sumele $\Sigma\, a_i$ şi $\Sigma\, b_i$ diferă cu 1 şi prin urmare, putem lua $b_1 = a_2$, $b_2 = a_3$,.., $b_{n-1} = a_m$ şi $b_n = a_m + 1$, pentru a mări pe $\Pi\, b_i$. Dacă punem:

$$p = a_2\, b_2 \ldots . a_m .\ 1,$$

avem:

$$\Pi\, a_i = 2\, p\, a_m \quad , \quad \Pi\, b_i = p\,(a_m + 2),$$

în cazul cel mai defavorabil.

Avem însă $2\, a_m > a_m + 1$, deci $\Pi\, a_i > \Pi\, b_i$.

Trecem acum la rezolvarea problemei ce ne-am propus. Am arătat în articolul publicat la paginile 125 — 128, că, în general $m > n$, adică I (N) $>$ n (N) şi că σ (N) $>$ S (N) deci, în general, Π (N) $>$ P (N).

Am găsit excepţiuni pentru numerele 1, 2, 3, 4, 6, 8, 10, 12, 15, 24 şi 30.

Pentru acestea, trebuesc făcute verificări directe. Găsim că Π (N) $<$ P (N), numai atunci când N = 2, 3, 4, 6 şi 12 şi Π (N) = P(N) pentru N = 1.

Mai avem de adăogat că în şirurile (1) nu intră divizorul 1 şi numărul 1, ca prim cu N şi inferior lui, pe când el intră în I (N), σ (N), S (N).

E încă de observat că schimbându-l pe 1, nu se schimbă sensul neegalităţilor dintre I (N) şi n (N), sau σ (N) şi S (N), aşa că demonstraţia rămâne valabilă.

Lt. I. Lintes.

NOTE MATEMATICE.

24. *Alte zece aritmetici diverse.* (Vezi *Gazeta Matematică*, Vol. XXVII, Nota 40 pag. 425).

31. **Binară.** *Brander.*—Arithmetica binaria. Augsburg 1775.
32. **Ecuaţională.** *Hipsley.* — Ecuational arithmetic. 1852.
33. **Fisică.** *A. Macfarlane.* — Physical arithmetic. 1885.
34. **Fracţională.** *E. Cliffors.* — Fractional arithmetic. 1842.

35. **Industrială.** *C. Hart & M. J. Watts.* — Commercial and industrial arithmetic. New-York 1909.

36. **Infinitesimală.** *Wallis.* — Arithmetica infinitorum. 1655.

37. **Juridică.** *I. Ionescu.*—Aritmetica juridică. (Vezi *Gazeta Matematică*, Anul 24 pag. 145).

38. **Mecanică.** *F. Parrant.* — Applied mechanical arithmetic as practicet with comptometer. Chicago 1914.

39. **Modernă.** *H. C. Cox & G. A. Tallant & F. H. Umholz.* — Modern arithmetic. Chicago 1913.

40. **Preistorică.** *I. Ionescu.* — Aritmetica preistorică. (Vezi *Natura* vol. X).

(Va urmà). I. Ionescu.

25. *Produsul vectorial a trei vectori* *) (*G. M.* XXVIII, p. 19).

Soient $\overline{1}_x$, $\overline{1}_y$, $\overline{1}_z$ les vecteurs directeurs des arêtes d'un trièdre trirectangle positif $Oxyz$; (a_x, a_y, a_z), (b_x, b_y, b_z), (c_x, c_y, c_z) les valeurs algébriques des projections de trois vecteurs quelconques sur les arêtes de ce trièdre.

On a

$$\overline{a} = a_x \overline{1}_x + a_y \overline{1}_y + a_z \overline{1}_z$$

$$\overline{b} = b_x \overline{1}_x + b_y \overline{1}_y + b_z \overline{1}_z$$

$$\overline{c} = c_x \overline{1}_x + c_y \overline{1}_y + c_z \overline{1}_z .$$

Les produits scalaire et vectoriel des vecteurs $\overline{a}$, $\overline{b}$ sont

$$\overline{a}\ \overline{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

et (voir *Mathesis*, 1922, p. 96)

$$\mathcal{M}\ \overline{a}\ \overline{b} = \begin{vmatrix} 1_x & 1_y & 1_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = (ab)_x \overline{1}_x + (ab)_y \overline{1}_y + (ab)_z \overline{1}_z ,$$

---

*) Cu privire la Nota D-lui Gh. Em. Filipescu de la pag. 19 *asupra produsului vectorial a trei vectori*, D-nul Ad. Mineur, profesor la Universitatea din Bruxelles şi redactor al mult cunoscutei reviste *Mathesis*, ne trimete prezenta Notă, care ne face o deosebită plăcere a o publică.

D-nul Ad. Mineur, în Nota matematică Nr. 13 din *Mathesis*, Mars, 1922, p. 96, a arătat interesul ce este a se luà ca definiţie a produsului vectorial $\mathcal{M}\ \overline{a}\ \overline{b}$ a doi vectori $\overline{a}$, $\overline{b}$ aceea pe care o întrebuinţează aici.

en posant

$$(ab)_x = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}, \quad (ab)_y = \begin{vmatrix} a_z & a_x \\ b_z & b_x \end{vmatrix}, \quad (ab)_z = \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}.$$

On en déduit

$$\mathscr{M}\bar{a}\,\mathscr{M}\bar{b}\,\bar{c} = \begin{vmatrix} 1_x & 1_y & 1_z \\ a_x & a_y & a_z \\ (bc)_x & (bc)_y & (bc)_z \end{vmatrix},$$

ou

$$\mathscr{M}\bar{a}\,\mathscr{M}\bar{b}\,\bar{c} = \begin{vmatrix} \bar{1}_x & \bar{1}_y & \bar{1}_z \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix},$$

ou encore

$$\mathscr{M}\bar{a}\,\mathscr{M}\bar{b}\,\bar{c} = \begin{vmatrix} b_x\,\bar{1}_x + b_y\,\bar{1}_y + b_z\,\bar{1}_z & c_x\,\bar{1}_x + c_y\,\bar{1}_y + c_z\,\bar{1}_z \\ a_x\,b_x + a_y\,b_y + a_z\,b_z & a_x\,c_x + a_y\,c_y + a_z\,c_z \end{vmatrix}$$

et enfin

$$\mathscr{M}\bar{a}\,\mathscr{M}\bar{b}\,\bar{c} = \bar{a}\,\bar{c}\,\bar{b} - \bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c},$$

c. q. f. d. AD. MINEUR.

26. *Asupra notei No. 28 anul XXVII.* Demonstrația dată nu este completă, căci din:

$$P^n > r_{n-1}.\ P^{n-1};\ P^n > r_{n-2}\,P^{n-2};\ \ldots.\ P^n > r_0,$$

nu se poate conchide:

$$P^n > r_{n-1}\,P^{n-1} + r_{n-2}\,P^{n-2} + \ldots. + r_0.$$

Trebue aflat maximum sumei din partea doua a neegalității, care are loc când $r_{n-1} = r_{n-2} = r_{n-3} = \ldots. = r_0 = P - 1$. Acel maximum este $P^n - 1$ și astfel neegalitatea este dovedită.

N. GEORGESCU-ROEGEN.

Chestiunea din nota 28 Anul XXVII este un caz particular al următoarei teoreme cunoscute:

„Câtul întreg al unui număr întreg N printr'un produs de numere întregi A, B, C... se poate obține împărțind N prin A, apoi câtul prin B, noul cât prin C, etc.". (A se vedeà J. FITZ PATRICK *Exercices d'arithmétique* Paris 1914 pag. 18).

Nota examinează cazul simplu $P = A = B = C = D \ldots$

I. I.

27. *Reciproca problemei 2321.* Această problemă, propusă de d-l I. Ionescu la pagina 79 vol. XXI şi rezolvată la pagina 191 acelaş volum, are următorul enunţ :

Un triunghiu ABC *are vârful* A *fix, iar* B *şi* C *se mişcă pe două paralele astfel că aria lui rămâne constantă. Să se arate că* BC *se învârteşte în jurul unui punct fix.*

S'a demonstrat la locul citat, pe 2 căi geometrice şi una analitică, că punctul fix D se află pe o paralelă dusă prin A la cele 2 paralele.

Reciproca problemei 2321 este adevărată, dacă se enunţă astfel :

Un triunghiu ABC *are vârful* A *fix, iar vârfurile* B *şi* C *se mişcă pe 2 paralele* Δ_1, Δ_2, *aşà că* BC *să treacă printr'un punct fix* D, *situat pe paralela* Δ_3 *dusă prin* A *la* Δ_1 *şi* Δ_2. *Să se arate că suprafaţa triunghiului* ABC *este constantă.*

Considerăm o figură în care Δ_3 este exterioară dreptelor Δ_1, Δ_2. Demonstraţia se face la fel şi pentru alte cazuri. Se vede imediat că triunghiurile ABD şi ACD au suprafeţele constante, ca având vârfurile B şi C mobile pe paralele la baza fixă AD. Triunghiul ABC fiind diferenţa a 2 triunghiuri de suprafeţe constante, are evident suprafaţa constantă.

Cu ajutorul problemei 2321, se poate construi imediat un triunghiu ABC de suprafaţă constantă, având vârful A fix, latura BC trecând prin un punct fix D', iar B şi C mişcându-se pe 2 paralele

Este destul a uni pe D' cu D şi a căutà intersecţiile lui Δ_1 şi Δ_2 cu DD'. Locot. Col. Gh. Buicliu.

28. *Descompunerea trinomului bipatrat într'un produs de doi factori reali de gradul al II-lea.*

Fie dat trinomul bipatrat cu coeficienţi reali

$$E = x^4 + px^2 + q$$

şi să-l descompunem într'un produs de doi factori reali de gradul al doilea.

Vom începe ca pentru trinomul de gradul al doilea, punând :

$$E = \left(x^2 + \frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p^2}{4} - q\right)$$

1°. Dacă $p^2/4 - q \geqslant 0$, cu alte cuvinte dacă ecuaţia

$$(1) \qquad y^2 + py + q = 0$$

are rădăcinile reale, avem imediat,

$$E = (x^2 + p/2 + \sqrt{p^2/4 - q})(x^2 + p/2 - \sqrt{p^2/4 - q}).$$

De exemplu, $x^4 - 13x^2 + 36 = (x^2 - 4)(x^2 - 9)$.

2°. Dacă ecuaţia (1) are rădăcinile imaginare, q trebuind să fie pozitiv, vom pune pe E sub forma:

$$E = (x^2 + \sqrt{q})^2 - 2(\sqrt{q} - p/2)x^2.$$

Dar în acest caz avem inegalitatea $p/2 < \sqrt{q}$, deci avem:

$$E = (x^2 + x\sqrt{2\sqrt{q} - p} + \sqrt{q})(x^2 - x\sqrt{2\sqrt{q} - p} + \sqrt{q}).$$

De exemplu: $x^4 + 1 = (x^2 + x\sqrt{2} + 1)(x^2 - x\sqrt{2} + 1)$.

S'ar fi putut procedà şi astfel: Punem:

$$E = (x^2 + \alpha x + \beta)(x^2 + \alpha' x + \beta')$$

şi căutând valori reale pentru $\alpha, \alpha', \beta, \beta'$.

Identificând, se obţin condiţiunile:

$$\begin{cases} \alpha + \alpha' = 0, & \beta + \beta' + \alpha\alpha' = p, \\ \alpha\beta' + \beta\alpha' = 0, & \beta\beta' = q. \end{cases}$$

Din prima şi a treia, deducem: $\alpha(\beta - \beta') = 0$.

Deci 2 cazuri:

1°. Să luăm $\alpha = 0$; se obţine $\alpha' = 0$, $\beta + \beta' = p$, $\beta\beta' = q$. β şi β' sunt daţi de ecuaţia (1). Deci acest caz corespunde cazului 1° de mai sus şi descompunerea răuşeşte, numai dacă ecuaţia (1) are rădăcinile reale.

2°. Dacă rădăcinile sunt imaginare, se ia $\beta = \beta' = \sqrt{q}$ căci q este pozitiv, iar $\alpha = \sqrt{2\sqrt{q} - p}$.

Acest caz corespunde deci cazului 2° de mai sus.

TH. ANGHELUŢĂ.

29. *Generalizarea problemei 2876.* Imi propun în această notă, să generalizez chestiunea propusă de D-l LT. I. LINTEŞ, stabilind inegalitatea

$$\frac{[E(pq)]^m - [pE(q)]^m}{(q+1)^m - q^m} < p^m,$$

unde $E(\alpha)$ reprezintă partea întreagă a lui α, iar p şi q numere pozitive, întregi sau fracţionare.

Ţinând seamă de notaţie, avem evident

$$(1) \qquad pq = E(pq) + \varepsilon_1 \ , \quad q = E(q) + \varepsilon_2 \ , \quad \varepsilon_1, \varepsilon_2 < 1.$$

Ridicând la puterea m egalităţile din (1), obţinem

$$(2) \qquad (pq)^m = [E(pq)]^m + \sum_1^m C_m^n \varepsilon_1^n [E(pq)]^{m-n} = [E(pq)]^m + R.$$

$$(3) \qquad (q)^m = [E(q)]^m + \sum_2^m C_m^n \varepsilon_2^n [E(q)]^{m-n}.$$

Inmulţind ambii membri din (3) cu $(p)^m$,

$$(4) \qquad (pq)^m = [pE(q)]^m + p^m \sum_1^m C_m^n \varepsilon_2^n [E(q)]^{m-n}.$$

Scăzând pe (4) din (2), deducem

$$(5) \qquad [E(pq)]^m - [pE(q)^m] = p^m \sum_1^m \varepsilon_2^n [E(q)]^{m-n} - R.$$

Insă $\varepsilon_2 < 1$, $\varepsilon_2^n < 1$; deci

$$C_m^n \varepsilon_2^n [E(q)]^{m-n} < C_m^n [E(q)]^{m-n}$$

$$\therefore \qquad p^m \sum_1^m C_m^n \varepsilon_2^n [E(q)]^{m-n} < p^m \sum_1^m C_m^n [E(q)]^{m-n},$$

deci „*a fortiori*“ vom avea

$$(6) \qquad p^m \sum_1^m C_m^n \varepsilon_2^n [E(q)]^{m-n} - R < p^m \sum_1^m C_m^n [E(q)]^{m-n}.$$

Deoarece $E(q) \leqslant q$, atunci

$$(7) \qquad p^m \sum_1^m C_m^n [E(q)]^{m-n} \leqslant p^m \sum_1^m C_m^n . q^{m-n}.$$

Insă

$$(8) \qquad \sum_1^m C_m^n q^{m-n} = (q+1)^m - q^m .$$

Deci inegalitatea (6), devine, dacă ţinem seama de (7) şi (8),

$$(9) \qquad p^m \sum_1^m C_m^n \varepsilon_2^n [E(q)]^{m-n} - R < p^m [(q+1)^m - q^m].$$

Considerând pe (5), inegalitatea (9) se transformă în:

$$[E(pq)]^m - [pE(q)]^m < p^m [(q+1)^m - q^m].$$

$$\therefore \quad \frac{[E(pq)]^m - [pE(q)]^m}{(q+1)^m - q^m} < p^m .$$

Q. E. D.

Pentru $m = 1$, avem evident $E(pq) - pE(q) < p$. In cazul problemei 2876, $p = n$, $q = \alpha/\beta$.

CONST. E. GEORGESCU.

30. *„Asupra unei curbe remarcabile"*. Sub acest titlu, D-l M. GHERMĂNESCU studiază în linii generale curba, loc al potenţialelor unui punct $M(x, y, z)$ în raport cu triunghiul de referinţă, curbă pe care o numeşte curba Γ a triunghiului. Voiu arătà cum, într'un caz special, această curbă remarcabilă se reduce la o parabolă. Anume:

Locul potenţialelor unui punct geometric-progresiv al triunghiului este o parabolà.

Intr'adevăr, dacă între coordonatele unui punct $M(\alpha, \beta, \gamma)$ avem relaţia:

$$(1) \qquad \beta^2 = \gamma\alpha,$$

atunci vom aveà şi

$$(2) \qquad (\beta^m)^2 = \gamma^m . \alpha^m,$$

ceeace ne arată că orice potenţial al unui punct geometric-progresiv este tot un punct geometric-progresiv. Locul tuturor acestor puncte este însă o parabolă, după cum ne arată şi ecuaţia (1). Această parabolă trece şi ea — evident — prin punctele G, B, C şi este tangentă laturilor triunghiului în punctele B şi C.

Dacă facem: $\alpha = a$; $\beta = b$; $\gamma = c$, obţinem următoarea proprietate: *Locul potenţialelor unui triunghiu cu laturile în progresie geometrică este o parabolă, care trece prin extremităţile laturii mijlocii.*

MIRON NICULESCU.

31. *Asupra problemei 2364* (*G. M.* vol. XXIII, 114). In acea problemă se cereà maximul expresiei

$$E = \frac{\sin 2A \,.\, \sin 2B \,.\, \sin 2C}{\cos^3 \tfrac{1}{2} A \,.\, \cos^3 \tfrac{1}{2} B \,.\, \cos^3 \tfrac{1}{2} C},$$

A, B, C fiind unghiurile unui triunghiu. Iată o soluţie simplă a acestei chestiuni.

Mă servesc de formulele:

(1) $\sin 2A = 2\cos A \sin A$, $\sin A \sin B \sin C = S/2R^2$ şi

$$\cos\tfrac{1}{2}A \cos\tfrac{1}{2}B \cos\tfrac{1}{2}C = p/4R.$$

Atunci

$$E = 64 \cdot \frac{4SR^3}{2R^2p^3} \cos A \cos B \cos C = 64\frac{abc}{p^3} \cos A \cos C \cos B ,$$

căci $abc = 4RS$. Maximul lui abc/p^3 are loc în triunghiul echilateral, căci $a/p + b/p + c/p = 2 = \text{Const.}$ Produsul $\cos A \cos B \cos C$ e maxim iarăşi în triunghiul echilateral, chestie studiată de multe ori în Gazeta Matematică. Deci E va fi maximum în triunghiul echilateral şi $E_{max} = 64/27$. Se mai pot da multe expresii analoage celei din problema 2364, care sunt maxime în triunghiul echilateral.

De exemplu, expresiunea

$$E_1 = \frac{R^2r^3 \sin 2A \sin 2B \sin 2C}{S^2p}.$$

Transformând şi ţinând seama de formulele (1) şi de $r_a r_b r_c = p^2 r$ şi $S = pr$, avem

$$E_1 = \frac{8}{2} \cdot \frac{r^3}{r_a r_b r_c} \cos A \cos B \cos C.$$

Maximum lui $r^3/r_a r_b r_c$ are loc în triunghiul echilateral, căci

$$r/r_a + r/r_b + r/r_c = 1.$$

E_1 e maximum în triunghiul echilateral şi

$$E_{1\,max} = \frac{8}{2} \cdot \frac{1}{27} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{16.27} = \frac{8}{432} = \frac{1}{54}.$$

B. M. Barbălatt.

CHESTIUNI DE EXAMEN.

FACULTATEA DE ŞTIINŢE, CLUJ.

SEZIUNEA OCTOMVRIE 1922.

MATEMATICI GENERALE.

1. Să se studieze şi să se reprezinte grafic variaţia funcţiunii

$$y = \frac{2x^2 + 3x - 5}{x^2 + x + 1}.$$

Să se calculeze aria cuprinsă între curbă, axa Ox şi dreptele $x = 1, x = 7$.

2. Să se integreze ecuaţia diferenţială

$$y'' + 3y' = x^5.$$

(23 Oct. ora 8 dim.)

Să se calculeze integrala curbilinie

$$\int_{1,0}^{\infty,0} \frac{3x^2 y(1 + 2y^2)\,dx + (2y^3 - 6x^3 y^2 - x^3)\,dy}{(2x^3 - y)^2}$$

(23 Oct. ora 3 p. m.)

ALGEBRA SUPERIOARĂ.

Se dă ecuaţia $f(x) = x^4 + 4ax^3 - 6a^2x^2 + 4cx + d = 0$ şi se cere să se determine c şi d în funcţiune de a, ştiind că suma inverselor rădăcinilor ecuaţii date este 36 şi că ecuaţia $f'(x) = 0$, ce se obţine egalând cu zero derivata lui $f(x)$, are două rădăcini egale şi de semne contrarii. Să se studieze apoi natura rădăcinilor ecuaţii $f(x) = 0$, când a variază şi să se rezolve această ecuaţie, când are rădăcini multiple. Să se determine a cu două zecimale exacte, astfel ca ecuaţia $f(x) = 0$ să aivă rădăcina 1.

(13 Oct. ora 8 dim.)

Să se rezolve ecuaţia $2x^5 - 3x^4 + 2x^3 - 2x^2 + \lambda = 0$, ştiind că admite o rădăcină dublă.

(13 Oct. ora 3 p. m.)

GEOMETRIA ANALITICA.

1. Se consideră parabola P tangentă în origină axei Ox, ce are pe Oy ca axă şi trece prin punctul A (1, 1). Să se scrie ecuaţia unei hiperbole echilatere (I), tangentă parabolei P în vârf şi care trece prin A şi printr'un punct M, mobil pe parabolă. Să se afle locul geometric al centrelor hiperbolelor (I), când M variază pe parabola P.

2. Să se scrie ecuaţia suprafeţei născută de o dreaptă paralelă cu planul xOy şi care se sprijină pe axa Oz şi dreapta $y = z, x = z - 1$.

(18 Oct. ora 8 dim.)

Să se construiască curba

$$yx^2 = x^3 - 3x + 2.$$

(18 Oct. ora 3 p. m.)

GEOMETRIA DESCRIPTIVĂ.

Intersecţia a două cilindre. Cadrul are dimensiunile orizontale şi verticale de 270 mm şi 420 mm. Linia de pământ este paralelă cu marginea orizontală, la distanţă de 180 mm. de sus în jos. Cilindrul C are baza, în planul orizontal,

cercul O, cu centrul O (60, 88, 0), raza 22 mm., iar generatoarele fac în orizontal şi vertical cu linia de pământ, unghiurile α şi β, astfel că $tg\alpha = 2/7$, $tg\beta = 5/7$. Cilindrul C_1 are baza, în planul orizontal, cercul O_1 cu centrul în O_1 (168, 130, 0), raza 38 mm., iar generatoarele fac în orizontal şi vertical cu linia de pământ, unghiurile α_1 şi β_1, astfel că $tg\alpha_1 = 9/2$, $tg\beta_1 = 5/2$.

(10 Oct. ora 8 dim.)

Intersecţia unei suprafeţe strâmbă de revoluţie cu un plan. Cadrul are dimensiunile orizontale şi verticale de 270 mm. şi 420 mm. Linia de pământ este paralelă cu marginea orizontală, la distanţă de 200 mm. de jos în sus. Suprafaţa strâmbă de revoluţie are centrul în O (140, 100, 108), cercul colierului cu raza 48 mm., iar generatoarea frontală face cu linia de pământ unghiul α, astfel ca $tg\alpha = 4/3$. Planul de secţiune este perpendicular pe planul vertical şi face cu planul orizontal unghiul β, astfel că $tg\beta = 7/11$ şi taie linia de pământ în punctul (40, 0, 0).

(10 Oct. ora 3 p. m.).

BIBLIOGRAFIE.

Maurice Lecat. *Bibliografie du calcul des variations* 1850 — 1913 Ad. Hoste, Gand şi A. Hermann, Paris 1913, 4 franci. D-l Lecat, care pe lângă Doctoratul în ştiinţele matematice şi fizice, mai posedă şi titlurile de doctor în ştiinţele naturale şi de inginer de mine, erà în măsură să-şi deà seama, mai mult ca un simplu matematician, de rolul calculului variaţiunilor în ştiinţele aplicate, ca mecanica raţională, energetica, teoria elasticităţii şi chiar în studiul fenomenelor economice şi sociale. Incă din 1892, pe când eram elev în anul II al fostei Şcoale Naţionale de Poduri şi Şosele, redijând cursul de mecanică raţională al fostului Profesor G. Kirilov, am văzut că unele chestiuni de mecanică nu pot fi complet lămurite fără cunoştinţa calculului variaţiunilor şi de aceea, la cursul litografiat, atunci am adăogat apendice, cu un rezumat al calculului variaţiunilor după Moigno.

D-l Lecat a căutat să pună la îndemâna celor cari au nevoie de acest calcul, cari îi urmăresc progresul şi vor să contribue la desvoltarea lui, o bibliografie a tutulor volumelor care s'au publicat din 1850, până în 1913, data publicării cărţii aci enunţate. Intr'un volum de 114 pagini, se dă o listă alfabetică, după numele autorilor, a lucrărilor şi cursurilor publicate, cu un adaos şi modificări la urmă. Urmează apoi o listă cu aceleaşi lucrări în ordine cronologică, o tablă alfabetică cu revistele şi publicaţiile citate, printre care găsim şi *Gazeta Matematică*, cu articolele publicate de D-l D. Georgescu în 1910 şi *Buletinul* Societăţii de Ştiinţe din Bucureşti, cu un articol al D-lui S. Sanielevici; apoi Universităţile care au dat lucrări în calculul variaţiunilor şi adresele autorilor în viaţă la 1913, pe cât le-a putut află autorul.

Lucrările publicate asupra calculului variaţiunilor în perioada 1850—1913, în număr de 1012, ocupă 23500 pagini, din care 24 cărţi didactice. De unde

la început de abia erau 7 lucrări pe an, în urmă au ajuns la 40. La sfârşit, este o clasare a autorilor după anii de naşteri, anii de moarte şi după longevitate. Această din urmă statistică arată că din 116 matematicieni, ingineri, etc. cari s'au ocupat cu calculul variaţiunilor, numai 3 au murit înainte de 30 ani, apoi în celelalte decade 6, 13, 18, 29, 31, 14, 1, 1 aşà că unul a atins suta de ani. Din ei, 47 au trecut peste 70 ani şi 16 peste 80 ani. Avis celor ce consideră matematicile ca distrugătoare de viaţă!

Bibliografia D-lui M. LECAT este foarte necesară celor ce se ocupă cu calculul variaţiunilor şi cu aplicaţiunile lui.

Maurice Lecat. *Bibliografie du calcul des variations depuis les origines jusqu'à 1850.* AD. HOSTE, Gand şi A. HERMANN, Paris 1916, 4 franci 50 centime. Aceasta este o completare a cărţii precedente. Aranjarea este puţin diferită. La început, este o listă după numele autorilor, cu lucrările numerotate, cu corectări, adăogiri şi erată la urmă; apoi o listă cronologică, începând cu Geometria speculativă a lui BRADWARDINE din 1495, în care s'au găsit primele încercări de probleme de calculul variaţiunilor, apoi o tablă alfabetică a culegerilor în care se găsesc însemnări sau articole de calculul variaţiunilor şi un apendice care o completează până la 1916. Bibliografia e tipărită în 1913.

Acest volum conţine 480 lucrări. Statistica arată că jumătatea autorilor de înainte de 1850 cu lucrări de calculul variaţiunilor au trecut de etatea de 67 ani (viaţa medie a popilor), iar un sfert peste 78 ani!

I. IONESCU.

Anales de la Sociedad cientifica Argentina. Vol. XCIV. No. 3—4. Septemvrie-Octomvrie 1922. Buenos-Aires. A. P. FERNANDEZ. Cercetări trigonometrice.

Revista de matematicas y Fisicas elementales. Anul IV, Octomvrie 1922, No. 6. Buenos-Aires. DESCARTES de A. IMBODEN. Geometria euclidiană şi neeuclidiană de FR. PINGSDORF.

Buletinul Asociaţiei de matematici pure şi aplicate. (Litografiat). Anul II No. 4, Decemvrie 1922. Bucureşti. Observări asupra criteriilor de convergenţă de TH. ANGHELUŢĂ. Asupra funcţiunilor întregi de P. SERGESCU. Activitatea Asociaţiei pe anul 1921—1922.

Anuarul Societăţii „Matematica Bârlădeană" pe anul 1921—1922. Bârlad 1922. Înfiinţarea şi scopul Societăţii *„Matematica Bârlădeană"*. Procese-verbale. Probleme.

Natura. Revistă pentru răspândirea ştiinţei. Anul XII. No. 1. Noemvrie 1922, Bucureşti Str. Paris No. 1. Abonamentul anual 120 lei. Apare sub îngrijirea D-lor G. ŢIŢEICA, G. LONGINESCU şi O. ONICESCU. Această revistă, care apăreà înainte de războiu, şi-a reluat apariţia în luna Noemvrie, cu un câmp de activitate mai întins. Prezenţa a doi matematicieni în comitetul ei diriguitor arată că corespondenţii noştri pot găsi în această revistă, dacă nu articole de matematici, însă articole în legătură cu ele. Sumarul primului număr este: După furtună de G. ŢIŢEICA. Căderea podurilor de I. IONESCU.

Dr. C. ISTRATI de G. G. LONGINESCU. Descompunerea tungstenului în heliu la 20000 grade de C. N. TEODOSIU. Eterul în legătură cu materia şi electricitatea de O. ONICESCU. Despre vulcani, de D. ROTMANN. Note—Recenzii—Buletine. De vorbă cu un strop de apă, roman de G. G. LONGINESCU.

Mathesis. Vol. XXXVI. Anul 1922. No. 9 Noemvrie. Bruxelles. Bibliografia triunghiului şi tetraedrului de J. NEUBERG. Asupra unei aplicaţiuni geometrice a unei teoreme a lui JACOBI de P. de LEPINEY. Asupra isopolului de CL. SERVAIS. Sferele tetraedrului de R. GOORMAGHTIGH şi V. THÉBAULT. Un capitol din opera lui CAVALIERI de H. BOSMANS. O demonstraţie a teoremei lui JORDAN, de A. ERRERA. Note de algebră elementară de AD. M. Triunghiurile speciale de V. THÉBAULT şi R. GOORMAGHTIGH.

Revista matematică din Timişoara. Anul II. No. 10, 15 Decembrie 1922. Timişoara. Dreapta lui SIMSON, de T. LALESCU.

Note matematice şi ştiinţifice. Seria 1 No. 6. 15 Decemvrie 1922, Craiova. Rezolvarea ecuaţiilor de forma $ax+by=c$ de M. G. DUMITRESCU. Revista apare la 1 şi 15 ale fiecărei luni în serii de 7 numere, condusă de 12 elevi, sub patronagiul Societăţii matematice a Liceului Carol I din Craiova şi sub îngrijirea unui Comitet format din elevi ai cursului superior real şi studenţi. Abonamente se fac la D-l T. S. IVANOVICI, Bulevardul Carol No. 3, Craiova. Revista conţine articole, note matematice şi probleme.

PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 2254. *Să se găsiască numere triunghiulare gemene.* ION IONESCU.

Insemnăm cu $\frac{1}{2}(m+n)(m+n+1)$ şi $\frac{1}{2}n(n+1)$ două numere triunghiulare de $(p+1)$ cifre, având ultimele p cifre egale, şi cu a diferenţa dintre primele cifre dela stânga. Relaţia dintre ele este:

$$\tfrac{1}{2}(m+n)(m+n+1)-\tfrac{1}{2}n(n+1)=2a\,.\,10^p,$$

cu condiţiunea

$$\tfrac{1}{2}(m+n)(m+n+1)\leqslant 10^{p+1}.$$

Din prima relaţie scoatem:

$$n=a\frac{10^p}{m}-\frac{m+1}{2}.$$

Deci m este un divizor nepereche al lui $a\,10^p$, sau un divizor al lui $2a\,10^p$, care să dea un cât impar.

Să aplicăm cele spuse acì la căutarea numerelor triunghiulare gemene de trei cifre. Facem $p=2$ şi avem

$$n=\frac{100a}{m}-\frac{m+1}{2}.$$

$a = 1$ dă 153 cu 253 : 036 cu 136,

$a = 2$ dă 703 cu 903 ; 010 cu 210,

$a = 3$ dă 078 cu 378 ; 561 cu 861 ; 000 cu 300,

$a = 4$ dă 006 cu 406,

$a = 5$ dă 028 cu 528,

$a = 6$ dă 066 cu 666,

$a = 7$ dă 120 cu 820 ; 003 cu 703,

$a = 8$ dă 190 cu 990,

$a = 9$ dă 003 cu 903.

Dacă lăsăm soluţiile ce încep cu 0, găsim numai perechile de numere gemene 120, 820 ; 153, 253 ; 190, 990 ; 561, 861 ; 703, 903.

B. I. Baidaff.

D-l R. Augustin a găsit prin cercetări mai numeroase soluţiile de mai sus. Pentru numerele de două cifre, a găsit soluţiile 15 cu 45 ; 15 cu 55 ; 45 cu 55 ; 21 cu 91 ; 28 cu 78 ; 36 cu 66. D-sa a mai găsit şi următoarele două perechi pentru triunghiularele de patru cifre : 1485 cu 2485 şi 2278 cu 4278.

PROBLEMA 2581. *Se dau două paralele şi un punct între ele. Să se construiască un trapez care să aibă laturile paralele pe cele două drepte date şi al cărui centru de greutate să fie punctul dat.*

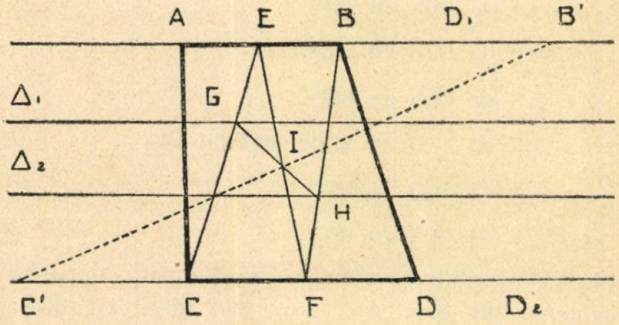
I. Ionescu.

Soluţie dată de D-l M. Grünbaum (Liceul Bârlad).

Fie D_1, D_2 cele două drepte paralele date, I centrul de greutate dat al trapezului căutat. Distanţa dintre D_1 şi D_2 o împărţim în trei părţi egale şi prin punctele de diviziune ducem dreptele Δ_1 şi Δ_2 paralele cu D_1 şi D_2. Ducem prin G dreapta E F care taie pe D_1 în E, pe D_2 în F şi dreapta G H care taie pe Δ_1 în G şi Δ_2 în H. Dreapta EG taie pe D_2 în C şi dreapta FH pe D_1 în B. Luăm apoi AE = EB şi FD = FC. Trapezul căutat este ABCD.

In adevăr, centrul de greutate I este pe linia EF ce uneşte mijloacele laturilor paralele şi pe dreapta ce uneşte centrul de greutate G al triunghiului A B C cu centrul de greutate H al triun-

ghiului CBD. Se vede că G şi H sunt centrele de greutate ale acelor triunghiuri, căci sunt pe medianele lor CE, FB la a treia parte dela baza triunghiurilor.



Problema are o infinitate de soluţiuni.

Soluţie dată de D-l I. T. BÂRSU (Constanţa).

O construcţie a centrului de greutate a trapezuiui este următoarea: Se duce dreapta EF ce uneşte mijloacele laturilor paralele, se ia baza cea mare în prelungirea bazei celei mici de o parte şi pe baza cea mică în prelunginea opusă, o lungime egală cu baza cea mare, se unesc extremităţile obţinute cu o dreaptă care trece şi ea prin centrul de greutate. De acì, următoarea construcţie:

Ducem EF prin I şi altă dreaptă B'C' prin I. Dacă $b = AB$ este baza mică şi $B = DC$ este cea mare, avem:

$$\overline{EB'} = \tfrac{1}{2}b + B \quad , \quad \overline{FC'} = \tfrac{1}{2}B + b,$$

de unde obţinem:

$$\tfrac{1}{2}b = \tfrac{1}{3}(2\overline{FC'} - \overline{EB'}) \quad , \quad \tfrac{1}{2}B = \tfrac{1}{3}(2\overline{EB'} - \overline{FC'}).$$

Determinăm astfel pe $\frac{1}{2}b$ şi $\frac{1}{2}B$ pe care le purtăm dela E şi F în dreapta şi stânga pe D_1 şi D_2 şi găsim trapezul ABCD.

Problema are o dublă nedeterminare căci EF şi B'C' sunt nedeterminate. Ele trebuesc duse numai aşa ca $\overline{EB'} < 2\overline{FC'}$ şi $\overline{FC'} < 2\overline{EB'}$.

PROBLEMA 2603. *Un automobil de 500 kgr. greutate este condus cu o viteză de 16 km. pe oră. La un moment dat, şoferul zăreşte un obstacol la 6 m. distanţă; el strânge brusc frâna, dar automobilul patinează.*

Cunoscând că coeficientul de frecare este de 0,20, se întreabă dacă s'a produs accidentul.

C. D. ORĂŞANU.

Fie d distanţa parcursă de automobil după frânare şi fie r rezistenţa de frecare provocată prin strângerea frânei automobilului de greutate $P = 500$ kgr.

Rezistenţa de frecare r va fi:

$$r = P + f = 500 \times 0.20 = 100 \text{ kgr.}$$

Această rezistenţă de frecare anulează forţa vie ce aveà automobilul în momentul aplicărei frânei.

Deci: $\frac{1}{2} m v^2 = r d$,

în care m este massa, iar v viteza de 16 km. pe oră, transformată în metri pe secundă.

Deci:

$$d = \frac{m \cdot v^2}{2 \cdot r} = \frac{500 \times 16000^2}{2 \times 9,81 \times 3600^2 \times 100} = 5,033 \text{ metri.}$$

Distanţa d parcursă de automobilul frânat fiind de 5,033 metri, este mai mică decât distanţa D de 6,00 metri, ce erà dela obstacol până la automobil, în momentul când a fost frânat brusc. Rezultă că accidentul nu s'a produs, automobilul oprindu-se la distanţa de

$$D - d = 6,000 - 5,033 = 0,967 \text{ m.}$$

înaintea obstacolului. C. O.

A rezolvat problema D-l D. PANAITESCU.

PROBLEMA 2781. *La examenul de admitere în Şcoala politecnică din Bucureşti în 1920, examenul în scris a fost eliminator. Au fost probe scrise la 5 obiecte şi au fost admişi la oral aceia cari au avut o medie la înscris* I *superioară unei anumite note. Au fost apoi probe orale la 8 obiecte. După terminarea lor s'a făcut pentru fiecare elev o medie generală*

A, luând media aritmetică a celor 13 note obținute, atât la înscris cât și la oral. Găsindu-se în urmă că media A nu ar reprezentà destul de bine valoarea candidaților, s'a decis să se aprecieze această valoare după media B între media I și media probelor orale O.

Cum se poate simplificà și deci accelerà calculul mediei B, evitându-se facerea mediei O? Se poate întrebuințà un calcul aproximativ, fără nedreptate?

* * *

Soluție dată de D-l I. BÂRSU.

Suma tutulor punctelor dela cele 5 probe în scris este 5 I, a celor 13 note, dela scris și oral, este 13 A. Suma punctelor obținute la oral este deci (13 A — 5 I) și deci media oralului este:

$$O = \frac{1}{8}(13\,A - 5\,I).$$

Media B, după care s'a făcut admiterea, este:

$$B = \frac{1}{2}(I + O).$$

Dacă înlocuim pe O din prima relație în a doua, găsim:

$$B = \frac{1}{16}(13\,A + 3\,I),$$

formulă cu care se poate calculà direct mediile B din mediile cunoscute I și A. Această formulă rezolvă prima parte a problemei.

Relațiunea precedentă se mai poate pune sub forma:

$$B = A + \frac{3}{16}(I - A).$$

$$B = A + 0{,}1875\,(I - A).$$

De aci, se vede că schimbarea modului de a face media nu atinge pe cei la cari I = A, în care caz I = O când, adică, mediile la înscris și oral sunt aceleași; că B > A dacă I > A, adică pentru candidații cari au fost mai tari la înscris ca la oral. Calculul mediei B s'ar simplificà dacă am puteà lua mai puține zecimale la 0,1875 . Totul depinde de maximul lui (I — A) în valoare absolută. Să presupunem că mediile se calculează pânăla sutimi. Atunci câtul 0,01 : 0,0005 ne arată cât de mare poate fi (I — A) pentru ca înmulțind cu 0,0005, să nu dea o sutime în plus sau minus și astfel să nu poată eventual schimbà clasificarea candidaților.

Câtul fiind 20, se vede că dacă nota maximă nu trece de 20, se poate lua:

$$B = A + 0{,}187\ (I - A),$$

fără a se face nedreptate, afară poate de unele rotunjiri la calculele lui I , A şi B.

Partea întâi a fost rezolvită şi de D-nii: I. Rizescu, Gh. Jujescu.

PROBLEMA 2884. *Prin vârfurile* B *şi* C *ale unui triunghiu, se duce un cerc, care tae laturile* AB *şi* AC *în punctele* D *şi* E, *aşà ca cercul circumscris triunghiului* ADE *să fie egal cu acel cerc. Când* BC *e fixă şi* A *mobil pe cercul circumscris lui* ABC, *se cere:*

1. Locul punctelor D *şi* E; *2. Infăşurătoarea lui* DE; *3. Locul centrului cercului* ADE.

A. Nicolau.

I. Soluţie dată de D-nii: I. B. Florescu, C. I. Georgescu şi I. O. Huber.

Coarda DE, comună cercurilor egale circumscrise lui ADE şi BDEC, subîntinde, în cele două cercuri, arce egale.

Unghiul A fiind constant, când A e mobil pe cercul ABC, valorile lui, măsurate pe cercurile ADE şi BCDE, sunt deasemenea constante.

Pe cercul ADE, unghiul A are drept măsură jumătatea arcului subîntins de DE; iar pe cercul BCDE, jumătate din diferenţa arcelor subîntinse de BC şi DE.

Din acestea, rezultă că valoarea arcului subîntins de BC în cercul BCDE e constantă; şi anume egală cu 4 A. Dar coarda BC fiind fixă şi cercul BCDE va fi fix şi anume, având segmente de cerc capabile de unghiul 2 A.

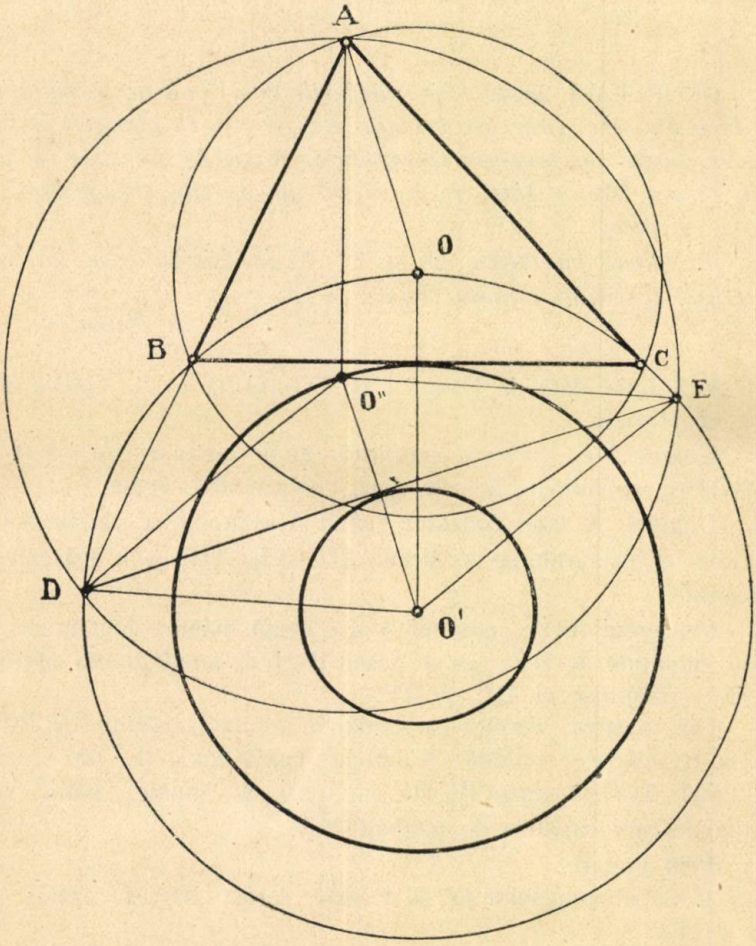
Prin urmare:

1. Locul punctelor D şi E este cercul BCDE arătat mai sus ca fix.

2. Cercul BCDE fiind fix, iar coarda DE subîntinzând arce de lungime constantă, înfăşurătoarea ei este un cerc concentric cu cercul BCDE.

3. O' şi O'' fiind respectiv centrele cercurilor ADE şi BCDE,

dreapta O'O'' e perpendiculară pe coarda comună DE şi aceste cercuri fiind egale, punctele O' şi O'' sunt simetrice în raport cu mijlocul lui DE. Cum mijlocul lui DE descrie înfăşurătoarea lui DE, adică un cerc cu centrul în O'', punctul O', centrul cercului ADE, va descrie un cerc cu centrul tot în O'' şi având raza egală cu îndoitul razei cercului ce înfăşoară dreapta DE.



II. Soluţie dată de D-l Tiberiu Popoviciu (Liceul„ Moise Nicoară" Arad).

Cercul cerut în problemă, ce trece prin B şi C este acela ce trece şi prin O, centrul cercului circumscris triunghiului ABC.

Intr'adevăr, DE este antiparalelă cu BC în raport cu unghiul A. Dacă ducem prin D o dreaptă DO″, care taie înălțimea din A în O″, așa ca DO″ să fie egală cu raza cercului O′, ce trece prin B, C și O, atunci O″ este centrul cercului ADE, căci dacă ducem raza DO′, triunghiul O″DO′ este isoscel. O′O″ fiind diagonala rombului DO″EO′, este perpendiculară pe DE, deci paralelă cu AO. Prin urmare, figura AOO′O″ este un paralelogram, ceeace probează că O″ este centrul cercului ADE, căci $DO'' = AO'' = EO'' = DO' = OO'$.

1. Dacă A este mobil pe cercul O, iar BC este fixă, cercul O′ va fi fix, deci locul punctelor D și E este însuși cercul O′.

2. Măsura unghiului constant A în cercul O′ este $\frac{1}{2}$(arc DE—arc BC), ceeace probează că arc DE, deci și însuși DE, are o lungime constantă. Prin urmare, înfășurătoarea lui DE este un cerc concentric cu O′. Raza acestui cerc este egală cu jumătatea razei cercului O, căci DE trece prin mijlocul lui O″O′.

3. AO″ având o lungime constantă, egală cu OO′, locul lui O″ este un cerc concentric cu O′ și cu raza O′O″ egală cu raza cercului O.

D-l B. M. Barbălatt a trimis o foarte bună soluție în sensul soluției I, iar D-l Micu Grünbaum, deasemenea o foarte bună soluție în sensul celei de-a II-a.

D-l M. I. Focșeneanu a trimis deasemenea o foarte bună soluție, demonstrând partea întâia cu ajutorul trigonometriei.

Observări. 1. Punctul O, e ortocentrul triunghiului ADE și de aci rezultă că și locul centrului cercului „Euler“ al triunghiului ADE este un cerc.

M. Grünbaum și B. M. Barbălatt.

2. Problema mai poate fi enunțată:

Fie triunghiul ABC înscris în cercul O. Perpendicularele din O pe AC și AB tae respectiv pe AB și AC în D și E. Când BC e fix și A mobil pe cercul ABC, se cere: 1) Locul punctelor D și E; 2) Înfășurătoarea lui DE; 3) Locul centrului cercului circumscris și al centrului cercului „Euler“ ale triunghiului ADE.

M Grünbaum.

Notă. La soluția întâia, valoarea arcului subîntins de BC în cercul BCDE poate fi și $360^0 - 4A$, nu numai 4 A, ținând seamă de pozițiile punctelor D și E față de punctele A, B și A, C, precum și de considerațiunea că punctul A e mobil pe întregul cerc ABC.

Maior Gh. Liteanu.

PROBLEMA 2958. *Pe un plan vechiu al unei case, s'a măsurat curtea şi s'a găsit 485,10 cm².* *Planul este făcut pe scara 1/500, iar din dimensiunile scrise pe dânsul, se constată că dela facerea lui până acum, hârtia s'a contractat cu 2% în sensul lungimei planului şi cu 1% în sensul lăţimei lui.* *Câţi metri patraţi are acea curte?*

I. IONESCU.

Soluţie dată de D-nii A. MICLESCU (Şcoala de artilerie); D. MĂRU (Lc. Galaţi); GH. STANCU (Lc. Focşani); E. BERCOVICI (Lc. Matei Basarab, Bucureşti) şi DILI C. SCHILERU.

Dacă se desemnà la început un patrat cu laturile de 1 m., el erà azi un dreptunghiu de 98 cm. lăţime şi 99 lungime şi deci, în loc de a aveà suprafaţa de 1 m.², ar fi avut suprafaţa de $0,98 \times 0,99 = 0,9702$ m.² Curtea are acum pe plan 0,048510 m.² deci la desemnarea planului aveà:

$$0,048510 \times \frac{1,0000}{0,9702} = 0,05 \text{ m.}^2$$

Pe de altă parte, 1 m.², desemnat pe plan, corespunde cu $500 \times 500 = 250000$ m.² pe teren. Deci curtea are în realitate:

$$0,05 \times 250000 = 12500 \text{ m.}^2$$

La această problemă *foarte simplă* s'au primit foarte multe soluţii eronate. Erorile erau de două feluri: unele din cauză că dimensiile la desemnare s'au dedus sporind cu 2% şi 1% pe cele de acum, adică luând un patrat de 1 m. latură de acum, ca şi cum ar fi fost la desemnare un dreptunghiu de 1,02 m. lungime şi 1,01 m. lăţime; iar altele din cauză că s'au socotit ariile de pe teren numai de 500 ori mai mari ca cele de pe plan! S'a uitat că suprafeţele a două figuri asemenea sunt proporţionale cu patratul laturilor omoloage, ceeace este regretabil. I. I.

PROBLEMA 2968. *Dintr'un punct oarecare* O *din interiorul unui triunghiu* ABC, *se scoboară perpendiculare pe fiecare latură, pe care se iau, pornind din* O, *lungimi egale cu laturile corespunzătoare. Fie* A', B', C' *extremităţile acestor perpendiculare. Să se demonstreze că dreptele* OA' OB', OC', *sunt mediane în triunghiul* A'B'C'. *Să se cerceteze cazul când* O *este exterior triunghiului* A B C.

VICTOR BUCHNER.

Soluție și *generalizare* dată de D-nii: MIRON NICULESCU, (Student, București) și B. M. BARBĂLATT (Elev cl. VI, Liceul Bârlad).

Să considerăm cazul mai general, când proiecțiile se fac sub un acelaș unghiu α, când adică dreptele OA', OB', OC' sunt isoclíne față de laturile corespunzătoare ale triunghiului ABC. Vom lua apoi punctele A', B', C' astfel ca lungimile OA', OB', OC' să fie proporționale cu laturile BC, CA, AB, adică:

$$OA'/BC = OB'/CA = OC'/AB = k. \qquad (1)$$

Să însemnăm cu A_1, B_1, C_1 intersecțiile isoclinelor OA', OB', OC' cu laturile corespuzătoare BC, CA, AB. Patrulaterul AB_1OC_1 este inscriptibil, căci dacă unghiul AB_1O este α, unghiul AC_1O este $(180^0 - \alpha)$; deci și unghiul B_1OC_1 este suplimentar cu unghiul A al triunghiului ABC. Triunghiurile B'OC', C'OA', A'OB' au deci câte un unghiu suplimentar cu unul din unghiurile triunghiului ABC. Scriind că ariile acestor triunghiuri sunt proporționale cu produsele laturilor unghiurilor suplimentare, avem, ținând seamă și de relațiunile (1):

$$\text{aria } OB'C'/\text{aria } ABC = OB' \cdot OC'/AB \cdot AC = k^2$$

$$\text{aria } OC'A'/\text{aria } ABC = OC' \cdot OA'/BA \cdot BC = k^2$$

$$\text{aria } OA'B'/\text{aria } ABC = OA' \cdot OB'/CB \cdot CA = k^2.$$

Din aceste egalități, se vede imediat că ariile triunghiurilor OB'C', OC'A', OA'B' sunt echivalente, adică O este *centrul de greutate* al triunghiului A'B'C'.

Să presupunem acum, că O este exterior triunghiului ABC; de ex. situat în cuprinsul unghiului A și fie A_1 punctul unde isoclina OA' taie latura BC. Oricare ar fi sensul segmentului OA' pe această isoclină, relațiile de mai sus subsistă în întregime, numai că punctul O se va afla în interiorul sau exteriorul triunghiului A'B'C', după cum luăm segmentul OA' în sensul A_1O sau în sensul opus OA_1. Deci O va fi în primul caz *centrul de greutate*, iar în al doilea va fi *asociatul armonic* al centrului de greutate al triunghiului format de extremitățile A', B', C'.

Pentru cazul când O este exterior triunghiului A'B'C', avem trei puncte *asociate armonic* ale centrului de greutate, anume după cum O este în unghiul BAC, CBA sau ACB.

Observație. Punctul simedian are ca coordonate normale tocmai lungimile $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$. Rezultă că el va fi centrul de greutate al triunghiului său podar (E. Lemoine). Proprietatea găsită de Lemoine este deci un caz particular al teoremei demonstrate aici.

Miron Niculescu.

Au generalizat și rezolvat bine problema luând dreptele OA', OB', OC' isocline și proporționale cu laturile BC, CA, AB, D-nii: Constantin I. Georgescu, I. M. Șerbănescu și Adrian A. Bușilă (Elevi Liceul Mihai Viteazul), fără însă a preciză că în cazul când O este exterior triunghiului A'B'C', el este un asociat armonic al centrului de greutate.

D-nii: Tiberiu Popoviciu (Elev Cl. VII Liceul Moise Nicoară, Arad), Ion Huber și Micu Grünbaum (Elev Cl. VII Liceul Bârlad) au generalizat și rezolvat bine problema, luând perpendicularele OA', OB', OC' proporționale cu laturile triunghiului ABC, observând că problema subsistă și în cazul când OA', OB', OC' sunt paralele cu BC, CA, AB.

Au rezolvat bine problema, fără generalizare și fără a arătă ce este punctul O în cazul când el este exterior triunghiului A'B'C', D-nii: Gh. D. Popescu (Școala Politechnică București), Ioan Coșereanu (Timișoara), Florea Negretzu (Elev Cl. VII Liceul Pitești), Emil Drăgănescu (Huși), Nicolae G. Iosipescu (Elev Cl. VI Liceul Galați), Pincu Katz (Elev Cl. VIII Liceul Comunității israelite, Galați), D. C. Schileru (Craiova), Dumitru Măru (Elev Cl. VIII Liceul Galați), Costin Mihăilescu și Virgiliu Ghițescu (Elevi Liceul Mihai Viteazul), Ernest Oprișanu (Student, București), Eug. I. Bălan (Elev Cl. VII particulară). Teodor I. Popa (Elev Cl. VII Liceul Cantemir Vodă), Alexandru Școdrano (Elev Cl. VIII Liceul Durostor), Ștefan C. Solacoglu, Niculae Solomon (Timișoara), Emil Ștefănescu, Corneliu C. Ionescu (Cl. VII Liceul Cantemir Vodă), W. Solomon și Leon Weiss (Cl. VI Liceul Galați).

PROBLEMA 2975. *Se dă o elipsă cu centrul în* O *și focarele* F_1 *și* F_2.

Fie M *un punct al curbei,* 2φ *unghiul* F_1MF_2 *și* $2a$, $2b$, $2c$ *elementele elipsei. Să se demonstreze relațiunile:*

$$\overline{MF_1}^2+\overline{MF_2}^2-2\overline{MO}^2=2c^2$$

$$\overline{MF_1}\,\overline{MF_2}+\overline{MO}^2=a^2+b^2$$

$$\overline{MF_1}\,\overline{MF_2}=b^2\sec^2\varphi$$

$$\overline{MO}^2=a^2-b^2\operatorname{tg}^2\varphi$$

I. Fundățeanu.

Soluție dată de D-nii: I. Antoniu, B. M. Barbălatt, A. Bușilă, I. Coșereanu, I. Constantinescu, I. Dragomir, L. Focșeneanu, M. Focșeneanu, C. E. Georgescu, C. I. Georgescu, N.

GEORGESCU-ROEGEN, V. GHIȚEȘCU, GR. GOILAV, M. GRÜNBAUM, AL. NICULESCU, T. POPOVICIU, I. ȘERBĂNESCU, GH. STANCU, A. STOENESCU, I. STOENESCU, I. TEODORESCU și M. VASILIU.

1. Aplicând relația lui STEWART triunghiului F_1MF_2, obținem, simplificând cu c: $\overline{MF_1}^2+\overline{MF_2}^2-2\overline{MO}^2=c^2$. (1)

2°. Din relația: $\overline{MF_1}+\overline{MF_2}=2a$,

se obține, prin ridicare la patrat: $\overline{MF_1}^2+\overline{MF_2}^2+2\overline{MF_1}.\overline{MF_2}=4a^2$, sau ținând seama de (1):

$$\overline{MF_1}.\overline{MF_2}+\overline{OM}^2=2a^2-c^2=2a^2-(a^2-b^2)=a^2+b^2. \quad (2)$$

3. In triunghiul MF_1F_2, există relația:

$$4c^2=\overline{MF_1}^2+\overline{MF_2}-2\overline{MF_1}.\overline{MF_2}\cos 2\varphi,$$

ținând seama de (1): $c^2=\overline{MO}^2-\overline{MF_1}.\overline{MF_2}\cos 2\varphi$,

de unde (2): $2b^2=\overline{MF_1}.\overline{MF_2}(1+\cos 2\varphi)$

$$\therefore \quad \overline{MF_1}.\overline{MF_2}=b^2\sec^2\varphi. \quad (3)$$

4. Scăzând (3) din (2) se obține:

$$\overline{MO}^2=a^2+b^2-b^2\sec^2\varphi=a^2-b^2(\sec^2\varphi-1)=a^2-b^2\operatorname{tg}^2\varphi. \quad (4)$$

c. c. t. d.

Notă. 1. Soluții analitice deosebite, au dat D-nii E. OPRIȘANU și I. POPESCU-VĂLENI (studenți).

2. D-l E. OPRIȘANU arată că relația (3) se găsește și în Ex. de trig. par F. G. M. pag. 316, problema 480.

De asemenea, D-l I. TEODORESCU arată că relația (2) se găsește în Ex. de Géometrie par PH. ANDRÉ.

3. D-nii A. BUȘILĂ și I. ȘERBĂNESCU mai stabilesc relațiunea:

$$\overline{MF_2^1}+\overline{MF_2^2}=4a^2-2b^2\sec^2\varphi.$$

4. D-l I. COȘEREANU stabilește relațiuni analoage în cazul iperbolei.

PROBLEMA 2984. *Fie* A'B'C' *triunghiul ortic al triunghiului* ABC, A_1 *simetricul lui* A *în raport cu* A', B_1 *proiecția lui* A_1 *pe* BB' *și* C_1 *proiecția lui* A_1 *pe* CC'. *Să se arate că punctele* A', B_1, C_1 *sunt pe o linie dreaptă, a cărei direcție se cere a se preciza.*

B. M. BARBĂLATT.

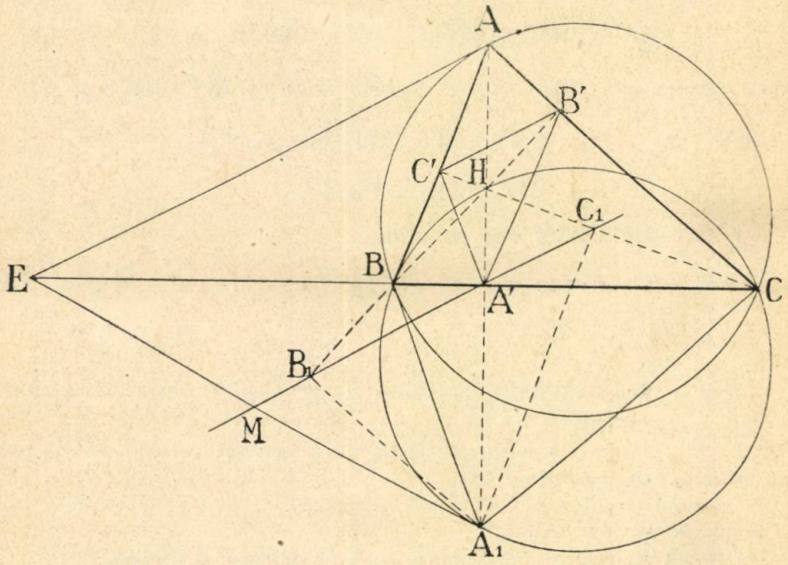
Soluție dată de D-nul ALEXANDRU ȘCODRANO (Elev Cl. VIII Liceul Durostor, Silistra).

Fie H ortocentrul triunghiului ABC. Triunghiurile ABC, A_1BC sunt egale și simetrice în raport cu BC. Avem deci

$$\sphericalangle BA_1C = \sphericalangle BAC = 180^0 - \sphericalangle BHC.$$

Patrulaterul A BHC este deci inscriptibil. Urmează de aici, că punctele B_1, A', C_1 determină dreapta lui SIMSON a triunghiului HBC în raport cu punctul A_1 de pe cercul circumscris acestui triunghiu.

Pentru a determină direcțiunea dreptei $B_1A'C_1$, ne vom servì de următoarea proprietate a dreptei lui SIMSON *).



„Dacă F este un punct al cercului circumscris unui triunghiu „ABC, H ortocentrul triunghiului, D punctul de intersecție al înăl- „țimei AA' corespunzătoare laturei BC cu cercul ABC, E intersecția „lui FD cu latura BC, atunci dreapta lui SIMSON corespunzătoare „punctului F este paralelă cu EH.

Să aplicăm această proprietate triunghiului HBC și înălțimei

*) A se vedeà: ROUCHÉ et DE COMBEROUSSE, Traité de Géométrie, VIII-e édition, première partie, p. 109, sau VI-e éd., seconde partie, p. 464.

HA' a acestui triunghiu. Ortocentrul triunghiului HBC este evident punctul A, iar punctul unde înălțimea HA' taie cercul HBC, este A_1. Dacă punctul F de pe cercul HBC coincide cu A_1, dreapta FA_1 devine tangentă în A_1 la cercul HBC, iar punctul E este punctul de intersecție al acestei tangente cu latura BC cărespunzătoare înălțimei HA'. Rezultă că dreapta lui SIMSON $B_1A'C_1$ este paralelă cu dreapta EA, care unește punctul E cu ortocentrul A al triunghiului HBC. Dar, din cauza simetriei figurei în raport cu BC, dreapta EA este tangentă în A la cercul circumscris triunghiului ABC.

Se știe însă că tangenta în A la cercul ABC este antiparalelă cu BC și paralelă cu B'C'. Deci dreapta lui SIMSON $B_1A'C_1$ este și ea paralelă cu B'C' și antiparalelă cu BC, iar $\sphericalangle C_1A'C = B - C$.

Au dat bune soluții, servindu-se de dreapta lui SIMSON, D-nii: MIRON NICULESCU (Student, București), CONST. I. GEORGESCU, I. M. ȘERBĂNESCU și ADRIAN A. BUȘILĂ (Elevi Liceul Mihai Viteazul), MICU GRÜNBAUM (Elev Cl. VII Liceul Bârlad), GH. D. POPESCU (Școala Politechnică), TIBERIU POPOVICIU (Elev Cl. VII Liceul Moise Nicoară, Arad), EMIL S. DRĂGĂNESCU (Huși), M. I. FOCȘENEANU (Elev Cl. VII Liceul Mănăstirea Dealului).

Alte soluții, deasemenea bune, au dat D-nii: NICU O. TAILER (Elev Liceul Codreanu, Bârlad), EUG. I. BALAN (Elev Cl. VIII particulară), D. C. SCHILERU (Craiova), CONST. E. GEORGESCU (Elev Cl. VIII, Liceul Cantemir Vodă).

Observații. 1) După o proprietate cunoscută a dreptei lui SIMSON**), se știe că dreapta $B_1A'C_1$ trece prin mijlocul M al dreptei EA_1.

V. C.

2) Dreapta $B_1A'C_1$ fiind paralelă cu B'C', unghiurile $A'B_1B'$, HB'C' sunt egale ca alterne interne. Se știe însă că înălțimile triunghiului ABC sunt bisectoarele triunghiului său ortic A'B'C'. Deci unghiul A'B'H este și el egal cu unghiul HB'C'. Rezultă că unghiurile $A'B_1B'$ și $A'B'B_1$ ale triunghiului $A'B_1B'$ sunt egale și prin urmare, triunghiul este isoscel. Avem deci $A'B_1 = A'B'$.

Analog demonstrăm că $A'C_1 = A'C'$. Deci:

**) ROUCHÉ et DE COMBEROUSSE, loc. cit.

„Dreapta lui Simson a punctului A_1 (simetricul vârfului A „față de BC) în raport cu triunghiul HBC, este paralelă cu latura „B'C' a triunghiului ortic A'B'C', iar segmentele $A'B_1$ și $A'C_1$, de„terminate pe această dreaptă, sunt respectiv egale cu celelalte două „laturi A'B' și A'C' ale triunghiului ortic".

Emil S. Drăgănescu.

Soluție și *generalizare* dată de D-nul Constantin I. Georgescu (Elev Cl. VIII Liceul Mihai Viteazul).

Problema este adevărată și în cazul mai general, când BB' și CC' sunt două isocline oarecare față de laturile CA și AB ale triunghiului. In adevăr, fie BB'_1 și CC'_1 două isocline, M punctul lor de intersecție, α unghiul pe care direcțiile BB'_1 și CC'_1 ale isoclinelor îl fac cu direcțiile laturilor AC și BA. In triunghiul BMC'_1, avem

$$\sphericalangle BMC = \sphericalangle BC'_1M + \sphericalangle MBC'_1 = \alpha + MBC'_1.$$

In triunghiul ABB'_1, avem

$$\sphericalangle MBC'_1 = 180^0 - A - \alpha.$$

Deci

$$\sphericalangle BMC = \alpha + (180^0 - A - \alpha) = 180^0 - A.$$

Punctul M se află deci pe segmentul de cerc capabil de unghiul $(180^0 - A)$ descris pe BC, cerc care trece prin ortocentrul H al triunghiului ABC și e circumscris patrulaterului $BMCA_1$. Proiecțiile B_2 și C_2 ale punctului A_1 pe isoclinele BB'_1 și CC'_1 sunt deci pe dreapta lui Simson $B_2A'C_2$ a punctului A_1 față de triunghiul MBC.

Să determinăm acum unghiul pe care $B_2A'C_2$ îl face cu latura BC.

Patrulaterul $A_1A'CC_2$ este inscriptibil, căci unghiurile $A_1A'C$ și A_1C_2C sunt drepte; deci

$$\sphericalangle C_2A'C = \sphericalangle CA_1C_2 = 90^0 - \sphericalangle A_1CC_2$$

$$\therefore \quad \sphericalangle C_2A'C = 90^0 - (\sphericalangle BCC_2 - \sphericalangle BCA_1)$$

$$\therefore \quad \sphericalangle C_2A'C = 90^0 + C - \sphericalangle BCC_2.$$

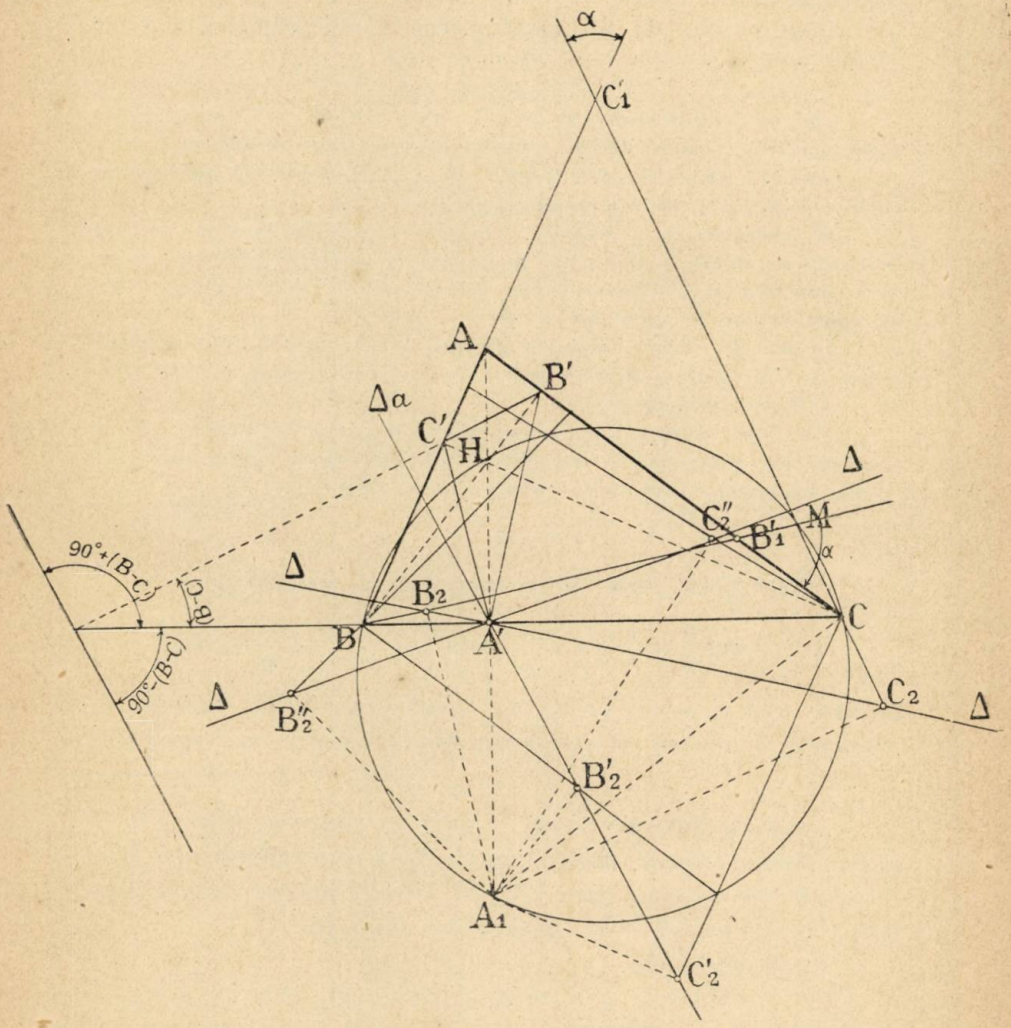
Dar, în triunghiul BCC'_1, avem

$$\sphericalangle BCC_2 = B + \alpha$$

și deci

$$\sphericalangle C_2A'C = 90^0 - \alpha - (B - C). \qquad (1)$$

Când $\alpha = 90^0$, suntem în cazul problemei propuse.



Notă. Să însemnăm cu Δ dreapta determinată de proiecțiile lui A_1 pe laturile triunghiului BMC (figura presupune că unghiul B > C).

Dacă unghiul $\alpha = 0$, isoclinele BB'_1 și CC'_1 devin paralele cu AC și BA. Punctele B_2 și C_2 devin B'_2 și C'_2, iar formula (1) ne dă

$$\sphericalangle\, C'_2A'C = 90^0 - (B - C),$$

adică dreapta Δ este perpendiculară pe latura B'C' a triunghiului ortic A'B'C'.

Dacă $\alpha = 90^0 - (B - C)$, atunci $\sphericalangle C_2A'C$ este nul, iar dreapta Δ coincide cu BC.

Dacă $\alpha > 90^0 - (B - C)$, atunci punctul C_2 trece deasupra, iar C_2 de-desuptul lui BC; formula (1) devine în acest caz:

$$\sphericalangle C''_2A'C = \alpha - 90^0 + (B - C). \qquad (2)$$

Când $\alpha = 90^0$, formula (2) ne dă $\sphericalangle C''_2A'C = (B - C)$, adică dreapta Δ este paralelă cu latura B'C' a triunghiului ortic (cazul problemei).

Când $\alpha = 180^0$, $\sphericalangle C_2A'C = 90^0 + (B - C)$, isoclinele sunt din nou paralele cu CA şi BA, iar Δ e perpendiculară pe B'C'.

Să însemnăm cu Δ_a dreapta lui Simson a punctului A_1 când isoclinele sunt paralele cu AC şi BA şi fie Δ_b, Δ_c, dreptele analoage, obţinute cu ajutorul punctelor B_1 şi C_1 simetricele vârfurilor B şi C ale triunghiului ABC, în raport cu laturile opuse CA şi AB.

După cele stabilite mai sus, dreapta Δ_b trece prin B' şi e perpendiculară pe C'A'. Analog Δ_c trece prin C' şi e perpendiculară pe A'B'. Avem deci următoarea proprietate:

„Dreptele Δ_a, Δ_b, Δ_c, care unesc proiecţiile punctelor A_1, B_1, C_1, pe pa-„ralelele duse prin vârfurile triunghiului ABC la laturile opuse, sunt înăl-„ţimile triunghiului ortic A'B'C' al triunghiului ABC".

V. Cristescu.

PROBLEMA 2988. *Să se demonstreze relaţiunea:*

$$\frac{1}{a}\left(\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}\right)\operatorname{cotg}\frac{A}{2}+\frac{1}{b}\left(\frac{1}{r_c}+\frac{1}{r_a}\right)\operatorname{cotg}\frac{B}{2}+\frac{1}{c}\left(\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}\right)\operatorname{cotg}\frac{C}{2}=\frac{1}{r^2}$$

în care A, B, C, a, b, c, r, r_a, r_b, r_c *sunt unghiurile, laturile, razele cercului înscris şi exînscrise unui triunghiu oarecare* ABC.

Const. I. Georgescu.

I. Soluţie dată de D-nii: Tiberiu Popoviciu (Elev Cl. VII Liceul Moise Nicoară, Arad), Sorin Nicolescu (Bucureşti), Florian Er. Georgescu (Elev Cl. VII Liceul Cantemir Vodă), Emil Bercovici (Elev Cl. VIII Liceul Matei Basarab).

Avem relaţiunile:

$$S = (p-a)r_a = (p-b)r_b = (p-c)r_c,$$

cu ajutorul cărora obţinem:

$$1/r_b + 1/r_c = (p-b)/S + (p-c)/S = (2p-b-c)/S = a/S,$$

$$\frac{1}{a}\left(\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}\right)=\frac{1}{S}.$$

Avem însă

$$r_a = p\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}A \qquad \therefore \qquad \operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}A = p/r_a$$

şi prin urmare:

$$\frac{1}{a}\left(\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}\right)\operatorname{cotg}\frac{1}{2}A=\frac{p}{S.r_a}=\frac{1}{r.r_a}.$$

Găsim în mod analog:

$$\frac{1}{b}\left(\frac{1}{r_c}+\frac{1}{r_a}\right)\operatorname{cotg}\frac{1}{2}B=\frac{1}{r.r_b}\quad,\quad\frac{1}{c}\left(\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}\right)\operatorname{cotg}\frac{1}{2}C=\frac{1}{r.r_c}.$$

Avem deci:

$$\sum\frac{1}{a}\left(\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}\right)\operatorname{cotg}\frac{1}{2}A=\frac{1}{r}\left(\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}\right)=\frac{1}{r}\cdot\frac{1}{r}=\frac{1}{r^2}.$$

II. Soluţie dată de D-nii: I. St. Teodorescu (Liceul Ploeşti), Cristea P. Goilav (Bucureşti), Mircea Vasiliu, I. Ionescu-Brezuica (Elev Cl. VII Liceul Ioniţă Asan, Caracal), Ion Constantinescu (Cl. VII), Andrei Miclescu (Şcoala de Artilerie, Timişoara), Ştefan Solacoglu (Elev, Bucureşti), Ştefan Epure (Elev Cl. VII Liceul Buzău), Conrad H. Schönfeld (Elev Cl. VI Liceul Laurian, Botoşani), Mihail I. Focşeneanu (Elev Cl. VII Liceul Mănăstirea Dealului), Aurel G. Panaitescu şi Alex. I. Vasiliu (Elevi Cl. VII Liceul N. Bălcescu, Brăila), M. Bogdan şi Dobrescu-Băbici (Elevi Cl. VII Liceul Ioniţă Asan, Caracal), Mircea I. Simionescu (Liceul Internat, Iaşi), Const. E. Georgescu (Elev Cl. VIII Liceul Cantemir Vodă), L. Focşăneanu, Mihai D. Vasilescu (Elev Cl. VIII Liceul Craiova), Edgar C. Russu (Elev Cl. VII Liceul Internat, Iaşi), Dumitru Samoilă (Elev Cl. VII Liceul Câmpina), Marin G. Dumitrescu (Elev Cl. VI Liceul Craiova), Petre A. Mirescu (Elev Cl. VII Liceul Lazăr), Longin I. Ionescu (Elev Cl. VIII particulară Liceul Ioniţă Asan, Caracal).

Din relaţiile

$$S=(p-a)r_a=(p-b)r_b=(p-c)r_c$$

deducem $\frac{1}{a}\left(\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}\right)=\frac{1}{a}\cdot\frac{(p-b)+(p-c)}{S}=\frac{1}{a}\cdot\frac{a}{S}=\frac{1}{S}$, etc.

Primul membru al relaţiei propuse devine deci succesiv

$$\frac{1}{S}(\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}A+\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}B+\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}C)=$$

$$\frac{1}{S}\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}A\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}B\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}C=\frac{1}{S}\cdot\frac{p}{r}=\frac{1}{r^2}.$$

III. Soluție dată de D-nii: Ioan M. Ioniță (Elev Școala Militară de Artilerie, Timișoara), N. P. Arcadian (Elev Cl. VII Liceul diu Caracal), Ion Coșereanu (Timișoara) Al. I. Stoenescu și Ernest G. Oprișanu (Studenți, București), Ioan M. Șerbănescu (Elev Cl. VIII Liceul Mihai Viteazul), B. M. Barbălatt (Elev Cl. VI Liceul Bârlad), Ovidiu G. Popea, Ioan Stoenescu (Elev Cl. VII Liceul Cantemir Vodă), Alex. Tauber (Elev Cl. VII, Liceul Laurian, Botoșani), N. A. Stănescu (Elev Cl. VIII Liceul Craiova), Adrian A. Bușilă (Elev Cl. VII Liceul Mihai Viteazul). Ion S. Antoniu și E. Iliescu (Elevi Cl. VII Liceul Militar Mânăstirea Dealuiui), D. C. Schileru, Traian A. Dordea (Elev Cl. VIII, particular), Teodor I. Popa (Elev Cl. VII Liceul Cantemir Vodă), David M. Blumenfeld (Elev Cl. VI Liceul Laurian, Botoșani), Emil Ștefănescu (Elev Cl. VII Liceul Spiru Haret), Pincu Katz (Elev Cl. VIII Liceul Comunității Israelite, Galați), Virgil Ghițescu (Elev Lic. Mihai Viteazul), Șerban C. Solacolu (Elev Cl. VI Liceul Matei Basarab).

Ținând seamă că avem relațiunile:

$$1/r_b + 1/r_c = 2/h_a\,, \quad 1/r_c + 1/r_a = 2/h_b\,, \quad 1/r_a + 1/r_b = 2/h_c\,,$$

$$a\,.\,h_a = b\,.\,h_b = c\,.\,h_c = 2\,S\,,$$

$$\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}A = (p-a)/r, \quad \operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}B = (p-b)/r, \quad \operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}C = (p-c)/r,$$

primul membru al relației propuse devine

$$\frac{1}{S\,.\,r}\Big[(p-a)+(p-b)+(p-c)\Big] = \frac{p}{S\,.\,r} = \frac{1}{r^2}\,.$$

Alte soluții de D-nii: A. Popeanu (Constanța), Alex. Școdrano (Elev Cl. VIII Liceul Durostor, Silistra), Dumitru Samoilă, Alexandru Pamula (Elev Cl. VII Liceul Botoșani), Ioan N. Dragomir (Elev Cl. VII Liceul Cantemir Vodă), M. M. Gogălniceanu (Elev Cl. VIII, Liceul N. Bălcescu, Brăila).

Notă. Avem și relațiunile analoage:

$$\sum \frac{1}{a}\left(\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}\right)\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}A = \frac{1}{p^2}\left(\frac{4R}{r}+1\right).$$

(Ioan Stoenescu și Tiberiu Popoviciu).

$$\sum \frac{a}{r_a}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}A = 2.$$

(Tiberiu Popoviciu).

$$\sum \frac{1}{a}\left(\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}\right)\sin A = \frac{1}{Rr}.$$

(Fl. Er. Georgescu și L. Focșăneanu).

$$\sum \frac{1}{a}\left(\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}\right)\sin 2A = \frac{2}{R^2}.$$

(Fl. Er. Georgescu).

$$\sum a\left(\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}\right)\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}A = 4\left(\frac{R}{r}+1\right).$$

(D. C. Schileru).

EXERCIŢII.

23. Dacă p este număr prim, avem:

$$(n-1)!\,(p-n)! - (-1)^n = \mathcal{M}\,p.$$

E. Ştefănescu.

R. Pentru $n=2$, egalitatea se verifică, de oarece înmulţind cu $(p-1)$, avem: $(p-1)[(p-2)!-1] = (p-1)! - p + 1 = \mathcal{M}\,p$, după teorema lui Wilson. Inlocuim n cu $(n+1)$ şi găsim, înmulţind cu $(p-n) < p$:

$$(p-n)[n!\,(p-n-1)! - (-1)^{n+1}] = n!\,(p-n)! + p(-1)^n - n(-1)^n$$

$$= n[(n-1)!\,(p-n)! - (-1)^n] + p(-1)^n = \mathcal{M}\,p,$$

după relaţia dată. Teorema e deci adevărată pentru orice n.

24. Să se afle numerele de trei cifre, în care pătratul primei cifre este egal cu media contra armonică a celorlalte două.

I. Stoenescu.

R. Ecuaţia problemei este:

$$a^2 = (b^2+c^2) : (b+c).$$

Membrul al doilea fiind întreg, o condiţie ar fi $b=0$, sau $c=0$.
În această ipoteză, găsim soluţiile:

101, 110, 204 240, 309, 390.

25. Să se arate că dacă: $a+b+c=0$,
avem şi identităţile:

$$a^3+b^3+c^3+a^2b+a^2c+b^2c+b^2a+c^2a+c^2b=0$$

$$a^3+b^3+c^3-3abc=0$$

Emil Ştefănescu.

R. Prima identitate se poate scrie:

$$a^3+b^3+c^3+a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b),$$

sau:

$$a^3+b^3+c^3+ab(a+b)+bc(b+c)+ca(a+c)$$

expresii identic nule, căci $b+c=-a$, etc.

26. Să se arate că expresiunea:

$$E = \sum_{i=1}^{i=n} m_i^2 - n$$

se divide cu 8, m_i fiind numere impare. Corneliu Ionescu.

R. Dacă $m_i = 2k_i + 1$, expresia se poate scrie:

$$E = \sum_{i=1}^{n} (2k_i + 1)^2 - n = 4\sum k_i(k_i + 1) + n - n = 4\sum k_i(k_i + 1) = M8.$$

27. Se consideră toate poligoanele de n laturi, în care produsul perimetrului şi al tuturor laturilor e constant; poligonul cu perimetru minimum trebue să aivă toate laturile egale.

R. In adevăr, dacă în poligonul de laturi $a, b, c, \ldots l$, am avea $a \neq b$, se poate găsi un poligon de laturi $x, x, c \ldots l$, care are perimetrul mai mic ca cel dintâi. x e rădăcina pozitivă a ecuaţiei: P. SERGESCU.

$$(2x + c + d + \ldots + l)\, x^2 - ab\,(a + b + c + \ldots + l) = 0,$$

care rădăcină e evident cuprinsă între 0 şi $(a + b)/2$. Lungimea unei laturi a poligonului de perimetru minimum e rădăcina pozitivă a ecuaţiei:

$$n\, x^{n+1} - \text{Const} = 0.$$

28. Un trapez ABCD este inscris într'un cerc, al cărui centru e fix, dar a cărui rază este variabilă. Fie M intersecţia diagonalelor AC şi BD ale trapezului. Să se arate că axul radical al cercurilor circumscrise triunghiurilor MAD şi MBC trece printr'un punct fix. Când acest ax va avea şi o direcţie fixă? M. B. BARBĂLATT.

R. Trapezul fiind inscris într'un cerc, este isoscel; deci perpendiculara dusă din M pe laturile paralele AB şi CD ale trapezului, este o axă de simetrie a figurei şi trece prin centrul cercului. Acest ax va avea o direcţie fixă, când laturile paralele ale trapezului vor avea o direcţie dată.

29. Să se construiască un triunghiu cunoscând un vârf A, centrul de greutate G şi centrul cercului circumscris O. A MICLESCU.

R. Unim A cu G şi prelungim pe AG cu o lungime GM egală cu jumătatea lui AG. M va fi mijlocul laturei BC, iar vârfurile B şi C se obţin luând intersecţia perpendicularei dusă în M pe OM cu cercul descris din O ca centru cu OA ca rază.

30. Notaţiile între elementele unui triunghiu fiind cele obişnuite, să se demonstreze relaţiile:

$$a^2 \sec^2\tfrac{1}{2}A + b^2 \sec^2\tfrac{1}{2}B + c^2 \sec^2\tfrac{1}{2}C = 8R(2R - r)$$

$$a^2 \operatorname{cosec}^2\tfrac{1}{2}A + b^2 \operatorname{cosec}^2\tfrac{1}{2}B + c^2 \operatorname{cosec}^2\tfrac{1}{2}C = 8R(4R + r).$$

I. N. DRAGOMIR.

R. Avem $a^2 \sec^2\tfrac{1}{2}A = \dfrac{4a^2 \sin^2\tfrac{1}{2}A}{4\sin^2\tfrac{1}{2}A \cos^2\tfrac{1}{2}A} = 4\dfrac{a^2}{\sin^2 A}\sin^2\tfrac{1}{2}A = 16R^2 \sin^2\tfrac{1}{2}A$,

astfel că primul membru al primei relaţiuni devine:

$$16R^2(\sin^2\tfrac{1}{2}A + \sin^2\tfrac{1}{2}B + \sin^2\tfrac{1}{2}C) = 16R^2\left(1 - \frac{r}{2R}\right) = 8R(2R - r).$$

Analog, primul membru al relaţiei a doua este:

$$16R^2(\cos^2\tfrac{1}{2}A + \cos^2\tfrac{1}{2}B + \cos^2\tfrac{1}{2}C) = 16R^2\left(2 + \frac{r}{2R}\right) = 8R(4R + r).$$

PROBLEME PROPUSE.

3011. Se transformă $3/2^n$ şi $5/2^n$ în fracţii zecimale. Care sunt ultimele patru cifre zecimale dela dreapta?

E. ŞTEFĂNESCU.

3012. Dându-se numărul:

$$N = 3!!!$$

Se cere:

1. Numărul zerorilor cu care se termină.
2. Cel mai mare exponent al lui 3, care divide pe N.
3. Numărul de cifre pe care le are N.
4. Eliminându-se zerorile numărului N, se cere valoarea numerică a cifrei dela dreapta a numărului astfel obţinut.

LT. I. LINTEŞ.

3013. Să se rezolve sistemul:

$$\frac{a\,x\,(1+y^2)+b\,y\,(1+x^2)}{(1+x^2)\,(1+y^2)} = m$$

$$\frac{(1-x\,y)^2-(x+y)^2}{(1+x^2)\,(1+y^2)} = n$$

şi să se arăte că el se poate utilizà pentru soluţia algebrică a problemei (Exercices de Géométrie F. G. M. page 61):

„Printr'unul din punctele de intersecţie a două cercuri, să se ducă o secantă de lungime dată".

G. I. DUMITRESCU.

3014. Să se calculeze sumele:

$$S_1 = \sum_{i=p}^{i=n-1} (2n+i)\,(i-p+1), \qquad S_2 = \sum_{i=1}^{i=n-1} (2n+i)\,(i-p+1)$$

TH. ANGHELUŢĂ.

3015. Dându-se:

$$\frac{x_1-a_1}{b_1-a_1} = \frac{x_2-a_2}{b_2-a_2} = \cdots = \frac{x_n-a_n}{b_n-a_n},$$

unde:

$$a_1 < b_1\ ,\ a_2 < b_2, \ldots\ldots,\ a_n < b_n,$$

să se arate că dacă: $x_1 < a_1$, avem: $x_2 < a_2, \ldots\ldots, x_n < a_n$,

iar dacă $x_1 > b_1$, avem: $x_2 > b_2, \ldots\ldots, x_n > b_n$.

Ce se întâmplă când: $a_1 < x_1 < b_1$?

B. IG. BAIDAFF.

3016. Trei cercuri oarecare se întretaie două câte două în şase puncte A_1, B_1, C_1 şi A_2, B_2, C_2. Să se arate că cele şase drepte A_1B_1, A_2B_2, B_1C_1, B_2C_2, C_1A_1, C_2A_2 care trec prin aceste puncte şi care nu sunt coarde comune, se taie două câte două în trei puncte în linie dreaptă.

ION FUNDĂŢEANU.

3017. Să se traseze dreapta ce uneşte două puncte date, numai cu ajutorul unei rigle mai scurtă ca distanţa dintre cele două puncte.

ŞTEFAN S. MIHĂIESCU.

3018. Fie ABC, A'B'C' două triunghiuri omologice înscrise într'un acelaş cerc.

Fie A_1, B_1, C_1 proiecţiile vârfurilor A, B, C respectiv pe laturile B'C', C'A', A'B'. Să se demonstreze că triunghiurile ABC şi $A_1B_1C_1$ sunt ortologice.

MICU GRÜNBAUM.

3019. Se dă o cardioidă al cărei punct dublu este O şi axa de simetrie Ox. Fie A, B, C trei puncte arbitrare luate pe cardioidă. Prin O şi fiecare din punctele A, B, C trec trei cercuri C_1, C_2, C_3, respectiv tangente în punctele A, B, C la cardioidă. Să se demonstreze că:

1°. Punctele de intersecţie M_1, M_2, M_3 ale cercurilor C_1, C_2, C_3 sunt trei puncte coliniare.

2°. Punctele O, C_1, C_2, C_3 sunt conciclice, centrul ω al cercului fiind pe axa Ox.

M. NICOLAU.

3020. Un tată, la moartea lui, voeşte să se împartă averea în trei părţi egale la cei doi fii ai lui şi Academiei Române, însă ca moşia să rămâie întreagă, în urmă, acestei instituţiuni. Câţi ani trebuie să o exploateze fiul său cel mare, câţi ani cel mic şi după câţi ani va trece în posesiunea Academiei? Se va presupune că moşia aduce un venit net de 5%.

I. IONESCU.

Dela apariția ultimului număr s'au primit spre publicare: articole (A), note (N), cereri (C), exerciții (E), probleme propuse (P), recreațiuni (R) și probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela D-nii *):

Adam I. M. (2990, 79, 97, E.); *Antoniu A.* (2966, 90); *Arcadian P. N.* (2965, 66, 77, 90, 97); *Atanasiu I. D.* (2964, 79, 90); *Bălan I. E.* (2938, 52, 72, 76, 82, 87, 90, 3002, E); *Barbălatt M. B.* (2982, 97, 3006, P. R); *Blumenfeld D.* (2965, 77, 79, 3002); *Bogdan M.* (2972); *Brătescu M.* (2966, 79, 97); *Brătescu N.* (2964, 76); *Buşilă A.* (2905, 22, 64, 74, 75, 81, 82); *Cădere R.* (2966); *Constantinescu I.* (2972, 79, 97); *Coşereanu I.* (2993, 97, E); *Danilo S.* (2990); *Dimitriu M.* (2990); *Dobrescu B.* (2972); *Dragomir I.* (2970); *Dvoirin L.* (2964, 87, 90); *Fântâneanu I.* (2990, E); *Florescu I.* (2813); *Focşeneanu M.* (2970); *Georgescu C.* (2980); *Georgescu E. C.* (2905, 90, 97, 98); *Georgescu I. C.* (2982, 87, 89, 94, 97, 3004, P); *Georgescu F.* (2905, 72, 80, 98, E, P.); *Georgescu M.* (2966); *Georgescu Gorjan St.* (2938, 64, 79, 87, P.); *Ghiţescu V.* (2997, 3002, 06); *Grünbaum M.* (3003); *Huber I.* (2946); *Ionescu B.* (2972); *Ionescu Carol* (3009); *Ionescu Cornel* (2964); *Ionescu D. G.* (2964, 65); *Ionescu Longhin* (2922, 79, E); *Ioniţă I.* (2966); *Iosipescu N.* (2979, 87); *Katz M. P.* (2965, 77, 3002); *Katz S.* (2965, 77, 90); *Kiriţescu I.* (3009); *Lazarovici I.* (2957, 64, 90); *Marcus F.* (2965, 77, E, N.); *Măru D.* (2965, 76, 79, 81, P.); *Mateescu G.* (2979, 90, 97); *Mereuţă C.* (2964, 76, 79, 3002); *Miclescu A.* (2972); *Mihăescu D. G.* (2997); *Mihăilescu C.* (3002); *Mirescu P.* (2997, 3006); *Moisil G.* (2861); *Munteanu L.* (2976, 90); *Negretzu F.* (2972, 90, 97, 98, R.); *Niculescu M.* (E.); *Orănescu O.* (E, P.); *Panaitescu A.* (2972); *Pinchis M.* (2957, 64, 66, 76, 87, 90, 3002); *Popa T.* (2901, 05, 38, 66, 90, 94, E, N.); *Popea O.* (2965, 77, 97, E.); *Popeanu A.* (3006, E.); *Popovici Cr. I.* (2979, 90, 97); *Popoviciu T.* (2972, 93); *Potop A.* (2981); *Rabinovici F.* (3006); *Rosenfeld L.* (E, N.); *Sager S.* (2990); *Schönfeld C.* (2990, E.); *Şcodrano A.* (3006); *Şerbănescu I.* (2910, 80); *Solacolu S.* (2965); *Solacolu C. T.* (2979); *Solomon N.* (2964); *Solomon W.* (2861, 922, 64, 65, 66, 67, 77, N, P.); *Ştefănescu E.* (2905, 77, 80, 3002, 06, E, P.); *Tailer N.* (2977, 3002); *Tauber A.* (3002, 06, N.); *Teodorescu I.* (2861, 938); *Vasilache S.* (2964, 79); *Vasilescu M.* (2861); *Vlad O.* (2964); *Weiss L.* (2976, 87); *Weiss S.* (2964, 79); *Witzman-Vania-Marcu* (2997); *Zaider Moise* (2973).

*) **Articole, note, cereri, exerciții şi probleme propuse nu se primesc spre publicare decât dela abonații „Gazetei Matematice".**

Problemele de geometrie rezolvate cât şi cele de propus a căror soluție nu va fi însoțită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în considerațiune.

Soluțiunile primite în ultimul timp la problemele: 1948, 2191, 227, 78, 318, 77, 81, 440, 43, 58, 553, 75, 85, 86, 98, 604, 10, 15, 40, 51, 61, 64, 74, 83, 91, 92, 701, 815, 25, 29, 49, 50, 72, 79, 87, 95, 903, 10, 13, 18, 20, 29, 31, 32, 33, 39, 60, 71, 73, 78, 79, 86, 91 şi 92 nu au fost încă examinate de redactorii cărora le-au fost repartizate.

Colecțiunea „GAZETEI MATEMATICE“

27 VOLUME

Colecțiunea întreagă . . . . . Lei 1000,—

Se vând și volume izolate, cu prețul de 50 lei, afară de volumele: I, X, XV, XIX, XX și XXI care se vând numai cu colecțiunea întreagă.

Biblioteca „GAZETEI MATEMATICE“

1. **I. Ionescu, G. Țițeica, A. G. Ioachimescu** și **V. Cristescu**, *Culegere de Probleme de Aritmetică, Geometrie, Algebră și Trigonometrie. (520 pag. cu 3381 probleme).* (Epuizată).

2. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de probleme de algebră* (teoria ecuaților), (82 pag. cu 462 probleme). (Epuizată).

3. **N. Abramescu,** *Curs de algebră superioară* pentru cl. VIII reală, *Ediția III revăzută și adăogită,* 1921 . . . Lei 30,—

4. **A. G. Ioachimescu** și **G. Țițeica,** *Culegere de probleme de mecanică și geometrie analitică* (222 pag. cu 825 probleme și o planșă) (Epuizată) . . . . . Lei 20,—

5. **Tr. Lalescu** și **Șt. N. Mirea,** *Culegere de probleme de geometrie descriptivă și cosmografie* . . . . . Lei 15,—

6. **Tr. Lalescu,** Tratat de Geometrie analitică,

Fascicola I (Epuizată) . . . . . Lei 10,—

Idem, Fascicola II Conice . . . . . Lei 20,—

Idem, Fascicola III Cuadrice . . . . . Lei 20,—

7. **Gh. Lazăr,** *Trigonometria drept liniară* (după cursul predat de Gh. Lazăr la colegiul Sf. Sava) . . . . . Lei 5,—

8. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de probleme de Algebră,* ediția II-a revăzută și adăogită, 400 pagini cuprinzând 1765 probleme . . . . . Lei 60,—

La aceste prețuri se vor adăogà taxele poștale pentru expediție.

Biblioteca Technică a „GAZETEI MATEMATICE“

(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

I. Ionescu, *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcțiune și a principiilor de calcul.* Volum legat, cuprinzând 128 de pagini și 15 tabele numerice practice, pentru proiectarea construcțiunilor de beton armat. Lei 12,—

Gazeta Matematică apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 50 lei anual, se plătește înainte și începe la 15 Septemvrie, ori când s'ar face achitarea lui în cursul anului și nu se face pe termene mai scurte de un an. Abonamentele, schimbările de adrese, reclamațiunile și cererile pentru cărți din biblioteca «Gazetei Matematică», se vor trimete D-lui: **I. D. Teodor,** Inginer Inspector General, Directorul General al Regiei Monopolurilor Statului (adresa: Fabrica de Chibrituri, București).

Shimburile de reviste, uvrage pentru recenzii și orice alte cereri, afară de cele privitoare la cassierie și expediție, se vor trimite D-lui Inginer Inspector General I. IONESCU, Str. Căluşei 23, București.

GAZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

ANUL XXVIII.

NUMĂRUL 6. — FEBRUARIE 1923

SUMARUL

1. O expresiune remarcabilă a câtului şi restului împărţirei a două polinoame. Condiţia de divizibilitate a două polinoame oarecare. *Th. Angheluţă*
2. Raportul Comisiunei pentru acordarea premiului „Vasile Conta" pe intervalul 1 Iulie 1920 — 1 Iulie 1921.
3. Note Matematice: 32 — 37.
4. Bibliografie.
5. Cereri: 97 — 98.
6. Probleme rezolvate: 1766, 2296, 2639, 2760, 2935, 2964, 2967, 2976, 2987.
7. Exerciţii: 31 — 40.
8. Probleme propuse: 3021 — 3030.
9. Rectificări.

BIBLIOTECA CENTRALĂ „ASOCIAŢIUNII" SIBIU

ABONAMENTUL 50 LEI PE AN.

BUCUREŞTI
IMPRIMERIA FABRICILOR DE CHIBRITURI ŞI TIMBRE - FILARET
1923

SPRE ŞTIINŢA

Gazeta Matematică se publică de către **Societatea „Gazeta Matematică“** având sediul în Bucureşti, compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie de 3 membri, care pentru anul XXVIII se compune din D-nii **N. I. Georgescu,** Inginer-Şef, Director General al Serviciului Imbunătăţirilor Funciare, **Tr. Lalescu,** Doctor în Matematici, Profesor Universitar şi **I. D. Teodor,** Cassier, Inginer Inspector General, Profesor la Şcoala Politechnică, Directorul General al Regiei Monopolurilor Statului.

Manuscrisele destinate „Gazetei Matematice“ se vor trimite D-lui GEORGE BORNEANU, Inginer, sub-directorul Fabricilor de chibrituri şi timbre, Bucureşti.

Se pot trimite şi pe acelaş nume în Str. Sf. Constantin 31, Bucureşti.

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse şi exerciţiile se vor redijà în conformitate cu instrucţiunile se se pot procurà dela D-l Cassier *I. D. Teodor,* in schimbul sumei de 1 (un) leu ce se poate trimite prin poştă.

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evità confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare : numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie.

In vederea sporirii taxelor poştale, corespondenţii pot trimete de aci înainte manuscrisele scrise pe ambele pagini ale unei foi, fără a lăsà spaţii albe pe margini sau dedesubt, tăind foile în consecinţă.

Nu se admite însă a se tratà pe aceeaşi foaie mai multe chestiuni sau probleme.

Articolele, notele, problemele propuse, exerciţiile, recreaţiile ce se trimit pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICĂ“, trebue să fie originale, iar nu luate din cărţi sau reviste speciale de matematici.

Probleme nerezolvate : 171, 485, 581, 691, 886, 87, 914, 44, 1000, 08, 40, 56, 58, 83, 92, 146, 62, 78, 80, 214, 36, 70, 71, 87, 97, 99, 355, 64, 67, 77, 79, 84, 86, 98, 99, 412, 50, 82, 90, 553, 84, 87, 626, 37, 50, 76, 79, 80, 711, 29, 33, 35, 53, 64, 90, 835, 76, 82, 84, 905, 06, 14, 29, 44, 45, 49, 59, 73, 79, 87, 2003, 04, 16, 17, 32, 70, 74, 94, 111, 12, 26, 56, 70, 216, 300, 47, 53, 91, 92, 95, 408, 14, 20, 22, 28, 30, 31, 34, 39, 40, 43, 44, 48, 53, 56, 58, 59, 61, 62, 66, 69, 71, 73, 77, 79, 81, 84, 87, 91, 97, 500, 01, 02, 03, 10, 11, 12, 24, 29, 32, 37, 39, 43, 44, 45, 46, 53, 55, 56, 60, 69, 71, 75, 77, 78, 80, 82, 87, 91, 93, 96, 97, 98, 99, 602, 07, 08, 10, 13, 23, 35, 38, 41, 43, 44, 45, 47, 50, 55, 56, 58, 60, 65, 69, 71, 75, 84, 86, 92, 93, 94, 95, 96, 709, 12, 13, 17, 27, 28, 35, 38, 43, 45, 47, 52, 58, 59, 64 69, 78, 80, 89, 96, 809, 14, 16, 27, 29, 41, 51, 53, 57, 60, 65, 86, 88, 89, 98, 902, 09, 12, 15, 16, 26, 32, 36, 45, 50, 53, 56, 59, 61, 69, 83, 91, 95, 3000, 01, 05, 07, 08, 10, 13, 19, 20.

La redacţia revistei **„Gazeta Matematică“** *se primesc abonamente pentru* **„Revista de matematicas y fisicas elementales“** *din Buenos-Aires. Costul unui abonament anual este de 40 lei.*

O EXPRESIUNE REMARCABILA A CATULUI ŞI RESTULUI IMPARŢIREI A DOUA POLINOAME. CONDIŢIA DE DIVIZIBILITATE A DOUA POLINOAME OARECARE.

Mai întâi, o observaţiune pregătitoare. Fie un sistem liniar de n ecuaţii cu n necunoscute:

$$(1) \qquad a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = b_i \quad , \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

şi presupunem că determinantul necunoscutelor

$$(2) \qquad D = \| a_{ik} \| \neq 0,$$

cu alte cuvinte sistemul (1) admite o soluţie unică finită. Să ne închipuim că, pe lângă sistemul dat, avem o expresiune liniară în raport cu aceleaşi variabile:

$$a_{n+1,1}x_1 + a_{n+1,2}x_2 + \ldots + a_{n+1,n}x_n - b_{n+1}$$

şi că vrem să determinăm valoarea acestei forme, când în loc de $x_1, x_2, \ldots, x_n$, punem soluţia sistemului (1). Pentru aceasta, însemnăm valoarea căutată prin X; vom aveà atunci următorul sistem liniar de $n+1$ ecuaţii cu $n+1$ necunoscute, pe care îl vom scrie desvoltat, pentru mai multă claritate:

$$(3) \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \\ a_{n+1,1}x_1 + a_{n+1,2}x_2 + \ldots + a_{n+1,n}x_n - X = b_{n+1}. \end{cases}$$

Se observă imediat că determinantul sistemului (3) este diferit de zero, conform condiţiei (2). Prin urmare, este aplicabilă formula lui CRAMER şi în particular vom aveà pentru X,

$$X = -\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} & b_n \\ a_{n+1,1} & a_{n+1,2} & \ldots & a_{n+1,n} & b_{n+1} \end{vmatrix}}{D}.$$

Aceasta era observaţiunea de făcut şi enunţarea rezultatului îl lăsăm pe seama cititorului. Fiind date polinoamele:

$$f(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_m ,$$

$$\varphi(x) = b_0 x^p + b_1 x^{p-2} + \ldots + b_p ,$$

respectiv de gradul m şi p, $(p \leqslant m)$, ne propunem să dăm expresiunea câtului şi restului acestor două polinoame ce le vom însemnà prin $q(x)$ şi $r(x)$.

Să punem:

$$q(x) = c_0 x^{m-p} + c_1 x^{m-p-1} + \ldots + c_{m-p}$$

$$r(x) = \alpha_0 x^{p-1} + \alpha_1 x^{p-2} + \ldots + \alpha_{p-1}$$

şi atunci din identitatea

$$f(x) = \varphi(x) \cdot q(x) + r(x),$$

scoatem următoarele $m+1$ relaţiuni liniare în raport cu cei $m+1$ coeficienţi $c_0, c_1, \ldots, c_{m-p}, \alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}$:

$$(5)\quad \left\{\begin{array}{l}
a_0 = b_0 c_0 \\
a_1 = b_1 c_0 + b_0 c_1 \\
a_2 = b_2 c_0 + b_1 c_1 + b_0 c_2 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_{m-p} = b_{m-p} c_0 + b_{m-p-1} c_1 + b_{m-p-2} c_2 + \ldots + b_0 c_{m-p} \\
a_{m-p+1} = b_{m-p+1} c_0 + b_{m-p} c_1 + b_{m-p-1} c_2 + \ldots + b_1 c_{m-p} + \alpha_0 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_{m-p+h} = b_{m-p+h} c_0 + b_{m-p+h-1} c_1 + b_{m-p+h-2} c_2 + \ldots \\
\quad \ldots + b_h c_{m-p} + 0\,\alpha_0 + 0\,\alpha_1 + \ldots\ldots\ldots\ldots + \alpha_{h-1} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_m = b_p c_{m-p} + 0\,\alpha_0 + 0\,\alpha_1 + \ldots + 0\,\alpha_{h-1} + \ldots + \alpha_{p-1}.
\end{array}\right.$$

Se va înţelege, mai departe, raţiunea completării relaţiunilor în raport cu coeficienţii α. S'ar puteà întâmplà ca unii din coeficienţii $b_{m-p}, b_{m-p+1}, \ldots$ să nu existe, atunci convenţional vor fi înlocuiţi prin zero.

Să ne ocupăm acum de expresiunea câtului. Va trebuì atunci, din relaţiunile (5), să luăm numai primele $m-p+1$. Determinantul necunoscutelor $c_0, \ldots, c_{m-p}$, se reduce la termenul principal şi este b_0^{m-p+1}, evident deferit de zero. Şi atunci, chestiunea revine la a

află valoarea lui $q(x)$, când în loc de $c_0, \ldots, c_{m-p}$, punem valorile deduse din primele $m-p+1$ relaţii din (5). Suntem tocmai în cazul observaţiunei dela început şi avem conform lui (4), numai că la numărător schimbăm liniile în coloane şi invers:

$$q(x) = -\frac{1}{b_0^{m-p+1}} \begin{vmatrix} b_0 & b_1 & \ldots & b_{m-p} & x^{m-p} \\ 0 & b_0 & \ldots & b_{m-p-1} & x^{m-p-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & b_0 & 1 \\ a_0 & a_1 & \ldots & a_{m-p} & 0 \end{vmatrix}$$

Sau, adunând ultima linie la prima, avem:

$$q(x) = -\left(\frac{-1}{b_0}\right)^{m-p+1} \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \ldots & a_{m-p} & 0 \\ b_0 & b_1 & \ldots & b_{m-p} & x^{m-p} \\ 0 & b_0 & \ldots & b_{m-p-1} & x^{m-p-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & b_0 & 1 \end{vmatrix}$$

Sub această formă remarcabilă, se pune câtul celor două polinoame. Coeficientul oricărui termen poate fi calculat independent de ceilalţi coeficienţi.

Să trecem la determinarea restului $r(x)$. Vom considerà toate relaţiunile (5) între $c_0, \ldots c_{m-p}, \alpha_0, \ldots \alpha_{p-1}$ şi pentru a fixà şi mai clar că suntem tot în cazul observaţiunei dela început, vedem că determinantul tuturor necunoscutelor este tot b_0^{m-p+1} şi vom scrie pe $r(x)$ astfel:

$$r(x) = 0\,c_0 + 0\,c_1 + \ldots + 0\,c_{m-p} + x^{p-1}\alpha_0 + x^{p-2}\alpha_1 + \ldots + \alpha_{p-1}.$$

Chestiunea revine la aflarea lui $r(x)$, când punem în loc de $c_0, \ldots, c_{m-p}, \alpha_0, \ldots, \alpha_{p-1}$, valorile scoase din (5). Avem, conform lui (4), prin intervertirea liniilor cu coloanele la numărător şi punerea semnului minus la ultima coloană:

$$r(x) = \frac{1}{b_0^{m-p+1}} \begin{vmatrix} b_0 & b_1 & \ldots & b_p & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & b_0 & \ldots & b_{p-1} & b_p & \ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & b_0 & b_1 \ldots & b_p & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 1 0 \ldots & 0 & -x^{p-1} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 1 \ldots & 0 & -x^{p-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 0 \ldots & 1 & -1 \\ a_0 & a_1 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & a_m & 0 \end{vmatrix}$$

Sau, adunând ultima linie cu prima, avem:

$$r(x)=\frac{(-1)^{m+1}}{b_0^{m-p+1}}\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_m & 0 \\ b_0 & b_1 & \dots b_p\, 0 \dots & 0 & 0 \\ 0 & b_0 & \dots b_p\, 0 \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots 0\, b_0\, b_1 \dots & b_p & 0 \\ 0 & 0 & \dots 0\, 0\, 1\, 0 \dots & 0 & -x^{p-1} \\ 0 & 0 & \dots 0\, 0\, 0\, 1 \dots & 0 & -x^{p-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots 0\, 0\, 0\, 0 \dots & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

Acum, înmulțim prima coloană cu x^m, a doua cu $x^{m-1}, \dots,$ penultima cu 1 și adunând ultimei coloane, avem:

$$r(x)=\frac{(-1)^{m+1}}{b_0^{m-p+1}}\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_m & f(x) \\ b_0 & b_1 & \dots b_p\, 0 \dots 0 & x^{m-p} & \varphi(x) \\ 0 & b_0 & \dots b_p \dots 0 & x^{m-p-1} & \varphi(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots b_0\, b_1 \dots & b_p & \varphi(x) \\ 0 & 0 & \dots 0\, 1\, 0 \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots 0\, 0\, 1\, 0 \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots 0 \dots & 0\, 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Sau, observând că ultimele p linii au elementele nule, afară de unul singur, avem expresiunea definitivă:

$$(6)\quad r(x)=\left(\frac{-1}{b^0}\right)^{m-p+1}\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{m-p} & f(x) \\ b_0 & b_1 & \dots b_p\, 0 \dots 0 & x^{m-p} & \varphi(x) \\ 0 & b_0 & \dots b_p \dots 0 & x^{m-p-1} & \varphi(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots 0 & b_0 & \varphi(x) \end{vmatrix}$$

Expresiunea aceasta este un determinant de ordinul $m-p+2$ și se poate obține coeficientul oricărui termen fără nici o greutate.

Condiţiunea ca polinomul $f(x)$ să fie divizibil prin $\varphi(x)$ va fi:

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{m-p} & f(x) \\ b_0 & b_1 & \dots b_p\ 0 \dots 0 & & x^{m-p}\varphi(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots\dots 0\ b_0 & & \varphi(x) \end{vmatrix} \equiv 0.$$

Se găsesc propuse, în reviste, multe probleme în care se întreabă dacă două polinoame sunt divizibile şi în acest caz, se cere şi câtul. Aici, s'a răspuns în chip general la aceste chestiuni. Tinerii noştri abonaţi pot reluà chestiunile pe această cale.

Expresiunea găsită aici pentru $r(x)$ este analoagă cu expresia c. m. m. d. c. a două polinoame (*Mathematische Annalen* tom. 54. HEFTER). Se ştie ce rol joacă c. m. m. d. c. în teoria ecuaţiilor algebrice. Se pune întrebarea dacă din aceste expresiuni, nu s'ar puteà trage vreun folos pentru studiul ecuaţiilor.

Rezultatele ce am obţinut se vor expune cu altă ocazie.

TH. ANGHELUŢĂ.

RAPORTUL COMISIUNEI

PENTRU ACORDAREA PREMIULUI „VASILE CONTA“ PE INTERVALUL 1 IULIE 1920 — 1 IULIE 1921.

Subsemnaţii: Inginer Şef Cesar D. Orăşanu şi Maior Gheorghe Liteanu, membri ai Societăţei „Gazeta Matematică“, delegaţi de Adunarea Generală din 31 August 1922, spre a examinà lucrările referitoare la premiul „Vasile Conta“ din intervalul dela 1 Iulie 1920 — 1 Iulie 1921, am constatat următoarele:

1. Nu s'a prezentat, în acest scop, nici o lucrare tipărită, sau în manuscris, de filosofie matematică sau matematici pure, în intervalul de timp arătat mai sus, după cum prevede art. 2 din regulamentul acestui premiu, publicat în „Gazeta Matematică“ din Octombrie 1917.

2. In aceste condiţiuni, urmează să se aplice dispoziţiunile articolului 6, ale aceluiaş regulament şi anume să se acorde premiul celei mai bune publicaţiuni de matematici pure făcute în „Gazeta Matematică“, în intervalul dela 1 Iulie 1920—la 1 Iulie 1921,

de către persoane străine de societate, cari însă să-şi fi făcut studiile în ţară.

3. Examinând articolele publicate în Gazeta Matematică, comisiunea a găsit că există un singur articol îndeplinind condiţiunile regulamentului acestui premiu, anume articolul D-lui Miron Niculescu intitulat „Teoreme de Geometrie Analitică", publicat în No. 11—12 din Iulie — Aug. 1920.

In acest articol, D-sa se ocupă de proprietăţile unei clase de puncte, anume de potenţialele de ordine diferite ale unui triunghiu, în legătură strânsă cu potenţialele de ordinul zero, unul şi doi, adică centrul de gravitate, centrul cercului înscris şi punctul lui LEMOINE. D-l Miron Niculescu enunţă şi demonstrează în acest articol trei teoreme, completate prin observări şi corolarii, care fac dovadă că D-sa mânueşte, cu multă dibăcie proprietăţile de „Geometria Triunghiului". In afară de acest articol, D-l Miron Niculescu mai are de publicat, în acelaş interval de timp, o notă matematică intitulată „Asupra unor proprietăţi a conicelor", patru probleme propuse, numeroase exerciţii şi un număr mare de probleme rezolvate, din care unele tipărite direct după manuscrisele trimese de D-sa, ca problemele 2672, 2793, 2768, 2812, 2482, iar unora din aceste probleme li-a dat o mai mare atenţiune, generalizându-le.

Evidenţiem activitatatea D-sale, arătând şi faptul că la concursul Gazetei Matematice din acelaş an, a fost clasificat al doilea, cu următoarea menţiune: „In al doilea rând vine D-l Miron Niculescu, elev particular în cl. VII la Liceul Matei Basarab din Bucureşti, un corespondent care şi-a câştigat renume pentru activitatea sa stăruitoare şi pricepută".

4. In urma celor arătate, Comisiunea propune a se acordă premiul „Vasile Conta", pe intervalul de la 1 Iulie 1920 — 1 Iulie 1921, D-lui Miron Niculescu.

CEZAR ORĂŞEANU, MAIOR G. LITEANU.

Acest raport s'a citit şi aprobat în adunarea extraordinară din 29 Ianuarie 1923.

DELEGAŢIA SOCIETĂŢII

N. GEORGESCU, I. D. TEODOR.

NOTE MATEMATICE.

32. *Incà zece mecanici diverse.* (Vezi nota 1 pag. 18).

21. **Animală.** *Haughton.* — Principles of annimal mechanics. 1873.

22. **Corpurilor rigide.** (a) *Prescott.* — Mechanics of particles and rigid bodies. 1913.

23. **Fisiologică.** *Fischer.*—Physiologische Mechanik. Lipsca 1903.

24. **Inaintată.** *Briggs & Bryan.* — Advanced mechanics.

25. **Incepătorilor.** (a) *Todhunter.* — Mechanics for beginners. 1890.

26. **Maşinilor.** *Kennedy.* — The mechanics of machinery. 1893.

27. **Maşinistului.** (a) *Giorli.* — La mecanica del machinista del bordo. Milano.

28. **Modernă.** *Block.* — La mécanique de Newton et la mécanique moderne.

29. **Newtoniană.** *Block.* — La mécanique de Newton et la mécanique moderne.

30. **Particulelor.** (a) Vezi No. 22.

(Va urmà). I. Ionescu.

33. *Valoarea lui* π. In diferite limbi, s'au dat fraze sau versuri cu care să se memoreze cât mai multe cifre ale lui π. Pentru a memorà 8 cifre ale lui π, s'ar puteà utilizà propoziţiunea romînă: *Aşà e uşor a scrie renumitul şi utilul număr.* Scriind una după alta, cifrele care arată câte litere are fiecare cuvânt şi punând o virgulă după prima cifră, avem: $\pi = 3{,}14159265....$

E. Iliescu.

34. *Asupra şirului lui Fibonacci.* In cele ce urmează, voiu generalizà teoremele I şi II din articolul „*Asupra şirului lui Fibonacci*“ (G. M., vol. XXI, pag. 125).

Să considerăm şirul

$$u_1, u_2, u_3, \ldots u_n, \ldots$$

unde $u_1 = p + 1$, $u_2 = p(p+1) + q$ şi unde avem relaţia de recurenţă: (1) $u_n = p\,u_{n-1} + q\,u_{n-2}$ [1]

1) Relaţia nu cere ca p, q să fie întregi.

1. Termenul u_n este dat de determinantul

$$u_n = D_n = \begin{vmatrix} p+1 & p+1-q & 0 & \dots & 0 \\ 1 & p+1 & p+1-q & \dots & 0 \\ 1 & 1 & p+1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & \dots & p+1 \end{vmatrix}.$$

Să desvoltăm determinantul după elementele liniei întâi;

$$(2)\quad D_n = (p+1)\,D_{n-1} - (p+1-q)\begin{vmatrix} 1 & p+1-q & 0 \dots & 0 \\ 1 & p+1 & 0 \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \dots & \dots & p+1 \end{vmatrix}$$

$$(3)\quad D_n = (p+1)\,D_{n-1} - (p+1-q)\,D_{n-2} + (p+1-q)\,\Delta_{n-2},$$

unde am pus

$$\Delta_{n-2} = \begin{vmatrix} 1 & p+1-q & 0 & \dots & 0 \\ 1 & p+1 & p+1-q & \dots & 0 \\ 1 & 1 & p+1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \dots & \dots & \dots & p+1 \end{vmatrix}$$

indicele indicând gradul.

La fel, după (2), avem

$$(4)\qquad D_{n-1} = (p+1)\,D_{n-2} - (p+1-q)\,\Delta_{n-2}.$$

Adunând (3) cu (4), obținem

$$D_n + D_{n-1} = (p+1)\,D_{n-1} + q\,D_{n-2}\,,\quad D_n = p\,D_{n-1} + q\,D_{n-2},$$

relație analoagă cu (1), și cum

$$D_1 = p+1 = u_1\,,\quad D_2 = p(p+1) + q = u_2,$$

rezultă teorema enunțată.

2. *Între termenii șirului există relația*

$$u_n = p^k u_{n-k} + c_k^1 p^{k-1} q\, u_{n-k-1} + \dots + c_k^j p^{k-j} q^j u_{n-k-j} + \dots + q^k u_{n-2k}.$$

Procedăm prin inducție; pentru $k = 1$, relația se reduce la

(1). Admitem că e adevărată pentru k şi să arătăm că e adevărată şi pentru $(k+1)$. Ţinând seamă de relaţia (1), avem

$$u_n = p^k (p\,u_{n-k-1} + q\,u_{n-k-2}) + c_k^1 p^{k-1} q (p\,u_{n-k-2} + q\,u_{n-k-3}) + \cdots$$

$$+ c_k^j p^{k-j} q^j (p\,u_{n-k-j-1} + q\,u_{n-k-j-2}) + \cdots + q^k (p\,u_{n-2k-1} + q\,u_{n-2(k+1)}),$$

$$u_n = p^{k+1} u_{n-k-1} + c_{k+1}^1 p^k q\,u_{n-k-2} + \cdots + q^{k+1} u_{n-2(k+1)},$$

căci se ştie relaţia

$$c_k^j + c_k^{j-1} = c_{k+1}^j.$$

Aşà dar teorema este demonstrată.

N. Georgescu-Roegen.

35. *Asupra exerciţiului No. 6 pag. 30 Anul XXIV.* In acel exerciţiu, se cereà să se arate că relaţiile:

$$\sum_{k=1}^{k=n} (a+k) = \mathscr{M} p \quad \text{şi} \quad \prod_{k=1}^{k=n} (a+k) = \mathscr{M} p$$

nu pot fi simultan satisfăcute. Din cauza unei scăpări din vedere în răspuns, demonstraţia dată nu este completă. De fapt, relaţiunile de mai sus se pot satisface de o dată. Aşà, de exemplu, fie $a = 9$, $n = 5$, $p = 5$. Avem:

$$10 + 11 + 12 + 13 + 14 = 60 = \mathscr{M} 5; \quad 10.11.12.13.14 = \mathscr{M} 5.$$

A. Tauber.

36. *Asupra problemelor* 161, 173 *şi* 200 *din Revista Matematică din Timişoara* (Anul II, pag. 94, 110 şi 158).

1) Enunţul problemei 161 este următorul *): *Să se transforme suma* $(a-b)^7 + (b-c)^7 + (c-a)^7$ *într'un produs.*

In *Culegere de probleme*, Algebra, II, 16, se găseşte propusă şi demonstrată următoarea indentitate, care rezolvă chestiunea propusă:

$$(1) \qquad (a-b)^7 + (b-c)^7 + (c-a)^7 =$$

$$\frac{7}{2} (a-b)(b-c)(c-a)[(a-b)^4 + (b-c)^4 + (c-a)^4].$$

Dacă observăm că avem (*Culegere de Probleme*, Algebra II, 13) indentitatea:

*) *Revista Matematică din Timişoara*, Anul II, Nr. 6, p. 94.

$[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]^2=2[(a-b)^4+(b-c)^4+(c-a)^4]$, indentitatea (1) se mai poate scrie şi sub forma:

(2) $(a-b)^7+(b-c)^7+(c-a)^7=$

$$\frac{7}{4}(a-b)(b-c)(c-a)[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]^2.$$

Dacă în indentitatea (*Culegere de Probleme*, Algebra II, 11):

$$(x+y+z)^3=x^3+y^3+z^3+3(x+y)(y+z)(z+x),$$

facem $x=b-c, y=c-a, z=a-b$, găsim:

$$(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3=3(a-b)(b-c)(c-a),$$

astfel că indentitatea (2) se mai poate scrie:

(3) $$\begin{cases}(a-b)^7+(b-c)^7+(c-a)7=\\ \frac{7}{12}[(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3][(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]^2.\end{cases}$$

Identităţile (2) şi (3) răspund şi ele chestiunei propuse 161.

* * *

Enunţul problemei 200 este următorul *):

Dacă $x+y+z=0$, *atunci expresia* $x^7+y^7+z^7$ *este divizibilă cu* $x^3+y^3+z^3$.

E uşor de văzut că această problemă nu este în fond de cât tot problema 161. In adevăr, condiţia $x+y+z=0$ ne îndreptăţeşte să luăm:

$$x=b-c,\ y=c-a,\ z=a-b$$

şi atunci indentitatea (3) de mai sus ne dă imediat:

$$x^7+y^7+z^7=\frac{7}{12}(x^3+y^3+z^3)(x^2+y^2+z^2)^2,$$

relaţie care ne arată că dacă avem $x+y+z=0$, atunci expresia $x^7+y^7+z^7$, pe lângă că este divizibilă (algebriceşte) prin expresia $x^3+y^3+z^3$, mai e divizibilă şi prin expresia $(x^2+y^2+z^2)^2$.

* * *

Enunţul problemei 173 este următorul: **)

Să se arate că în orice triunghiu, între raza R *a cercului circumscris şi raza* r *a cercului înscris există inegalitatea* $R \geqslant 2r$.

Se ştie însă că patratul distanţei între centrul O al cercului circumscris şi centrul I al cercului înscris este dat de formula clasică

$$\overline{OI}^2=R^2-2Rr,$$

*) *Idem, idem*, Nr. 10, p. 158.

**) *Revista Matematică din Timişoara*, Anul II, Nr. 7, pag. 110.

găsită şi publicată, chiar sub această formă, de WILLIAM CHAPPLE, la 1746, în *Miscellanea Curiosa Mathematica* şi regăsită apoi după 20 ani de EULER sub forma: *)

$$\frac{a^2 b^2 c^2}{16 S^2} - \frac{abc}{2p}.$$

Formula lui W. CHAPPLE, în care membrul întâi este un patrat, pune imediat în evidenţă că trebue să avem $R \geqslant 2r$, adică *raza cercului circumscris nu poate fi mai mică decât diametrul cercului înscris* **).

V. CRISTESCU.

37. *Trisectorul.* D-l M. NOVACU, profesor la Liceul „Radu Negru" din Făgăraş a arătat în nota 13 dela pagina 176, *Gazeta Matematică*, vol. XXVI ce este şi cum se întrebuinţează un trisector.

La examenul de intrare din anul acesta la şcoala Politechnică din Timişoara, s'a dat între chestiunile orale, la geometrie, şi următoarea chestiune: „*Pe diametrul* AB *al unui cerc, se ia un punct* C, *aşà ca* BC *să fie egal cu raza cercului. Din un punct* M, *de pe tangenta în* B *la cerc, se duce tangenta* MD. *Să se arate că unghiul* DMC *este triplul lui* BMC".

Problema se rezolvă imediat, observând că dacă O este mijlocul lui AB, atunci triunghiurile OMD, OMB şi BMC sunt egale.

Problema aceasta îmi suggerează următoarea construcţie de trisector:

Un raportor este completat cu o riglă BM, tangentă în B la semicerc, iar diametrul rapartorului este prelungit cu o altă riglă BC, de lungime egală cu raza raportorului.

Intrebuinţarea acestui trisector rezultă imediat: Se aşează aparatul aşà ca marginea BM a riglei să treacă prin vârful unghiului de împărţit, punctul C să se afle pe o latură, iar latura MD să fie tangentă la raportor.

LOCOT. COL. GH. BUICLIU.

*) *Gazeta Matematică*, Vol. XXI, Nota 12, pag. 87 şi 88.

**) E. CATALAN. *Théorèmes et Problèmes de Géomètrie*, VI ième ed., pag. 143.

BIBLIOGRAFIE.

Maurice Lecat. *Bibliographie des séries trigonométriques* avec *un appendice sur le calcul des variations.* La autor, Louvain, Avenue des Alliés, 92, ou Bruxelles, Avenue Bois Cambrey 6, Anul 1921. Interesul teoretic şi importanţa în ştiinţele aplicate a seriilor trigonometrice a îndemnat pe D-l LECAT a publică o bibliografie a lor. Materialul fusese adunat, în cea mai mare parte, pentru ediţia franceză a *Encyclopédie des sciences mathématiques*, care a încetat de a mai apare.

Cartea conţine o primă listă a lucrărilor, numerotată şi aranjată după numele autorilor lor, în număr de 2562: apoi o listă alfabetică a publicaţiunilor ce conţin lucrări relative la seriile trigonometrice, printre care şi o publicaţiune a D-lui T. LALESCU în Buletinul secţiunii ştiinţifice a Academiei române, 1920. La fine, este un complement de bibliografie a calculului variaţiunilor ca completare a celor două uvraje citate în numărul trecut.

Toate filele sunt tipărite numai pe o pagină, spre a se puteà face adaosele eventuale pe verso al fiecărei. Autorul, care pe lângă o muncă continuă de 10 ani, pentru adunarea materialului, a făcut şi sacrificii pentru publicarea acestei bibliografii a seriilor trigonometrice, *„neonorată de nici o subvenţiune“* şi alcătuită *„pentru a fi util acelora care într'un mod desinteresat, cultivă ştiinţa pură“*, *Gazeta Matematică*, care a fost fondată pe principii analoage, nu poate decât să aducă toate laudele autorului desinteresat, care a înzestrat literatura ştiinţifică cu această interesantă bibliografie.

I. IONESCU.

Revista de matematicas y fisicas elementales. Anul IV. No. 7 Noemvrie 1922. Buenos Aires. Parabola ca curbă omologică a cercului de I. S. CORTI. Fracţiile ordinare de F. LA MENZA.

Buletinul Asociaţiei de matematici pure şi aplicate. Anul II No. 5 Ianuarie 1923, Bucureşti. Curbele de clasa III bitangente dreptei dela infinit de D. BARBILIAN. Asupra teoremei ortopolului de S. GHEORGHIU.

Revista matematică din Timişoara. Anul II. No. 11 Ianuarie 1923. Despre coordonate punctuale şi tangenţiale de E. ABASOHN.

Revista de Matematicas y fisicas elementales. Anul IV No. 8 Decemvrie 1922. Buenos Aires. BERTHOLLET de A. I. Rezultatul celui de al treilea concurs al Revistei de B. IG. BAIDAFF. (Printre premiaţi se află şi corespondentul nostru D-l T. DORDEA). Imagini multiple în oglinzi plane înclinate de B. H. DAWSON. Fracţiile ordinare, de F. LA MENZA.

Mathesis. Vol. XXXVI. Anul 1922. No. 10 Decemvrie. Bruxelles. Contribuţiuni la geometria tetraedrului de V. THÉBAULT. Asupra a două drepte remarcabile ale triunghiului de TH. GOORMAGHTIGH. Asupra unei transformări analoage cu a lui HIRST, de R. DEAUX. Un capitol din opera lui CAVALIERI, de H. BOSMANS. Note de algebră elementară de AD. M.

Bulletin de la Section scientifique de l'Académie roumaine. Anul VIII. No. 3—4 1922. Bucureşti.

P. Mansion. *L'essence de la trigonométrie* Bruxelles 1922. Supliment la Mathésis.

J. Neuberg. *Geométrie et mécanique.* Extras din *Bulletins de la classe des sciences.* Şedinţa din 4 Noemvrie 1922.

M. N. Saltycow. *Sur le developpement de la théorie des équations partielles du premier ordre d'une seule fonction inconnue.* Extras din *Bulletins de la classe des sciences.* Şedinţa din 4 Noemvrie 1922.

J. Neuberg. *Notes mathématiques (Quelques transformations géométriques. Géométrie et mécanique. Sur la caustique* de STEINER). Extras din *Annales de la Société scientifique de Bruxelles.* Şedinţa dela 26 Octomvrie 1922.

V. Thébault. *Contribution à la géométrie du tétraèdre.* Extras din *Annales de la Société scientifique de Bruxelles.* Şedinţa dela 26 Octomvrie 1922.

CERERI.

97. Opera „*Etudes philosophiques sur la science du calcul*" (Paris 1841) de Ing. M. F. VALLÈS a avut vre-o influenţă în evoluţia matematicei?

L. KRICENOFCHER.

98. Care sunt instituţiunile şi particularii cari au subscris în România la publicarea operilor lui Euler şi cari au primit toate volumele apărute până în prezent?

E. ILIESCU.

PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 1766. *Să se găsiască numărul întreg* **ab**, *format din numerele întregi* **a** *şi* **b**, *scrise unul după altul, ştiind că rădăcina patrată a lui* **ab** *este numărul zecimal* a_1, b_1, *în care* a_1 *şi* b_1 *se obţin din* **a** *şi* **b** *sporindu-le toate cifrele cu unitatea.*

LOCOT. COL. GH. BUICLIU.

Contrar obiceiului *Gazetei Matematice*, colegul din societatea „*Gazeta Matematică*", d-l Inginer CR. MATEESCU este rugat a-mi da voie să anunţ că d-sa este singurul care, în 1911, pe când erà elev la liceul din Buzău, a găsit soluţiunea generală a acestei probleme pentru cazul rădăcinilor aproximative, urmând calea dată

la rezolvarea problemei 1492 dela pagina 61 din *Gazeta Matematică* Vol. XVII.

In acelaş an, am mai primit 2 soluţiuni necomplete şi cu rezultate greşite.

Nici o soluţie nu s'a ocupat însă şi de cazul rădăcinilor exacte, deşi calea generală pentru rezolvarea unor astfel de probleme a fost dată în *Gazeta Matematică* Vol. XVII pag. 61 şi acum în urmă, în Vol. XXVII pagina 134, cu ocazia rezolvărei problemei 2783. — Reiau acea metodă, atât cât se poate aplică din ea pentru rezolvarea problemei 1766.

Pentru aflarea lui a_1, b_1 se împart cifrele lui ab în grupe de câte 2 cifre dela dreapta la stânga. Ultimul grup dela stânga dă prima cifră a lui a_1, cum această cifră e cu 1 mai mare ca prima cifră dela stânga lui ab, urmează că prima cifră a lui a_1 este rădăcina pătrată a numărului de 2 cifre dela stânga lui ab şi că deci ab are $2n$ cifre.

La fiecare grup de 2 cifre ale lui ab, corespunzând o cifră pentru partea întreagă a lui a_1, b_1, urmează că a_1 şi prin urmare şi b_1, au câte n cifre.

Acestea fiind stabilite, se pot deosebi 3 cazuri pentru rezolvarea problemei.

Cazul I. $\mathbf{a_1, b_1}$ *este rădăcina patrată a lui* $\mathbf{ab}$ *cu aproximaţie în minus.* Conform enunţului, ab trebuie să îndeplinească condiţiile:

$$(1) \qquad (ab + 1_{2n})/10^n < \sqrt{ab} < (ab + 1_{2n})/10^n + 1/10^n,$$

unde I_p este numărul ce se formează scriind una după alta p cifre egale cu I.

Din (1), se deduce

$$(2) \qquad ab + 1_{2n} < 10^n \sqrt{ab} < ab + 1_{2n-1}2.$$

Cazul II. $\mathbf{a_1, b_1}$ *este rădăcina patrată a lui* $\mathbf{ab}$ *cu aproximaţie în plus.* Ca mai sus, ab trebuie să satisfacă neegalităţile:

$$(3) \qquad (ab + 1_{2n})/10^n - 1/10^n < \sqrt{ab} < (ab + 1_{2n})/10^n$$

$$\therefore \qquad (4) \qquad ab + 1_{2n-1}0 < 10^n \sqrt{ab} < ab + 1_{2n}.$$

Limita inferioară a neegalităţilor (2) fiind aceeaşi cu limita superioară a neegalităţilor (4), aceste neegalităţi se pot contopi în

(5) $$ab + 1_{2n-1}0 < 10^n \sqrt{ab} < ab + 1_{2n-1}2,$$

care dă soluţiile pentru ambele cazuri considerate.

Din (5) se deduce:

(6) $ab + 1_{2n-1}0 < 10^n \sqrt{ab}$ şi (7) $10^n \sqrt{ab} < ab + 1_{2n-1}2.$

Ridicând la patrat şi făcând reducerile, neegalităţile (6) şi (7) dau:

(8) $$ab^2 + (2 \times 1_{2n-1}0 - 10^{2n})ab + 1_{2n-1}0^2 < 0,$$

(9) $$0 < ab^2 + (2 \times 1_{2n-1}2 - 10^{2n}) + 1_{2n-1}2^2.$$

Rădăcinile trinoamelor în ab din neegalităţile (8) şi (9) fiind:

$$ab = \frac{10^{2n} - 2_{2n-1}0 \pm 10^n \sqrt{10^{2n} - 4_{2n-1}0}}{2}$$

şi $$ab = \frac{10^{2n} - 2_{2n-1}4 \pm 10^n \sqrt{10^{2n} - 4_{2n-1}8}}{2},$$

neegalitatea (8) are loc pentru

(10) $$\frac{10^{2n} - 2_{2n-1}0 - 10^n \sqrt{10^{2n} - 4_{2n-1}0}}{2}$$

$$< ab < \frac{10^{2n} - 2_{2n-1}0 + 10^n \sqrt{10^{2n} - 4_{2n-1}0}}{2},$$

iar neegalitatea (9) are loc pentru

(11) $$ab < \frac{10^{2n} - 2_{2n-1}4 - 10^n \sqrt{10^{2n} - 4_{2n-1}8}}{2},$$

sau pentru

(12) $$ab > \frac{10^{2n} - 2_{2n-1}4 + 10^n \sqrt{10^{2n} - 4_{2n-1}8}}{2}.$$

Neegalităţile (10), (11), (12) trebuind să aivă loc simultan, pentru ca **ab** să satisfacă condiţiile (5), şi comparând între dânşii diferiţii termeni ai neegalităţilor (10), (11) şi (12), ceeace se poate face foarte uşor, se găseşte că numerele ab trebue să satisfacă condiţiile:

$$(13)\quad \frac{10^{2n} - 2_{2n-1}0 - 10^n\sqrt{10^{2n} - 4_{2n-1}0}}{2}$$

$$< ab < \frac{10^{2n} - 2_{2n-1}4 - 10^n\sqrt{10^{2n} - 4_{2n-1}8}}{8},$$

$$(14)\quad \frac{10^{2n} - 2_{2n-1}4 + 10^n\sqrt{10^{2n} - 4_{2n-1}8}}{2}$$

$$< ab < \frac{10^{2n} - 2_{2n-1}0 + 10^n\sqrt{10^{2n} - 4_{2n-1}0}}{2}.$$

Dacă se fac calculele şi simplificările, aceste neegalităţi devin:

$$(15)\quad 388\ldots 88_{2n-3}90 - 10^n\sqrt{1388\ldots 88_{2n-4}90}$$

$$< ab < 388\ldots 88_{2n-1} - 10^n\sqrt{1388\ldots 888_{2n-2}},$$

$$(16)\quad 388\ldots 88_{2n-1} + 10^n\sqrt{1388\ldots 888_{2n-2}}$$

$$< ab < 388\ldots 88_{2n-3}90 + 10^n\sqrt{1388\ldots 88_{2n-4}90}.$$

Partea întreagă a radicalilor din (15) începe evident cu 3, fiind $\sqrt{13}$ şi are n cifre, iar produsul acestor radicali cu 10^n începe cu 3 şi are $2n$ cifre, aşà că efectuând diferenţele din (15), vor rămâne în membrul I şi în membrul III al neegalităţii 2 numere de maximum $2n-1$ cifre, între care trebue să fie cuprins ab, ceeace este imposibil, căci s'a demonstrat la început că ab are $2n$ cifre. Deci (15) nu dă soluţii pentru problemă.

Tot aşà, se arată că în (16) membrul I şi III au câte $2n$ cifre. Prin urmare, soluţiile problemei pot fi date de neegalităţile (16). Este destul a da lui n în (16), sau (14), diferite valori numerice spre a găsi limitele care încadrează numerele ab ce satisfac neegalităţilor (1) sau (3), deci problemei.

Aplicaţiuni. α) Fie $n = 1$. Neegalităţile (14) dau

$$38 + 10\sqrt{13} < ab < 40 + 10\sqrt{10} \quad \therefore \quad 74{,}05 < ab < 78{,}72$$

aşà că valorile lui ab sunt numerele întregi 75, 76, 77, şi 78. In adevăr, avem:

$$8{,}6 < \sqrt{75} < 8{,}7 \quad ; \quad 8{,}7 < \sqrt{76} < 8{,}8 \quad ; \quad 8{,}7 < \sqrt{77} < 8{,}8 \quad ;$$

$$8{,}8 < \sqrt{78} < 8{,}9.$$

β) Fie $n=2$. Neegalitățile (16) dau :

$3888+100\sqrt{1388}<ab<3890+100\sqrt{1390}$ $\therefore$ $7613<ab<7618{,}2$.

Soluțiile problemei sunt, în acest caz, 7614, 7615, 7616, 7617 și 7618. In adevăr:

$87{,}25<\sqrt{7614}<87{,}26$; $87{,}26<7615<87{,}27$; $87{,}26<\sqrt{7616}<87{,}27$

$87{,}27<\sqrt{7617}<87{,}28$; $87{,}28<\sqrt{7618}<87{,}29$.

Cazul III. a_1, b_1 *este rădăcina pătrată exactă a lui* **ab.** Ecuația problemei este în acest caz,

$$\sqrt{ab}=(ab+1_{2n})/10^n \quad \therefore \quad ab^2+(2_{2n}-10^{2n})\,ab+1^2_{2n}=0$$

$$\therefore \quad ab=\frac{(10^{2n}-2_{2n})\pm 10^n\sqrt{10^{2n}-4_{2n}}}{2}$$

$$\therefore \quad ab=\frac{77\ldots7_{2n-1}8\pm 10^n\sqrt{55\ldots5_{2n-1}6}}{2}.$$

Pentru ca ab să fie întreg, este destul ca $55\ldots5_{2n-1}6$ să fie patrat perfect.

Dacă punem $N=1_n$, atunci se vede că

$$55\ldots5_{2n-1}6=5_n\,10^n+5_n+1=5N(9N+1)+5N+1=45N^2+10N+1.$$

Pentru ca $55\ldots5_{2n-1}6$ să fie patrat perfect, trebue să avem un întreg k pentru care

$$45N^2+10N+1=k^2 \quad \therefore \quad N=\frac{-10\pm\sqrt{180k^2-80}}{90},$$

sau eliminând numărul negativ și făcând simplificările, trebue să avem :

$$N=\frac{\sqrt{45k^2-20}-5}{45}.$$

Pentru ca N să fie întreg, trebue ca mai întâi $45k^2-20$ să fie patrat perfect. Trebue deci să avem :

$$45k^2-20=t^2 \quad \therefore \quad t=5M \quad \therefore \quad 9k^2-4=5M^2$$

$$(16) \qquad \therefore \quad (3k-2)(3k+2)=5M^2.$$

Numerele $3k-2$, $3k+2$, diferind prin 4, unul din ele trebue să se dividă neapărat prin 5. Deci trebue să avem:

$$(17) \quad 3k-2=5p, \quad \text{sau} \quad (18) \quad 3k+2=5q.$$

Dacă avem (17), atunci (16) dă

(19) $p(5p+4)=M^2 \quad \therefore \quad M=p.r \quad \therefore \quad 5p+4=p.r^2.$

p trebuind să dividă membrul întâi şi cum divide pe $5p$, urmează că este un factor a lui 4, adică putem avea: $p=1$, 2 sau 4.

Introducând aceste valori în (19), găsim că numai pentru $p=1$ produsul $p(5p+4)$ este patrat perfect. Dar făcând în (17) $p=1$ găsim

$$3k-2=5,$$

care ne dă valoare întreagă pentru k. Deci, în cazul egalităţii (17), 45^2-20 nu poate fi patrat şi nici N nu poate exită.

Dacă avem (18), atunci (16) ne dă

(20) $q(5q-4)=M^2 \quad \therefore \quad M=q.s \quad \therefore \quad 5q-4=q.s^2,$

de unde se deduce că q trebue să fie unul din numerele 1, 2, 4.

Dintre acestea, numai $q=1$ face pe $q(5q-4)$ patrat perfect. Dar pentru $q=1$, (18) dă $k=1$, pe care introducându-l în valoarea lui N, găsim N=0, ceeace nu are sens atunci când $N=1_n$... Aceasta înseamnă că $55\ldots5_{2n-1}6$ nu este patrat perfect pentru nici o valoare a lui n.

Deci a_1b_1 nu poate fi rădăcina pătratră exactă a lui ab.

Locot. Col. Gh. Buicliu.

Notă. Am demonstrat mai sus că $55\ldots5_{2n-1}6$ nu poate fi patrat perfect pentru nicio valoare a lui n. Acesta este unul din cazurile cerute de problema 2865 propusă la pagina 70 vol. XXVII, pe care încă nu a încercat nimeni s'o rezolve. Calea de urmat, sau o cale de urmat, este indicată mai sus, nu rămâne de cât ca corespondenţii să se folosească de ea şi-i îndemnăm să încerce, după cum îi îndemnăm să încerce şi problema 2950, care are mare analogie cu 1766.

G. B.

PROBLEMA 2296. *Să se găsiască cel mai mic număr prim, care înmulţit pe rând cu numerele 5, 7 şi 3 şi produsele împărţite respectiv cu 19, 17 şi 13 să dea resturile 7, 3 şi 5.*

V. Alaci.

Fie x numărul căutat. El trebuie să satisfacă congruenţa:

$$5x \equiv 7, \qquad \text{(mod. 19).}$$

E uşor de văzut că $x = 9$ e o soluţie particulară, iar soluţia generală este:

(1) $$x = 9 + 19 x_1.$$

Trebuie să avem încă:

$$7x = 7(9 + 19 x_1) \equiv 3, \qquad \text{(mod. 17)}.$$

$x_1 = 3$ este o soluţie particulară, iar soluţia generală este: $x_1 = 3 + 17 x_2$. Introducând această valoare a lui x_1 în relaţia (1), obţinem:

(2) $$x = 9 + 19(3 + 17 x_2) = 66 + 323 x_2.$$

Dar x trebuie să satisfacă şi congruenţa

$$3x = 3(66 + 323 x_2) \equiv 5. \qquad \text{(mod. 13)}.$$

Scoborînd coeficienţii sub modul, avem congruenţa,

$$17 x_2 \equiv 2, \qquad \text{(mod. 13)}.$$

care e satisfăcută pentru $x_2 = 4$, soluţia ei cea mai generală fiind: $x_2 = 4 + 13t$. Inlocuind această valoare a lui x_2 în (2), avem:

$$x = 66 + 323(4 + 13t) = 1358 + 4199t.$$

Trebuie să determinăm acum pe t, astfel ca numărul $x = 1358 + 4199t$ să fie prim. Incercând $t = 1$, avem: $x = 5557$ şi căutând într'o tabelă de numere prime, găsim că acest număr este prim, el este deci soluţiunea problemei.

Soluţie dată de D-nii: C. Brumărescu, M. Davidescu, Şt. Ghiolu, C. Istrati, Şt. Niculescu, A. Pantazi, M. Reinhorn, G. Rosenberg, I. Velescu şi I. Vişoianu.

A fiind numărul căutat, avem:

$$5A = 19a + 7 \quad , \quad 7A = 17b + 3 \quad , \quad 3A = 13c + 5.$$

De unde:

$$A = 4a + 1 - (a - 2)/5 \quad , \quad A = 2b + (3b + 3)/7 \quad , \quad A = 4c + 2 + (c - 1)/3.$$

Punând:

$$(a - 2)/5 = \alpha \quad , \quad (b + 1)/7 = \beta \quad , \quad (c - 1)/3 = \gamma,$$

deducem $$A = 19\alpha + 9 = 17\beta - 2 = 13\gamma + 6,$$

sau $$\alpha = \beta - (2\beta + 11)/19 = \gamma - (6\gamma + 3)/19.$$

α fiind întreg, trebuie ca $$\beta = 19m + 4 \quad , \quad \gamma = 19n + 9.$$

Atunci $\alpha = 17m + 3 = 13n + 6$.

Rezultă de aici: $n = m + (4m - 3)/13$.

Pentru ca n să fie întreg, vom lua: $m = 13p + 4$.

Atunci, $n = 17p + 5$, deci $\alpha = 221p + 7$,

iar $A = 19\alpha + 9 = 4199p + 1358$.

Pentru $p = 1$, găsim $A = 5557$, care este prim, deci este soluția problemei.

PROBLEMA 2639. *Fie* ABC *un triunghiu înscris în cercul* O. *Paralelele duse prin* A, B, C *respectiv cu* BC, CA, AB *tae cercul* O *în punctele* A_1, B_1, C_1, *iar tangentele duse în* A, B, C *la cercul* O *formează triunghiul* $A_2B_2C_2$. *Să se arate că:*

1) *Perpendicularele duse din* A, B, C *respectiv pe laturile* B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1, *ale triunghiului* $A_1B_1C_1$ *se taie în* O;

2) *Perpendicularele duse din* A_1, B_1, C_1 *respectiv pe laturile* BC, CA, AB, *ale triunghiului* ABC *se taie în* E, *centrul cercului înscris în triunghiul* $A_1B_1C_1$;

3) *Triunghiurile* $A_1B_1C_1$ *și* $A_2B_2C_2$ *sunt omotetice, centrul lor de omotetie* D *fiind pe dreapta* EO *și să se calculeze raportul de omotetie*;

4) D *și punctul simedian* K *al triunghiului* ABC *sunt puncte isogonale în raport cu triunghiul* $A_2B_2C_2$;

5) *Centrul* O_2 *al cercului circumscris triunghiului* $A_2B_2C_2$ *se află pe dreapta* EO, *iar isogonalul său* F, *în raport cu triunghiul* $A_2B_2C_2$, *este ortocentrul acestui triunghiu.* (Enunț rectificat). N. ABRAMESCU.

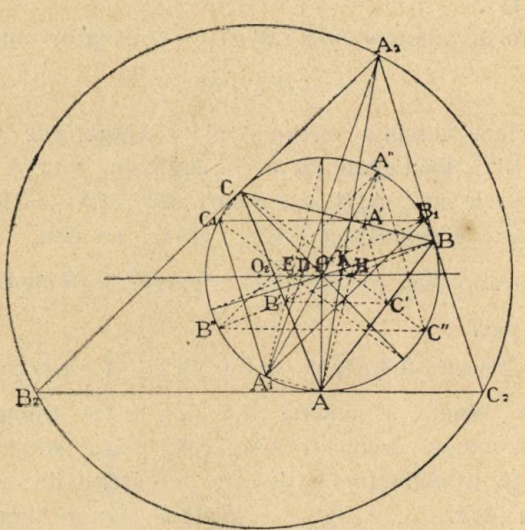
1. Fie H ortocentrul și A', B', C' picioarele înălțimilor triunghiului ABC; A'', B'', C'' punctele unde înălțimile AA', BB', CC', întâlnesc a doua oară cercul circumscris O. Se știe că triunghiurile A'B'C' și A''B''C'' sunt omotetice, având pe H ca centru de omotetie, iar raportul de omotetie egal cu 1 : 2.

Dreapta AA_1 fiind paralelă cu BC este perpendiculară pe AA''; unghiul A_1AA'' este drept și prin urmare punctele A_1 și A'' sunt diametral opuse în cercul O. Analog, B_1, B'' și C_1, C'' sunt diametral opuse. Rezultă de aici imediat că perechile de laturi

B_1C_1 şi $B''C''$, C_1A_1 şi $C''A''$, A_1B_1 şi $A''B''$ sunt egale şi paralele şi că triunghiurile $A_1B_1C_1$ şi $A''B''C''$ sunt omotetice, având pe O ca centru de omotetie iar raportul de omotetie egal cu 1. Mai rezultă că şi laturile $B'C'$, şi B_1C_1 (şi celelalte analoage) sunt paralele.

Se ştie însă*) că razele AO, BO, CO sunt respectiv perpendiculare pe laturile $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$ ale triunghiului ortic $A'B'C'$; deci AO, BO, CO vor fi respectiv perpendiculare şi pe B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1, ceeace demonstrează prima parte a problemei.

2. Se ştie că înălţimile AA', BB', CC' sunt bisectoarele triunghiului ortic $A'B'C'$ şi deci şi ale triunghiului $A''B''C''$ omotetic cu $A'B'C'$. Ortocentrul H al triunghiului ABC este deci centrul comun al cercurilor înscrise în triunghiurile $A'B'C'$ şi $A''B''C''$.



Am stabilit că O este centrul de omotetie al triunghiurilor $A''B''C''$ şi $A_1B_1C_1$ al căror raport de omotetie este egal cu 1. Fie E centrul cercului înscris în triunghiul $A_1B_1C_1$, adică omologul lui H din triunghiul $A''B''C''$. Dreapta EH unind două puncte omoloage din două triunghiuri omotetice, va trece prin centrul lor de omotetie O; cu alte cuvinte, *punctul* E *se află pe dreapta lui*

*) A se vedea; F. G.—M. *Exercices de géométrie*, VI-e éd. p. 284, question 663, teorema lui NAGEL.

Euler OH *a triunghiului* ABC şi e simetricul lui H faţă de O. Iar dreptele EA_1, HA'' fiind drepte omoloage în cele două triunghiuri vor fi paralele: dar HA'' fiind perpendiculară pe CB, urmează că şi EA_1 va fi perpendiculară pe BC şi analog EB_1 şi EC_1 vor fi perpendiculare pe AC şi AB, ceeace demonstrează a doua parte a problemei.

3. Latura B_2C_2 a triunghiului $A_2B_2C_2$, fiind tangenta în A la cercul O, este perpendiculară pe raza OA şi deci, după prima parte a problemei, paralelă cu latura B_1C_1. Analog B_2A_2, B_1A_1 şi A_2B_2, A_1B_1 sunt paralele. Triunghiurile $A_2B_2C_2$ şi $A_1B_1C_1$, având laturile lor paralele, sunt omotetice, iar punctele O şi E fiind puncte omoloage în aceste două triunghiuri (centrele cercurilor înscrise), urmează că centrul lor de omotetie D se va află pe dreapta EO (sau OH).

Raportul de omotetie fiind raportul a două laturi omoloage, avem

$$k = \overline{B_1C_1} : \overline{B_2C_2}.$$

Fie R raza cercului circumscris O. Unghiurile triunghiurilor $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ fiind egale cu ale triunghiului ortic $A'B'C'$, avem:

$$B_1C_1 = 2R \sin C_1A_1B_1 = 2R \sin(180^0 - 2A) = 2R \sin 2A,$$

iar triunghiurile dreptunghice OAB_2, OAC_2 ne dau

$$B_2C_2 = AB_2 + AC_2 = R(\operatorname{tg} AOB_2 + \operatorname{tg} AOC_2) = R(\operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C).$$

Avem deci

$$k = 2R \sin 2A / R(\operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C) = 4 \cos A \cos B \cos C.$$

4. Vom aminti că punctul simedian K al triunghiului ABC este punctul comun dreptelor AA_2, BB_2, CC_2, adică punctul lui Gergonne al triunghiului $A_2B_2C_2$, iar centrul de omotetie D al triunghiurilor $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ e punctul comun dreptelor A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2. Pentru a arătă că punctele D şi K sunt isogonale, va fi deajuns să arătăm, spre ex., că dreptele A_2A, A_2A_1 sunt isogonale în raport cu unghiul $C_2A_2B_2$. Pentru aceasta observăm că dreptele C_2A_2 şi B_2A_2 fiind tangente la cercul O respectiv în B şi C, iar corzile BC şi AA_1 fiind paralele, urmează că dreapta A_2O este perpendiculară pe dreptele BC şi AA_1 în mijlocul lor şi ca, prin urmare, A_2O este bisectoara comună a unghiurilor $C_2A_2B_2$ şi AA_2A_1, ceeace demonstrează a patra parte a problemei.

Mihail Ghermănescu, Constantin H. Nicolau.

5. Fie ω centrul cercului circumscris triunghiului ortic A'B'C', (centrul cercului lui EULER al triunghiului ABC). Triunghiurile A'B'C' şi $A_2B_2C_2$ sunt evident omotetice, căci au laturile lor două câte două perpendiculare pe razele OA, OB, OC şi deci paralele între ele. H şi O sunt puncte omoloage în triunghiurile A'B'C' şi $A_2B_2C_2$ (centrele cercurilor înscrise sau exînscrise dacă triunghiul ABC are un unghiu obtus); dar ω şi O_2 sunt deasemenea puncte omoloage în cele două triunghiuri (centrele cercurilor circumscrise) şi cum ω se află pe dreapta OH, rezultă că şi O_2 se va află pe dreapta OH *), dreaptă pe care se află şi punctul E.

Cât priveşte partea a doua a chestiunei, anume că isogonalul F al lui O_2 în raport cu triunghiul $A_2B_2C_2$, este ortocentrul acestui triunghiu, se ştie că în orice triunghiu centrul cercului circumscris şi ortocentrul sunt puncte isogonale.

Am văzut că triunghiurile ABC şi $A_2B_2C_2$ sunt omotetice. Dar punctele O şi O_2 precum şi E şi O sunt puncte omoloage în aceste triunghiuri, primele două fiind centrele cercurilor circumscrise, iar ultimele două fiind centrele cercurilor înscrise. Urmează că raportul dintre segmentele EO şi OO_2 este egal cu raportul de omotetie al celor două triunghiuri, adică

$$\overline{EO} : \overline{OO_2} = 4 \cos A \cos B \cos C.$$

V. CRISTESCU.

Notă. Printre numeroasele proprietăţi de care se bucură figura de care ne-am ocupat (vezi: ROUCHÉ et COMBEROUSSE, *Traité de géométrie*, VIII-e éd. géométrie plane, chestiunile propuse 26, 27, 47, 51, pag. 508, 512, 513; *Gazeta Matematică*, Vol. XXI, p. 240, 241; etc.), iată încă una:

Perpendicularele duse din mijloacele laturilor triunghiului $A_1B_1C_1$ *pe laturile corespunzătoare ale triunghiului* ABC *se întâlnesc într'un punct* τ *situat la mijlocul distanţei care uneşte pe* H *cu ortocentrul lui* $A_1B_1C_1$.

In adevăr, dreptele AA_1, BB_1, CC_1 dau naştere prin intersecţia lor la un triunghiu $\alpha\beta\gamma$ în care ABC este triunghiul său median, $A_1B_1C_1$ triunghiul său ortic şi H centrul cercului circumscris, aşă că, după teorema lui E. LUCAS, cele trei perpendiculare se întâlnesc în centrul cercului lui TAYLOR τ al triunghiului $\alpha\beta\gamma$ **), punct, care se află la mijlocul dreptei care uneşte pe H (centrul cercului circumscris lui $\alpha\beta\gamma$) cu ortocentrul lui $A_1B_1C_1$.

CONSTANTIN H. NICOLAU.

*) Această proprietate e cunoscută: a se vedeà ROUCHÉ et DE COMBEROUSSE, *Traité de géométrie*, première partie, VI-e éd., p. 492, question proposée 26. V. C.

**) A se vedeà: T. LALESCU, *Asupra unui punct remarcabil al triunghiului*, *Gazeta matematică*, Vol. XXI, p. 241 şi u.

Observaţie. D-nii M. GHERMĂNESCU şi C. H. NICOLAU au rectificat alineatul 4) din enunţul primitiv al problemei, arătând că punctul K nu se poate afla pe dreapta EDO. De asemenea, la al. 5), D-lor au recunoscut că ortocentrul F al triunghiului $A_2B_2C_2$ nu poate să se afle pe dreapta OK, bazându-se pe aceea că într'un triunghiu oarecare, dreapta care uneşte centrul cercului înscris cu ortocentrul nu trece prin punctul lui GERGONNE al triunghiului.

PROBLEMA 2760. *Fie* φ *punctul lui* FEUERBACH *al unui triunghiu* ABC *(punctul de contact al cercului înscris cu cercul celor nouă puncte). Să se demonstreze că între distanţele punctului* φ *la picioarele* A', B', C' *ale înălţimilor triunghiului, avem relaţiunile:*

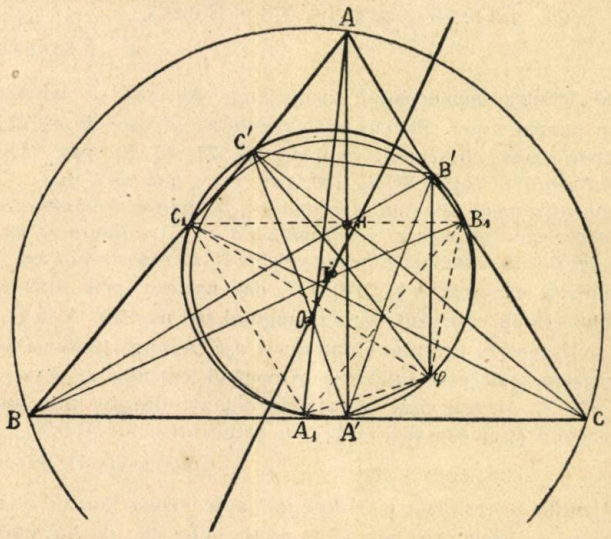
$$\varphi C' \sin^2 \tfrac{1}{2}C = \varphi A' \sin^2 \tfrac{1}{2}A + \varphi B' \sin^2 \tfrac{1}{2}B \quad (1)$$

$$\varphi C' \sin 2C = \varphi A' \sin 2A + \varphi B' \sin 2B \quad (2)$$

$(a > c > b)$. V. CRISTESCU.

Soluţie dată de D-nul B. M. BARBĂLATT (Elev clasa VI Liceul Codreanu, Bârlad).

1. Fie O centrul cercului circumscris şi I centrul cercului înscris triunghiului A B C. Fie A_2, B_2, C_2 picioarele perpendicularelor scoborîte din vârfurile A, B, C pe dreapta O I. Se ştie că *dis-*



tanţele punctului lui FEUERBACH *la picioarele înălţimilor unui triunghiu sunt egale respectiv cu distanţele vârfurilor corespunzătoare la dreapta* O I. Avem deci:

$$\varphi A' = AA_2,\ \varphi B' = BB_2,\ \varphi C' = CC_2$$

De altă parte, unghiurile pe care le fac dreptele AO, BO, CO, cu AI, BI, CI sunt respectiv egale cu semidiferența unghiurilor neadiacente ale triunghiului. De exemplu:

$$\sphericalangle OAI = \tfrac{1}{2}(B-C) \text{ când } B > C, \text{ sau } b > c, \text{ și}$$
$$\sphericalangle OAI = \tfrac{1}{2}(C-B) \text{ « } C > B, \text{ « } c > b.$$

In condițiile problemei ($a > c > b$), avem:

$$\sphericalangle OAI = \tfrac{1}{2}(C-B),\ \sphericalangle OBI = \tfrac{1}{2}(A-C),\ \sphericalangle OCI = \tfrac{1}{2}(A-B).$$

In triunghiul AOI, AA_2 este înălțimea corespunzătoare laturei OI. Dacă exprimăm aria acestui triunghiu în două moduri diferite, avem, ținând seamă de observația de mai sus:

$$\tfrac{1}{2} OI \cdot AA_2 = \tfrac{1}{2} AO \cdot AI \sin \tfrac{1}{2}(C-B)$$

$$\therefore\ AA_2 = \frac{AO \cdot AI}{OI} \sin \tfrac{1}{2}(C-B) = \frac{4R^2}{OI} \sin \tfrac{1}{2}B \sin \tfrac{1}{2}C \sin \tfrac{1}{2}(C-B),$$ căci

$AO = R$ (raza cercului circumscris), iar $AI = 4R\sin\tfrac{1}{2}B\sin\tfrac{1}{2}C$.

Avem deci:

$$\varphi A' = \frac{4R^2}{OI} \sin\tfrac{1}{2}B\sin\tfrac{1}{2}C\sin\tfrac{1}{2}(C-B).$$

In mod analog, găsim:

$$\varphi B' = \frac{4R^2}{OI} \sin\tfrac{1}{2}C \sin\tfrac{1}{2}A \sin\tfrac{1}{2}(A-C),\ \varphi C' = \frac{4R^2}{OI} \sin\tfrac{1}{2}A \sin\tfrac{1}{2}B\sin\tfrac{1}{2}(A-B).$$

Dacă introducem aceste valori în relațiunea propusă (1), ea devine:

$$\Sigma \sin^2 \tfrac{1}{2} A \sin \tfrac{1}{2} B \sin \tfrac{1}{2} C \sin \tfrac{1}{2}(C-B) = 0,$$

care se poate scrie succesiv:

$$\Sigma \sin \frac{A}{2} \sin \frac{C-B}{2} = 0,$$

$$\Sigma \left(\cos \frac{A+B-C}{2} - \cos \frac{A-B+C}{2} \right) = 0,$$

$$\Sigma (\sin C - \sin B) = 0.$$

Această relațiune fiind exactă (căci e o indentitate), relațiunea propusă (1) este demonstrată.

2. Dacă ținem seamă de valorile găsite mai sus pentru $\varphi A'$, $\varphi B'$, $\varphi C'$, relația propusă (2) revine la:

$$\Sigma \sin 2A \sin \tfrac{1}{2} B \sin \tfrac{1}{2} C \sin \tfrac{1}{2}(C-B) = 0,$$

care se poate scrie succesiv:

$$\Sigma \sin \tfrac{1}{2} A \sin \tfrac{1}{2} B \sin \tfrac{1}{2} C \cos \tfrac{1}{2} A \cos A \sin \tfrac{1}{2} (C-B) = 0,$$

$$\Sigma \cos A \sin \tfrac{1}{2} (C+B) \sin \tfrac{1}{2} (C-B) = 0,$$

$$\Sigma \cos A (\cos B - \cos C) = 0.$$

Ori, această din urmă egalitate este o indentitate şi prin urmare relaţia (2) propusă e demonstrată.

Soluţie şi generalizare dată relaţiei (2) de către D-nul CONSTANTIN I. GEORGESCU (Elev clasa VIII Liceul Mihai Viteazul, fost elev al Liceului din Craiova):

Observ că laturile $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$ ale triunghiului ortic $A'B'C'$ sunt respectiv antiparalele cu laturile BC, CA, AB ale triunghiului ABC. De aci, deducem uşor că unghiurile triunghiului ortic sunt:

$\sphericalangle B'A'C' = 180^0 - 2A$, $\sphericalangle C'B'A' = 180^0 - 2B$, $\sphericalangle A'C'B' = 180^0 - 2C$.

Triunghiul ortic $A'B'C'$ fiind înscris în cercul lui EULER, al cărui diametru este R, avem:

$$B'C'/\sin(180^0 - 2A) = C'A'/\sin(180^0 - 2B) = A'B'\sin(180^0 - 2C) = R,$$

$$\therefore \quad B'C' = R \sin 2A, \quad C'A' = R \sin 2B, \quad A'B' = R \sin 2C.$$

Patrulaterul inscriptibil $\varphi A'C'B'$ ne dă:

$$\varphi C' \cdot A'B' = \varphi A' \cdot B'C' + \varphi B' \cdot C'A'.$$

Sau, ţinând seamă de valorile găsite mai sus pentru $A'B'$, $B'C'$, $C'A'$:

$$\varphi C' \sin 2C = \varphi A' \sin 2A + \varphi B' \sin 2B.$$

Din demonstraţia de mai sus, se vede că în relaţia (2) nu e necesar ca punctul φ să fie neapărat punctul lui FEUERBACH al triunghiului şi că relaţia (2) subsistă pentru un punct oarecare φ luat pe cercul lui EULER. Pentru a o scrie, trebue să ştim numai între care din punctele A', B', C', se află punctul considerat φ de pe cercul lui EULER.

Observaţii. 1) Fie A_1, B_1, C_1 mijloacele laturilor BC, CA, AB ale triunghiului ABC. D-nul CONST. I. GEORGESCU găseşte că dacă φ este un punct oarecare de pe cercul celor nouă puncte (cercul lui EULER), avem relaţiunea:

$$\varphi C_1 \sin C = \varphi A_1 \sin A + \varphi B_1 \sin B,$$

sau

$$c \cdot \varphi C_1 = a \cdot \varphi A_1 + b \cdot \varphi B_1, \qquad (3)$$

care se obţine la fel ca relaţia (2), aplicând teorema lui PTOLOMEU patrulaterului insciptibil $\varphi A_1 C_1 B_1$, cunoscând numai între care din punctele A_1, B_1, C_1 se află punctul considerat φ.

2) D-nul B. M. BARBĂLATT găseşte că avem relaţia

$$\varphi C' \sin C = \varphi A' \sin A + \varphi B' \sin B, \qquad (a > c > b)$$

sau $$c.\varphi C' = a.\varphi A' + b.\varphi B',$$ (4)

A', B', C' fiind picioarele înălțimilor, iar φ punctul lui FEUERBACH.

3) Avem relațiunea:

$$\varphi C_1 \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}C = \varphi A_1 \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}A + \varphi B_1 \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}B;$$ (5)

figura presupune că avem $(a > c > b)$.

4) Avem de asemenea formula $(a > c > b)$:

$$\varphi C_1 = \varphi A_1 + \varphi B_1,$$ (6)

adică: *distanțele punctului lui* FEUERBACH φ *la mijloacele laturilor triunghiului* ABC *sunt astfel că una din ele este egală cu suma celorlalte două.* Teorema se aplică și pentru punctele lui FEUERBACH φ_a, φ_b, φ_c, situate pe cercurile exînscrise în unghiurile A, B, C.

5) Relațiunile (3), (4) și (5) sunt cunoscute și sunt datorite D-lui V. THÉBAULT, profesor la Ernée (Mayenne). Relațiunea (6) e datorată D-lui W. GODT.

Relațiunile (1), (4), (5) și (6) au loc numai în cazul când φ este punctul lui FEUERBACH al triunghiului.

Relațiunile (2) și (3) au loc după cum am spus, pentru un punct oarecare φ de pe cercul lui EULER, deci au loc și pentru punctul lui FEUERBACH.

6) Fie H ortocentrul triunghiului ABC; α, β, γ mijloacele segmentelor AH, BH, CH, μ un punct oarecare de pe cercul lui EULER. Între distanțele $\mu\alpha$, $\mu\beta$, $\mu\gamma$, avem relațiunea:

$$a.\overline{\mu\alpha} = b.\overline{\mu\beta} + c.\overline{\mu\gamma},$$ (7)

sau $$\mu\alpha \sin A = \mu\beta \sin B + \mu\gamma \sin C,$$

analoagă cu relațiunea (3).

7) Relațiunile (2), (3) și (7) se mai pot enunță astfel:

«*Fie* μ *ortopolul unui diametru oarecare* d *al cercului circumscris triunghiului* ABC; A', B', C' *picioarele înălțimilor,* A_1, B_1, C_1 *mijloacele laturilor*; α, β, γ *mijloacele segmentelor* AH, BH, CH; *avem relațiunile*:

$$\mu C' \sin 2C = \mu A' \sin 2A + \mu B' \sin 2B,$$
$$\mu C_1 \sin C = \mu A_1 \sin A + \mu B_1 \sin B,$$
$$\mu\alpha \sin A = \mu\beta \sin B + \mu\gamma \sin C.$$

In adevăr, se știe că *ortopolul* μ al unei drepte oarecare *d*, în raport cu un triunghiu ABC, este intersecția dreptelor lui SIMSON D_1 și D_2 ale punctelor unde dreapta *d* taie cercul ABC. In cazul când *d* este un diametru al cercului ABC, dreptele lui

SIMSON D_1 și D_2 sunt perpendiculare una pe alta, iar intersecția lor μ se află pe cercul celor nouă puncte.

V. CRISTESCU.

Bibliografie. V. THÉBAULT, *Mathesis*, année 1913, question 1909, pag. 198.
V. THÉBAULT, *Mathesis*, année 1914, question 1934, pag. 190.
J. NEUBERG, *Mathesis*, année 1911, pag. 244, § 30.
J. NEUBERG, „ „ 1922, „ 211, § 23.
Journal de Vuibert, 34-ième année, pag. 85.
F. G.—M., *Exercices de géométrie*, VI-ième éd. question 1342, pag. 609.
J. NEUBERG, *Sur les projections et les contreprojections d'un triangle fixe*, pag. 75.

V. C.

PROBLEMA 2935. *Când expresiunea:*

$$E = 3^{3^n} + 7^{7^m}$$

se divide cu 5? Numerele **m** *și* **n** *sunt întregi și pozitive.*

B. M. BARBĂLATT.

Soluție dată de D-l I. BONEA (elev cl. VI Lic. militar Mânăstirea Dealu).

Expresiunea dată se mai poate scrie:

$$E = (\mathcal{M}5 - 2)^{3^n} + (\mathcal{M}5 + 2)^{7^m}$$

$$\therefore \quad E = \mathcal{M}5 - 2^{3^n} + 2^{7^m}$$

și ținând seamă de teorema lui FERMAT, avem succesiv:

$$2^{3^n} = 2^{(\mathcal{M}4-1)^n} = 2^{\mathcal{M}4} \times 2^{(-1)^n} = (\mathcal{M}5 + 1) \times 2^{(-1)^n} = \mathcal{M}5 + 2^{(-1)^n}$$

$$2^{7^m} = 2^{(\mathcal{M}4-1)^m} = 2^{\mathcal{M}4} \times 2^{(-1)^m} = (\mathcal{M}5+1) \times 2^{(-1)^m} = \mathcal{M}5 + 2^{(-1)^m},$$

așa încât:

$$E = \mathcal{M}5 - 2^{(-1)^n} + 2^{(-1)^m}.$$

Pentru ca expresiunea E să fie divizibilă cu 5, trebuie ca restul să fie identic nul; adică să avem:

$$2^{(-1)^n} = 2^{(-1)^m}.$$

De unde rezultă condiția că numerele m și n trebuiesc să fie simultan pare sau impare.

Generalizare dată de D-l N. GEORGESCU-ROEGEN (elev cl. VII Lic. militar Mânăstirea Dealu).

Fie A_1 un număr prim cu x, $\varphi(x)$ indicatorul lui x; k_1, l_1, m_1 numere întregi. Teorema lui FERMAT, generalizată de EULER, ne dă succesiv:

$$X_1 \equiv A_1^{[k_1\varphi(x)+l_1]^{m_1}} \equiv A_1^{\mathcal{M}\varphi(x)} \cdot A_1^{l_1^{m_1}} \equiv A_1^{l_1^{m_1}} \equiv x_1. \quad (\text{mod. } x)$$

Şi ţinând seamă de notaţiile de mai sus, în general avem:

$$\sum_1^n X_i = \sum_1^n x_i . \qquad (\text{mod. } x)$$

Pentru cazul particular al problemei 2935, punem:

$$X_1 = 3^{3^n}; \qquad x_1 = -2^{(-1)^n},$$

$$X_2 = 7^{7^m}; \qquad x_2 = 2^{(-1)^m}$$

şi se deduce condiţia cerută, caşi în soluţia precedentă.

Soluţie dată de D-nii: CRISTEA GOILAV (student), A. MICLESCU (Şcoala de Artilerie), M. DUMITRESCU (Lic. Carol I, Craiova), I. COŞEREANU (Lic. Piatra Neamţ), D. BLUMENFELD, C. SCHÖNFELD, AL. TAUBER (elevi Lic. Laurian, Botoşani), ADR. A. BUŞILĂ, I. ŞERBĂNESCU (elevi Lic. Mihai Viteazu, Bucureşti), D. ATANASIU, E. ILIESCU, DAN POPOVICI, SERGIU VASILACHE (elevi Lic. militar Mânăstirea Dealu), I. DRAGOMIR, C. C. IONESCU, I. STOENESCU (elevi Lic. Cantemir-Vodă, Bucureşti), I. RIZESCU (Lic. Constanţa), GR. ZAMFIRESCU (Lic. Naţional, Iaşi), EDGAR RUSSU (Lic. Internat, Iaşi), N. TAILER (Lic. Codreanu, Bârlad), I. TEODORESCU (Lic. Ploeşti), D. MĂRU (Lic. Galaţi), OVIDIU D. POPEA (Lic. Chişinău) şi TR. A. DORDEA.

Căutând resturile diviziunii expresiunilor: 3^{3^n} şi 7^{7^n} prin 5, găsim respectiv:

$$3^{3^0} = \mathcal{M}5+3 \qquad 7^{7^0} = \mathcal{M}5+2$$

$$3^{3^1} = \mathcal{M}5+2 \qquad 7^{7^1} = \mathcal{M}5+3$$

$$3^{3^2} = \mathcal{M}5+3 \qquad 7^{7^2} = \mathcal{M}5+2$$

$$\cdots\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots\cdots$$

De unde, pentruca expresiunea:

$$E = 3^{3^n} + 7^{7^m}$$

să se dividă cu 5, se constată că este necesar şi suficient ca m şi n să fie de aceeaşi paritate.

Observări. 1°. Au dat generalizări problemei, însă parţiale, cuprinse în generalizarea D-lui GEORGESCU-ROEGEN, D-nii: EMIL ŞTEFĂNESCU (Lic. Spiru Haret, Bucureşti), ERNEST OPRIŞAN (Lic. Codreanu, Bârlad) şi I. B. FLORESCU.

2°. Au mai trimis generalizări şi alţi corespondenţi, dar sunt greşite.

a) Unele pentru cazul prea general:

$$A^{B^n} \equiv A_i \,, \qquad (\text{mod. } x)$$

tratate sub o altă formă decât aceea a D-lui GEORGESCU-ROEGEN, nu închid în ele decât simple definiţii. Aplicaţiunea pe care D-lor pretind că o fac asupra problemei de mai sus este în realitate o demonstraţie directă a acestei probleme;

b) Nu primim ca bună, iarăşi, generalizarea care se sprijină pe reciproca teoremei lui FERMAT, întrucât se ştie că, în genere, se găsesc numere q, mai mici decât $\varphi(x)$, pentru care:

$$A^q \equiv 1. \qquad (\text{mod. } x)$$

Acest lucru se deduce lesne studiind succesiunea resturilor distincte provenite din împărţirea numărului A^n prin x, când n variază.

G. Z.

PROBLEMA 2964. *Care e numărul de patru cifre, având ultimele două cifre identice, ce este îndoitul pătratului unui număr prim?* MAIOR GH. I. LITEANU.

Soluţie dată de D-nii: F. NEGRETZU (cl. VII, Lic. Piteşti), W. SOLOMON (cl. VI, Lic. Matei Basarab), A. TAUBER (cl. VII, Lic. Botoşani), A. ŞCODRANO (cl. VIII, Silistra), S. GEORGESCU-GORJAN (cl. VII, Craiova), I. CONSTANTINESCU (cl. VII, M-tirea Dealu), A. MICLESCU (Şc. de Artilerie), C. SCHÖNFELD (Lic. Botoşani), N. BRĂTESCU (Lic. Sf. Sava), C. C. MEREUŢĂ, ANTON ABLOV, N. ARCADIAN, D. ATANASIU, E. BALLAN, M. B. BARBĂLATT, D. BLUMENFELD, A. BUŞILĂ, J. CHARAS, I. COŞEREANU, V. DAN, DOBRESCU-BABICIU, TR. DORDEA, I. DRAGOMIR, L. DVOIRIN, C. I. GEORGESCU, FL. GEORGESCU, M. GOGĂLNICEANU, CR. GOILAV, E. ILIESCU, CAROL IONESCU, CORNELIU IONESCU, GH. V. T. IONESCU, N. IOSIPESCU, S. KATZ, I. LAZAROVICI, B. LEVIŢCHI, FR. MARCUS, B. MARTINIAN, D. MĂRU, I. MEIROVICI, AL. PAMULA,

A. Panaitescu, T. Popa, T. Popoviciu, S. Solacoglu, S. Solacolu, C. T. Solacolu, N. Solomon, Gh. Stancu, I. Stoenescu (Lic. Cantemir), N. Tailer, I. Teodorescu, Serg. Vasilache, M. Vasiliu, L. Weiss, S. Weiss.

Fie $N = 1000\,a + 100\,b + 10\,c + c = 2\,p^2$,

p fiind un număr prim.

Avem $23 \leqslant p \leqslant 70$.

Patratul numărului prim p nu se poate termină decât cu 1 sau 9.

Dacă s'ar termină cu 9, conform enunțului problemei, îndoitul său va da pentru c, cifra 8, iar îndoitul cifrei zecilor — fie z, — căreia i se mai adaugă o unitate dela produsul 2×9, ne-ar da expresiunea $2z + 1$, ce ar trebui să se termine tot cu cifra 8, adică c, ceeace însă nu e posibil, $2z + 1$ fiind nepăreche.

Dacă pătratul numărului p se termină cu 1, atunci cifra c e egală cu 2 și de două ori cifra zecilor, adică $2z$, trebue să se termine tot cu 2; de aci rezultă că $z = 1$, sau $z = 6$ și prin urmare, p^2 se termină cu 11, ceeace nu e posibil pentru patratele perfecte, sau cu 61. In acest ultim caz, numărul prim p, de forma $10\,m + n$, trebue să se termine cu 9 sau cu 1.

Dacă s'ar termină cu 9, adică $n = 9$, atunci expresiunea $2.9.m + 8$ trebue să se termine cu 6, ceeace dă sau $m = 1$, sau $m = 6$. Cum $2 \leqslant m \leqslant 7$, valoarea 1 este exclusă, iar cealaltă valoare dă $p = 69$, care însă nu răspunde problemei, nefiind un număr prim.

Dacă p se termină cu 1, adică $n = 1$, atunci $2\,m$ trebue să se termine cu 6, ceeace ne dă $m = 3$, deoarece $2 \leqslant m \leqslant 7$. Prin urmare, $p = 31$, care e un număr prim.

Numărul căutat va fi dar

$$N = 2\,p^2 = 2.(31)^2 = 2.961 = \mathbf{1922}.$$

— Se puteà determină că patratul numărului prim p se termină cu 61, cercetând dintre ultimele două cifre cu care se pot termină pătratele perfecte, (Culegerea de Probleme, Aritmetica XXIX, 1), acelea care pot îndeplini condițiunile problemei, întâi ca înmulțite cu 2, să dea două cifre indentice și apoi ca să termine patratul unui număr prim.

De asemenea, se puteà găsi că $p = 31$, procedând prin incercări și anume, luând numerele prime cuprinse între 23 și 70 și care se termină cu 1 și 9.

— S'au primit alte soluţii dela D-nii: C. I. Georgescu, L. Focşeneanu, Ioan Cioică, V. Ghiţescu, P. Katz, Ov. Popea, M. Pinchis, D. Solomon, O. Vlad, I. S. Antoniu.

— Au rezolvat problema şi D-nii M. Adam, Em. Ştefănescu.

Maior G. I. L.

PROBLEMA 2967. *Densitatea oţelului moale este 7,85. Pe de altă parte* $\frac{1}{4}\pi = 0{,}785$..... *Din potrivirea aceasta de cifre, să se scoată o metodă de a deduce greutatea unei table pătrate de 1 cm grosime cunoscând latura ei şi având la dispoziţie table care ne dau ariile cercurilor când se cunosc diametrele. La câte kg de tablă greşim cu un kg, făcând calculele în acest mod? Pânăla ce mărime de tablă nu greşim cu 1 kg?*

I. Ionescu.

Soluţie dată de D-l Virgil G. Vasilescu (Elev clasa VIII Lc. Ploeşti). Fie G greutatea în kg a unei table de oţel moale, având forma unui pătrat cu l cm latură şi 1 cm grosime. Vom aveà:

$$G = \frac{l \times l \times 1 \times 7{,}85}{1000} = 0{,}00785\, l^2 = 0{,}01 \times 0{,}785\, l^2$$

şi înlocuind 0,785 aproximativ cu $\frac{1}{4}\pi$, avem:

$$G = 0{,}01\, \frac{\pi\, l^2}{4}\,.$$

Dacă S este aria unui cerc în cm^2, care are diametrul de l cm, atunci avem

$$G = 0{,}01\, S.$$

Cu alte cuvinte, *se obţine greutatea unei table patrate de oţel moale de l cm latură şi 1 cm grosime, scriind în cm^2 aria cercului de diametru l cm şi mutând virgula cu două cifre spre stânga.*

Prin această metodă de calcul, se face o eroare, căci se ia $\frac{1}{4}\pi = 0{,}785$, adică $\pi = 3{,}14$, in loc de $\pi = 3{,}141592653589793\ldots$, valoarea cu care sunt calculate tabelele ce dau ariile cercurilor, când se cunosc diametrele lor. Greutăţile obţinute sunt dar mai mari decât cele reale. Greutăţile fiind proporţionale cu valorile adoptate pentru π, reese că la 3,14 kg de tablă se face o eroare de 0,001592653589793.... kg.

Răspunsul la prima întrebare se poate da acum imediat. Dacă la 3,14 kg tablă greşim cu 0,001592.... kg, la câte kg vom face o eroare de 1 kg? Impărţind 3,14 cu 0,001592..., găsim 1971,553 kg. Deci pânăla table de 1971 kg eroarea nu atinge 1 kg.

Pentru a găsi ce mărime de tablă corespunde acestei greutăţi, împărţim greutatea de 1971553 grame cu densitatea de 7,85 şi avem volumul tablei în cm^3. Găsim 251152 cm^3. Tabla având grosimea de 1 cm, suprafaţa ei este de 25,1152 m^2.

Extrăgând rădăcina pătrată a acestui număr, găsim că latura tablei dela care încep erori mai mari de 1 kg, este de 5,02 m.

In numere rotunde, putem spune dar că metoda de calcul convine, cu erori mai mici de 1 kg, pentru table pânăla 5 m latură şi 1 cm grosime.

D-l Solomon Wilhelm a rezolvat problema pe o cale mai lungă, găsind eroare de 1 kg la 1971,7 kg şi la table de 5,11 m latură.

PROBLEMA 2976. *Ce număr trebuie scris la dreapta unui număr întreg, pentru ca valoarea lui să crească cu 1000?*

I. Ionescu.

Soluţie, dată de D-nii D. M. Blumenfeld (Lc. Botoşani); C. E. Georgescu (Cl. VIII, Lc. Cantemir-Vodă, Bucureşti); C. I. Georgescu (Cl. VIII Lc. Mihai Viteazu, Bucureşti); Şt. C. Solacoglu (Elev, Bucureşti); A. Ablod (Cl. VIII, Lc. Cetatea Albă); O. G. Popea (Cl. VI, Lc. Chişinău); I. Sager (Cl. VI. Lc. Focşanj); N. G. Iosipescu şi L. Weiss (Cl. V, Lc. Galaţi); A. N. Pinchis (Cl. VI, Lc. Galaţi); N. Brătescu (Cl. VI, Lc. St. Sava, Bucureşti); C. Mereuţă (Bucureşti); D. Măru (Cl. VIII, Lc. Galaţi) şi E. I. Ballan.

Fie N un număr, după care scriem un număr n de m cifre, aşà că numărul format să fie $N + 1000$. Ecuaţia problemei este:

$$10^m N + n = N + 1000,$$

$$\therefore \quad (10^m - 1) N = 1000 - n.$$

Se vede de aci că $n < 1000$ şi deci poate avea una, două sau trei cifre: In primul caz, ecuaţia devine $(m = 1)$:

$$9N = 1000 - n$$

$$N = 111 + \frac{1 - n}{9}.$$

Se vede că $n=1$ şi $N=111$. Avem, în adevăr, $111.1=1000+111$.

In al doilea caz, avem:

$$99\,N = 1000 - n,$$

$$N = 10 + \frac{10-n}{99},$$

de unde scoatem $n=10$ şi $N=10$. Avem, în adevăr, $10.10=1000+10$.

In al treilea caz, avem:

$$999\,N = 1000 - n.$$

Cum N este cel puţin 1, nu poate rămâne pentru n un număr de trei cifre. Problema are, prin urmare, numai cele două soluţii date mai sus.

D-l A. Tauber a generalizat problema înlocuind 1000 cu 10^p, iar D-l F. E. Georgescu pe 1000 cu 9×10^p. Soluţiunile nefiind complete, le vom publică când ni se vor trimete complete.

D-l Şerban C. Solacolu a considerat că se scriu şi numere fracţionare după un număr întreg şi a găsit pentru cazul când creşterea ar fi cu 10 soluţiile $\frac{1.1}{1}=11$, $\frac{2.4}{2}=12$; $\frac{3.9}{3}=13$, având după 1, 2, 3 fracţiile $\frac{1}{1}$, $\frac{4}{2}$, $\frac{4}{3}$ cu numărătorul lângă numerele 1, 2, 3.

D-l C. P. Goilav a interpretat enunţul înlocuind N cu n şi invers şi a dat soluţiile: putem scrie 100 înaintea unui număr de o cifră, 10 înaintea unui număr de două şi 1 înaintea unui număr de 3.

D-l S. Katz a dat soluţiile, fără a da raţionamentele.

D-nii E. Bercovici, L. Munteanu şi L. Weiss au dat numai soluţia: $N=111$, $n=1$.

PROBLEMA 2987. *Să se demonstreze identitatea:*

$$\frac{\sin 2(a-b)+\sin 2(b-c)+\sin 2(c-a)}{\cos 2(a-b)+\cos 2(b-c)+\cos 2(c-a)+1} = \operatorname{tg}(b-a)\operatorname{tg}(c-b)\operatorname{tg}(a-c).$$

Emil Ştefănescu.

I. Soluţie dată de D-nii: Const. I. Georgescu (Elev Cl. VIII Liceul Mihai Viteazul, Bucureşti), Adrian A. Buşilă şi Virgiliu Ghiţescu (Elevi Cl. VII Liceul Mihai Viteazul, Bucureşti), Micu Grünbaum şi B. M. Barbălatt (Elevi Liceul Codreanu, Bârlad), Alexandru Tauber (Elev Cl. VII Liceul Laurian, Botoşani), Ioan M. Ioniţă şi Andrei Miclescu (Elevi Şcoala de Artilerie, Timişoara), Florian Er. Georgescu (Elev Cl. VII Liceul Cantemir-Vodă, Bucureşti).

In *Culegere de Probleme*, Trigonometria VII. 20 şi 21, se demonstrează următoarele identităţi:

$$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma-\sin(\alpha+\beta+\gamma)=4\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\sin\tfrac{1}{2}(\beta+\gamma)\sin\tfrac{1}{2}(\gamma+\alpha),$$

$$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma+\cos(\alpha+\beta+\gamma)=4\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\tfrac{1}{2}(\beta+\gamma)\cos\tfrac{1}{2}(\gamma+\alpha).$$

In aceste două identităţi, făcând:

$$\alpha=2(b-c),\qquad \beta=2(c-a),\qquad \gamma=2(a-b),$$

obţinem:

$$\sin 2(a-b)+\sin 2(b-c)+\sin 2(c-a)=4\sin(b-a)\sin(c-b)\sin(a-c),$$

$$\cos 2(a-b)+\cos 2(b-c)+\cos 2(c-a)+1=4\cos(b-a)\cos(c-b)\cos(a-c),$$

de unde, prin împărţire, obţinem identitatea propusă.

II. Soluţie dată de D-nii: I. M. Şerbănescu (Elev Cl. VIII Liceul Mihai Viteazul), Cristea P. Goilav, Tiberiu Popoviciu (Elev Cl. VII Liceul Moise Nicoară, Arad), Mircea Vasiliu, Const. E. Georgescu (Elev Cl. VIII Liceul Cantemir-Vodă), I. Ionescu-Brezuica şi Dobrescu-Băbici (Elevi Cl. VII Liceul Ioniţă Asan, Caracal), Pincu Katz (Elev Cl. VIII Liceul Comunităţei Israelite, Galaţi), Nicolae G. Iosipescu, M. A. Pinchis, Leon Dvoirin şi Leon Weiss (Elevi Cl. VII Liceul Vasile Alexandri, Galaţi), Sorin Niculescu (Bucureşti), Ion N. Dragomir (Elev Cl. VII Liceul Cantemir-Vodă, Bucureşti), Alex. I. Stoenescu (Student, Bucureşti), Mihai D. Vasilescu (Elev Cl. VIII Liceul Craiova), Eugeniu I. Bălan (Elev Cl. VIII particulară), Petre A. Miresçu (Elev Cl. VII Liceul Lazăr, Bucureşti), I. St. Teodorescu (Liceul Ploeşti), D. C. Schileru, St. Georgescu-Gorjan (Elev Cl. VII Liceul Craiova).

Vom transformă numărătorul şi numitorul primului membru în produse. Avem

$$\sin 2(a-b)+\sin 2(b-c)=2\sin(a-c)\cos(a+c-2b),$$

$$\cos 2(a-b)+\cos 2(b-c)=2\cos(a-c)\cos(a+c-2b),$$

$$\sin 2(c-a)=2\sin(c-a)\cos(c-a),\qquad 1+\cos 2(c-a)=2\cos^2(c-a).$$

Numărătorul se poate deci scrie, dând pe $2\sin(a-c)$ factor comun:

$$2\sin(a-c)[\cos(a+c-2b)-\cos(c-a)]=4\sin(a-c)\sin(c-b)\sin(b-a),$$

iar numitorul, dând factor comun pe $2\cos(a-c)$:

$$2\cos(a-c)[\cos(a+c-2b)+\cos(c-a)]=4\cos(a-c)\cos(c-b)\cos(b-a)$$

de unde, prin împărțire, obținem membrul al doilea al identității propuse.

Alte soluții de D-nii Ion S. Antoniu și M. I. Focșeneanu.

Observații. 1) Dacă între arcele a, b, c există relația $2a+2b+2c=2n\pi$, atunci avem relația mai generală:

$$\frac{\sin 2a+\sin 2b+\sin 2c}{\cos 2a+\cos 2b+\cos 2c+1}=-\operatorname{tg} a \operatorname{tg} b \operatorname{tg} c.$$

In adevăr, în acest caz, avem (a se vedea *Culegere de Probleme* Trigonometria, VIII. 21 și 23):

$$\sin 2a+\sin 2b+\sin 2c=(-1)^{n-1}\times 4\sin a \sin b \sin c,$$

$$1+\cos 2a+\cos 2b+\cos 2c=(-1)^{n}\times 4\cos a \cos b \cos c.$$

Identitatea propusă corespunde cazului când $n=0$.

Tiberiu Popoviciu, I. St. Teodorescu și B. M. Barbălatt.

2) Avem identitatea:

$$\frac{\sin 2n(a-b)+\sin 2n(b-c)+\sin 2n(c-a)}{\cos 2n(a-b)+\cos 2n(b-c)+\cos 2n(c-a)+1}=\operatorname{tg} n(b-a)\operatorname{tg} n(c-b)\operatorname{tg} n(a-c).$$

D. C. Schileru.

EXERCIȚII.

31. Care sunt patratele de trei cifre, pe care răsturnându-le, să ne dea alte patrate, iar rădăcinile să fie și ele una răsturnatul celeilalte?

C. C. Georgescu.

R. Din

$$100a+10b+c=(10\alpha+\beta)^2, \qquad 100c+10b+a=(10\beta+\alpha)^2$$

cu $a\neq c$, ese prin scădere: $\alpha^2-\beta^2=a-c<9$.

Apoi $10\alpha+\beta<32$, căci altfel patratul nu are trei cifre. De aci, ese $10\alpha+\beta=21, 31$. Avem:

$$21^2=441, \qquad 31^2=961,$$
$$12^2=144, \qquad 13^2=169.$$

32. Care este anul important pentru matematica română, în care a treia cifră e $\mathcal{M}3$ și suma primelor două, iar ultima este 5.

D-ra Elena N. Lăzărescu.

R. Nu poate fi vorba de matematica română înainte de anul 1000. Deci anul căutat este unul din anii 1235, 1565, 1895. Ultimul corespunde problemei, căci este data înființării *Gazetei Matematice*.

33. Care este restul împărţirii prin 55 al lui

$$34^{7342} + 4^4 \cdot 12^{36n}.$$

S. Katz.

R. Avem $34^2 = 1156 = \mathcal{M}.55 + 1$; $4^4 = 256 = \mathcal{M}.55 + 36$; $12^2 = 144 = \mathcal{M}.55 + 34$. Deci restul este acelaş caşi al lui $1 + 36 \times 1 = 37$. Restul este deci 37.

34. Dacă m este întreg, să se arate că avem:

$$\log[1 + 3 + 5 + \ldots + (2m + 1)] = \sum_{n=1}^{n=m-1} \lg\left(1 = \frac{1}{n}\right)^2.$$

Ce devine această identitate, când m este baza sistemului de logaritmi?

Tib. Popoviciu.

R. Avem: $$1 + 3 + 5 + \ldots + 2m + 1 = m^2$$

şi $$\sum \lg\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \lg \frac{2^2}{1^2} \cdot \frac{3^2}{2^2} \cdots \frac{m^2}{(m-1)^2} = \lg m^2.$$

In cazul particular din enunţ, avem:

$$\sum_{1}^{m-1} \lg\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 = 2.$$

35. Să se rezolve sistemul:

$$a/x_1 = x_1/x_2^2 = x_2^2/x_3^3 = \ldots = x_n^n/b.$$

N. I. Ciorănescu.

R. Aplicând logaritmii şi însemnând:

$$\log a = A, \quad \log b = B, \quad \log x_p = X_p,$$

se obţine sistemul $A - X_1 = X_1 - 2X_2 = 2X_2 - 3X_3 = \ldots = nX_n - B = \lambda$.

Se deduce: $X_1 = A - \lambda$; $X_2 = \frac{1}{2}(A - 2\lambda)$; ... $X_n = \frac{1}{n}(A - n\lambda)$,

în care: $$\lambda = (A - B)/(n + 1),$$

de unde: $$x_k = a^{\frac{n+1-k}{k(n+1)}} \cdot b^{\frac{1}{n+1}}.$$

36. Dacă seriile ai căror termeni generali sunt u_n^2 şi v_n^2 sunt convergente, atunci şi seria al cărui termen general este $u_n v_n$, e convergentă.

P. Sergescu.

R. In adevăr:

$$u_n v_n \leqslant \tfrac{1}{2}\left(u_n^2 + v_n^2\right),$$

deci $\Sigma u_n v_n$ are o limită. c. c. t. d.

37. In orice triunghiu, un punct oarecare de pe o latură, piciorul nălţimei de pe aceeaşi latură, vârful opus, precum şi proiecţiunile punctului pe celelalte două laturi, sunt cinci puncte conciclice.

D. C. SCHILERU.

R. Se află pe cercul care are ca diametru dreapta care uneşte punctul considerat de pe latură cu vârful opus acestei laturi.

38. Fie H ortocentrul unui triunghiu ABC, A′ piciorul înălţimei AA′, D simetricul lui H in raport cu A′, E şi F proiecţiile lui D pe laturile AB şi AC. Să se demonstreze că punctele E, A′, F sunt colineare.

NICU O. TAILER.

R. Se ştie că simetricul lui H faţă de o latură oarecare a triunghiului se află pe cercul circumscris triunghiului. Deci dreapta care trece prin E, A′ şi F este dreapta lui SIMSON a punctului D in raport cu triunghiul ABC.

39. Să se demonstreze relaţiunea:

$$\frac{b+c}{bc}r_a+\frac{c+a}{ca}r_b+\frac{a+b}{ab}r_c=\frac{p}{r},$$

notaţiunile fiind cele obişnuite.

CONST. I. GEORGESCU.

R. Primul membru se poate scrie

$$\frac{1}{a}(r_b+r_c)+\frac{1}{b}(r_c+r_a)+\frac{1}{c}(r_a+r_b)=\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}A+\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}B+\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}C,$$

căci $$\frac{1}{a}(r_b+r_c)=\frac{1}{a}4R\cos^2\tfrac{1}{2}A=\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}A,\quad \text{etc.},$$

iar $$\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}A+\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}B+\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}C=\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}A\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}B\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}C$$

$$=\sqrt{\frac{p^3}{(p-a)(p-b)(p-c)}}=\frac{p}{r}.$$

40. Să se demonstreze relaţiunea:

$$\frac{1}{r^2}=\frac{1}{bc}\operatorname{cosec}^2\tfrac{1}{2}A+\frac{1}{ca}\operatorname{cosec}^2\tfrac{1}{2}B+\frac{1}{ab}\operatorname{cosec}^2\tfrac{1}{2}C.$$

CONST. I. GEORGESCU.

R. Membrul al doilea se poate scrie,

$$\frac{1}{abc}\sum a\operatorname{cosec}^2\tfrac{1}{2}A=\frac{2R}{abc}\sum\sin A\operatorname{cosec}^2\tfrac{1}{2}A=\frac{4R}{abc}\sum\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}A$$

$$=\frac{4R}{abc}\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}A\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}B\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}C=\frac{4R}{4RS}\frac{p}{r}=\frac{1}{S}\frac{p}{r}=\frac{1}{pr}\frac{p}{r}=\frac{1}{r^2}.$$

PROBLEME PROPUSE.

3021. Se cer numerele de trei cifre, neterminate cu zero, aşà ca produsul fiecăruia prin răsturnatul său să dea cuburi perfecte de cinci cifre. O. Orănescu.

3022. Care sunt numerele de două cifre al căror cub se termină cu acele numere. S. Katz.

3023. In faţa unui judecător se prezintă în litigiu doi bâlbâiţi. Primul bâlbâie în progresie aritmetică, iar al doilea în progresie geometrică, — socotit a câte 1 secundă fiecare silabă distinctă sau repetată.

Bâlbâiţii încep să vorbiască odată şi termină tot odată... în timp ce judecătorul, uimit, aude următoarele silabe distincte:

— „ Dom | nu | le | eu | plă | tesc | dar | nu | la | ju | de | de | că | tor | ce | eu | am | a | rec | la | ma | bă | că | nu | mi-a | plă | tit | chi | ri | a | şi | m'a | bă | tut | !? "...

Ştiind că nu au fost alte silabe distincte suprapuse decât cea dintâi şi cea din urmă, că primul a *vorbit* de 2 ori mai multe silabe distincte decât al doilea şi că această dublă pledoarie a durat fără întrerupere 34 minute şi 8 secunde, se întreabă de partea cui cade dreptatea. Gh. Zapan.

3024. Să se arate că expresiunea:

$$A_{n+1}^{p+1} \sum_{q=0}^{p} (-1)^q C_p^q \frac{x^{n-q+1}}{n-q+1} - (-1)^p p!$$

este divizibilă prin $(x-1)^{p+1}$ şi să se calculeze câtul diviziunei. Gh. D. Popescu.

3025. $f_1(x)$ şi $f_2(x)$ fiind două funcţiuni continue, să se găsiască ce reprezintă funcţiunea:

$$F(x) = |f_1(x)| + |M_1 - f_1(x)| + |M_2 - f_2(x)| + |f_2(x)|$$

când x variază dela $-\infty$ la $+\infty$. M_1 şi M_2 sunt două constante pozitive. P. Sergescu.

3026. Fie M şi N două puncte isotomice în raport cu vârfurile B şi C ale unui triunghiu ABC. Paralelele duse prin M şi N la latura AC taie latura AB în M' şi N', iar paralelele duse prin M şi N la latura AB taie latura AC în M'' şi N''. Se cere să se

găsiască locul geometric al intersecţiei dreptelor $M'M''$ şi $N'N''$, când punctele M şi N rămânând isotomice, poziţiunea lor se schimbă pe BC.

I. O HUBER.

3027. Se dă un patrulater oarecare $ABCD$. O paralelă la diagonala AC taie laturile AB şi BC în M şi N. Se proiectează punctele M, N şi D respectiv în P, Q şi R pe diagonala AC. Paralela dusă prin P la AD taie în S paralela dusă prin Q la CD. Dreapta DS întâlneşte diagonala AC în T, iar dreapta BR întâlneşte paralela MN în E. Să se demonstreze că dreptele ES sunt paralele şi perpendiculare pe AC.

I. COŞEREANU.

3028. Pe un carton plan se dă un cerc cu centrul O şi un punct P exterior lui. Se cere să se ducă prin P tangentele la cercul O, ştiind că mijlocul lui PO cade în o parte găurită a cartonului şi că tangentele întâlnesc acea gaură.

I. IONESCU.

3029. Să se demonstreze că între unghiurile unui triunghiu oarecare, avem relaţiunile

$$\Sigma \sin^2 A \sin 2B \sin 2C = 4 \sin^2 A \sin^2 B \sin^2 C,$$

$$\Sigma \cos^2 \tfrac{1}{2} A \sin B \sin C = 4 \cos^2 \tfrac{1}{2} A \cos^2 \tfrac{1}{2} B \cos^2 \tfrac{1}{2} C.$$

V. CRISTESCU.

3030. Să se construiască curba

$$x^3 - x^2 y - xy^2 + y^2 = 0.$$

LOCOT. COL. GH. BUICLIU.

Rectificări. La problema 2719 (2647) (Gazeta Matem. Vol. XXV, pag. 144), relaţia a doua ce se cere a se demonstră este:

$$16 S^2 = 4 a^2 m^2{}_a - (r + r_a)^2 (r_b + r_c)^2.$$

La problema propusă 2913 (Gazeta Matem. Vol. XXVII, pag. 222), a se citi: intersecţiile cercurilor adjuncte, în loc de intersecţiile cercurilor asociate.

Problema propusă cu N-rul 2831 (în Gazeta Matem. Vol. XXVI, pag. 248) s'a publicat, din eroare, rezolvată cu N-rul 2835, în Gazeta Matem. Vol. XXVII, pag. 174. La această pagină, în rândul 5 de jos trebue deci a se ceti 2831 în loc de 2835.

Dela apariția ultimului număr s'au primit spre publicare: articole (A), note (N), cereri (C), exerciții (E), probleme propuse (P), recreațiuni (R) și probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela D-nii:

Abramovici A. (2929); *Adam M.* (2879, 87, 918, 29 33, E.); *Agopian Gr.* (2989); *Amărăscu G.* (2922); *Arcadian N.* (2929, 97, 3002, E.); *Balan E.* (2856, 91, 918, 20, 65, 74, 78, 92, 94, 98, 3004, 06, 15, 16, 17); *Barbălatt B.* (2955, 3004, 16, 18, E. N.); *Bărbulescu C.* (2979); *Bercovici E.* (3006); *Blumenfeld D.* (2566, 701, 920, 97, 3011, 12, E.); *Bogdan M.* (2849, 79, 929, 3002); *Brăileanu Al.* (2997); *Buşilă A.* (2918, 81, 89, 94, 97, 3004, P.); *Constantinescu I.* (2887, 3004); *Coşereanu I.* (3004); *Davidescu M.* (N.); *Drăgănescu E.* (2944); *Dragomir I.* (3015, E.); *Georgescu I. C.* (2688, 726, 34, N. P.); *Georgescu E. Fl.* (2978); *Ghiţescu V.* (2929); *Goldenberg I.* (2997, 3006); *Grünbaum M.* (3004); *Grünberg H.* (2997, 3006); *Haimovici S.* (2997); *Hrisanide D.* (2939); *Iliescu P. I.* (3015); *Ionescu I. Brezuica* (2929, 97); *Ionescu Corneliu* (2938, E. R.); *Ionescu Longin* (2850, 95); *Iordanian N.* (3006); *Katz P.* (2429, 922, 82, 97, 98, 3002, 04, 06, 09, 11, 14, 15, E.); *Katz S.* (2879, 920, 29, 77); *Lăzărescu T.* (2929); *Lazarovici I.* (2929, 79); *Măcrineanu S.* (2979, 3006); *Marcus F.* (2879, 977, 3006, E.); *Măru D.* (2960); *Mateescu G.* (3006, 16); *Mihăiescu C.* (3004); *Mirescu P.* (E. P.); *Munteanu L.* (2977); *Negretzu F.* (2929); *Nicolescu S.* (2946); *Oprişanu E.* (2981, 97); *Orănescu O.* (P.); *Panaitescu A.* (3014); *Pinchis P.* (2929, 97, E.); *Popa T.* (2879); *Popea O.* (2910); *Popeanu A.* (2918, 97, 3004); *Popescu D. G.* (2538, 937); *Popoviciu T.* (2683, 920, 44, 55, 60, 92, 3003, 04, 06, 14, 15, 16, N.); *Rabinovici F.* (2977, 79, 3002, 11, 15, R.); *Rădulescu M.* (E.); *Răuţ C.* (2929, 39); *Rosenfeld L.* (2674, 83, 826, 79, 929, 44, 51, 3006); *Samoilă D.* (3006); *Sane M.* (3006); *Schönfeld C.* (2683, 992); *Şcodrano Al.* (2999); *Şerbănescu I.* (2910); *Solacolu S.* (3002, 11, 15); *Solomon A.* (2979); *Solomon D.* (2978, 79, 3002, 11, E.); *Solomon W.* (2901, 44, 74, 81, P.); *Stavrat M.* (3006); *Ştefănescu E.* (2929, E. P.); *Tailer N.* (2879, 979); *Tauber A.* (2849, 95, 944, 46, 3004, 11, 14, E. C.); *Teodorescu I.* (2978); *Vasilescu M.* (2929, 79); *Vasilescu V.* (2979, 89, 98, 3006, 11); *Weinstein I.* (2929); *Weiss L.* (2879, 929. 79, 3009).

Problemele de geometrie rezolvate cât şi cele de propus a căror soluţie nu va fi însoţită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în consideraţiune.

Soluţiunile primite în ultimul timp la problemele: 1948, 2278, 337, 43, 46, 59, 77, 97, 98, 411, 31, 40, 43, 61, 71, 552, 53, 85, 610, 40, 51, 61, 64, 75, 83, 766, 92, 815, 27, 38, 51, 56, 61, 72, 903, 05, 06, 31, 33, 71, 72, 78, 80, 86, 87, 88, 90, 91, 93, 3007, 12 şi 17 nu au fost încă examinate de redactorii cărora le-au fost repartizate.

Colecţiunea „GAZETEI MATEMATICE“

27 VOLUME

Colecţiunea întreagă . . . . . Lei 1000,—

Se vând şi volume izolate, cu preţul de 50 lei, afară de volumele: I, X, XV, XIX, XX şi XXI care se vând numai cu colecţiunea întreagă.

Biblioteca „GAZETEI MATEMATICE“

1. **I. Ionescu, G. Ţiţeica, A. G. Ioachimescu şi V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Aritmetică, Geometrie, Algebră şi Trigonometrie. (520 pag. cu 3381 probleme).* (Epuizată).

2. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de probleme de algebră* (teoria ecuaţilor), (82 pag. cu 462 probleme). (Epuizată).

3. **N. Abramescu,** *Curs de algebră superioară* pentru cl. VIII reală, *Ediţia III revăzută şi adăogită,* 1921 . . . Lei 30,—

4. **A. G. Ioachimescu şi G. Ţiţeica,** *Culegere de probleme de mecanică şi geometrie analitică* (222 pag. cu 825 probleme şi o planşă) (Epuizată) . . . . . Lei 20,—

5. **Tr. Lalescu şi Şt. N. Mirea,** *Culegere de probleme de geometrie descriptivă şi cosmografie* . . . . . Lei 15,—

6. **Tr. Lalescu,** Tratat de Geometrie analitică,

Fascicola I (Epuizată) . . . . . Lei 10,—

Idem, Fascicola II Conice . . . . . Lei 20,—

Idem, Fascicola III Cuadrice . . . . . Lei 20,—

7. **Gh. Lazăr,** *Trigonometria drept liniară* (după cursul predat de Gh. Lazăr la colegiul Sf. Sava) . . . . . Lei 5,—

8. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de probleme de Algebră,* ediţia II-a revăzută şi adăogită, 400 pagini cuprinzând 1765 probleme . . . . . Lei 60,—

La aceste preţuri se vor adăogà taxele poştale pentru expediţie.

Biblioteca Technică a „GAZETEI MATEMATICE“

(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

I. Ionescu, *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcţiune şi a principiilor de calcul.* Volum legat, cuprinzând 128 de pagini şi 15 tabele numerice practice, pentru proiectarea construcţiunilor de beton armat. Lei 12,—

Gazeta Matematică apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 50 lei anual, se plăteşte înainte şi începe la 15 Septemvrie, ori când s'ar face achitarea lui în cursul anului şi nu se face pe termene mai scurte de un an. Abonamentele, schimbările de adrese, reclamaţiunile şi cererile pentru cărţi din biblioteca «Gazetei Matematice», se vor trimete D-lui: **I. D. Teodor,** Inginer Inspector General, Directorul General al Regiei Monopolurilor Statului (adresa: Fabrica de Chibrituri, Bucureşti).

Shimburile de reviste, uvrage pentru recenzii şi orice alte cereri, afară de cele privitoare la cassierie şi expediţie, se vor trimite D-lui Inginer Inspector General I. IONESCU, Str. Căluşei 23, Bucureşti.

GAZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

ANUL XXVIII.

NUMĂRUL 7. — MARTIE 1923

SUMARUL

1. Asupra triunghiului automedian . . . . . *V. Cristescu*
2. Raportul comisiunei pentru acordarea premiului de matematici aplicate la ştiinţele militare, pe intervalul 1 Sept. 1921 — 1 Sept. 1922.
3. Note Matematice: 38 — 48.
4. Cereri: 99.
5. Probleme rezolvate: 2245, 2492, 2535, 2726, 2813, 2852, 2941, 2957, 2963, 2966, 2981, 2997, 3006 şi 3016.
6. Exerciţii: 41 — 45.
7. Probleme propuse: 3031 — 3040.

ABONAMENTUL 50 LEI PE AN.

BUCUREŞTI
IMPRIMERIA FABRICILOR DE CHIBRITURI ŞI TIMBRE - FILARET
1923

SPRE ŞTIINŢA

Gazeta Matematică se publică de către **Societatea „Gazeta Matematică“** având sediul în Bucureşti, compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie de 3 membri, care pentru anul XXVIII se compune din D-nii **N. I. Georgescu,** Inginer-Şef, Director General al Serviciului Imbunătăţirilor Funciare, **Tr. Lalescu,** Doctor în Matematici, Profesor Universitar şi **I. D. Teodor,** Cassier, Inginer Inspector General, Profesor la Şcoala Politechnică, Directorul General al Regiei Monopolurilor Statului.

Manuscrisele destinate „Gazetei Matematice“ se vor trimite D-lui GEORGE BORNEANU, Inginer, sub-directorul Fabricilor de chibrituri şi timbre, Bucureşti.

Se pot trimite şi pe acelaş nume în Str. Sf. Constantin 31, Bucureşti.

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse şi exerciţiile se vor redijà în conformitate cu instrucţiunile se se pot procurà dela D-l Cassier *I. D. Teodor,* în schimbul sumei de 1 (un) leu ce se poate trimite prin poştă.

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evità confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie.

In vederea sporirii taxelor poştale, corespondenţii pot trimete de aci înainte manuscrisele scrise pe ambele pagini ale unei foi, fără a lăsà spaţii albe pe margini sau dedesubt, tăind foile în consecinţă.

Nu se admite însă a se tratà pe aceeaşi foaie mai multe chestiuni sau probleme.

Articolele, notele, problemele propuse, exerciţiile, recreaţiile ce se trimit pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICĂ“, trebue să fie originale, iar nu luate din cărţi sau reviste speciale de matematici.

Probleme nerezolvate: 171, 485, 581, 691, 886, 87, 914, 44, 1000, 08, 40, 56, 58, 83, 92, 146, 62, 78, 80, 214, 36, 70, 71, 87, 97, 99, 355, 64, 67, 77, 79, 84, 86, 98, 99, 412, 50, 82, 90, 553, 84, 87, 626, 37, 50, 76, 79, 80, 711, 29, 33, 35, 53, 64, 90, 835, 76, 82, 84, 905, 06, 14, 29, 44, 45, 49, 59, 73, 79, 87, 2003, 04, 16, 17, 32, 70, 74, 94, 111, 12, 26, 56, 70, 216, 300, 47, 53, 91, 92, 95, 408, 14, 20, 22, 28, 34, 39, 40, 43, 44, 48, 53, 56, 59, 61, 62, 66, 69, 71, 73, 77, 79, 81, 84, 87, 91, 97, 500, 01, 02, 03, 10, 11, 12, 24, 29, 32, 37, 39, 43, 44, 45, 46, 53, 55, 56, 60, 69, 71, 77, 78, 80, 82, 87, 91, 93, 96, 97, 98, 99, 602, 07, 08, 10, 13, 23, 35, 38, 41, 43, 44, 45, 47, 50, 55, 56, 58, 60, 65, 69, 71, 75, 84, 86, 92, 93, 94, 95, 96, 709, 12, 13, 17, 27, 28, 35, 38, 43, 45, 47, 52, 58, 64, 69, 78, 80, 89, 96, 809, 14, 16, 29, 41, 51, 53, 57, 60, 65, 86, 88, 89, 98, 902, 09, 12, 15, 16, 26, 32, 36, 45, 53, 56, 59, 61, 83, 95, 3000, 05, 08, 10, 13, 19, 20, 23, 24, 25.

La redacţia revistei **„Gazeta Matematică“** *se primesc abonamente pentru* **„Revista de matematicas y fisicas elementales“** *din Buenos-Aires, Anul V (Mai 1923 — Aprilie 1924). Costul unui abonament anual este de 70 lei.*

ASUPRA TRIUNGHIULUI AUTOMEDIAN.

Se ştie că între laturile triunghiului automedian există o relaţie de forma

$$(1) \qquad 2a^2 = b^2 + c^2.$$

Acest triunghiu special se bucură de numeroase proprietăţi *). Pe lângă cele găsite de mine cu ocazia soluţiei chestiunei 1347 din *Mathesis* şi a problemei 701, ce am propus în *Gazeta Matematică*, mai semnalez pe următoarele, în care notaţiunile sunt cele adoptate pentru triunghiurile speciale şi anume **):

A_m, B_m, C_m, G sunt picioarele şi punctul de întâlnire al medianelor;

A_h, B_h, C_h, H sunt picioarele şi punctul de întâlnire (ortocentrul) al înălţimilor;

O centrul cercului circumscris triunghiului.

1) *Cercul* BA_mC_h *trece prin* G.

In adevăr, avem:

$$AC_h = (b^2 + c^2 - a^2)/2c$$

şi dacă ţinem seamă de relaţia (1), care există între laturile triunghiului automediam, găsim:

$$AC_h = a^2/2c.$$

Avem deci $AB \cdot AC_h = \frac{1}{2}a^2$.

Apoi, ţinând seama şi de relaţia (1), avem:

$$AG \cdot AA_m = \tfrac{2}{3}AA_m^2 = \tfrac{2}{3} \cdot \frac{2(b^2+c^2)-a^2}{4} = \tfrac{1}{2}a^2.$$

Deci $AB \cdot AC_h = AG \cdot AA_m$

şi prin urmare, punctele B, A_m, G, C_h se află pe un acelaş cerc.

2) *Cercul* CA_mB_h *trece prin* G.

---

*) A se vedeà: *Mathesis*, année 1889, Question 661, pag. 261.
Mathesis, année 1902, Question 1347, pag. 208.
Rouché et *de Comberousse*, Géométrie plane, VI éd., p. 493, ex. 33.
Gazeta Matematică, Vol. IX, Problema 701, p. 159.
Gazeta Matematică, Vol. XVIII, Nota 27, p. 217.

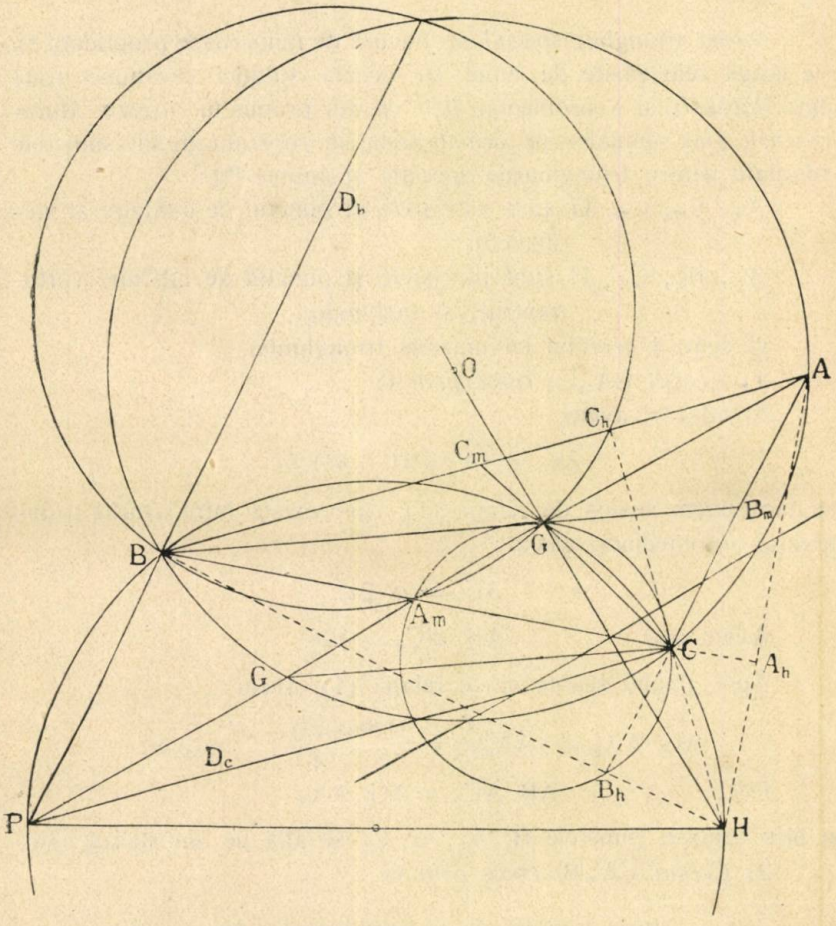
**) *Mathesis*, année 1922, p. 394, Les triangles spéciaux.

Dreptele BC şi $B_h C_h$ fiind antiparalele, avem :

$$AC \cdot AB_h = AB \cdot AC_h$$

şi prin urmare, ţinând seamă de cele stabilite mai sus,

$$AC \cdot AB_h = AG \cdot AA_m.$$



3) *Axa radicală* D_b *a cercului* BA_mC_h *şi a cercului circumscris* ABC *este paralelă cu latura* AC.

In adevăr, ecuaţia cercului BA_mC_h, în coordonate baricentrice fiind

$$F/\delta = \tfrac{1}{2} a^2 (\alpha + \gamma),$$

în care $F = a^2\beta\gamma + b^2\gamma\alpha + c^2\alpha\beta$, $\delta = \alpha + \beta + \gamma$,

iar ecuația cercului circumscris fiind

$$a^2\beta\gamma + b^2\gamma\alpha + c^2\alpha\beta = 0,$$

ecuația axei radicale D_b este

$$\gamma + \alpha = 0.$$

4) *Axa radicală* D_c *a cercului* CA_mB_h *și a cercului circumscris* ABC *este paralelă cu latura* AB.

Analog ca mai sus, găsim că ecuația axei radicală D_c este

$$\alpha + \beta = 0.$$

5) *Centrul radical* P *al cercurilor* BA_mC_h, CA_mB_h, ABC *se află pe cercul* BHC.

Centrul radical P este intersecția axelor radicale D_b, D_c și AG. După proprietățiile 3) și 4), figura ABPC este un paralelogram. Unghiul BPC este deci egal cu unghiul A și prin urmare, punctul P se află pe cercul BHC.

6) *Centrul radical* P *este diametral opus ortocentrului* H *în cercul* BHC.

Aceasta este o consecință imediată a următoarelor două proprietăți ale triunghiului automedian*): cercul BHC trece prin G, iar dreapta lui EULER OH e perpendiculară pe mediana AA_m.

7) *Unghiurile* BAA_m *și* CBB_m *sunt egale.*

Să prelungim pe AA_m cu $A_mG' = GA_m$ și să unim pe C cu G'. Figura GBG'C fiind un paralelogram, avem $\sphericalangle CBB_m = \sphericalangle BCG'$. Laturile triunghiului CGG' sunt paralele și proporționale cu medianele lui ABC. Insă, prin ipoteză, triunghiul CG'G este asemenea cu triunghiul ABC**); deci unghiurile CG'G și CBA sunt egale și prin urmare G' se află pe cercul circumscris O. Deci $\sphericalangle BCG' = \sphericalangle BAA_m$ ca având aceeași măsură în cercul O ($\frac{1}{2}$ arc. BG'). Rezultă dar că unghiurile BAA_m și CBB_m sunt egale fiecare cu unghiul BCG'.

8) *Dreapta lui* EULER *și axa ortică a triunghiului* ABC *se intretaie pe latura* BC.

---

*) *Mathesis,* année 1889, loc. cit.

**) In acest mod definește D-nul J. NEUBERG triunghiul automedian (*Mathesis,* année 1889, loc. cit.).

În adevăr, ecuațiile dreptei lui EULER, a axei ortice și a laturei BC, în coordonate baricentrice, fiind respectiv:

$$\alpha(\operatorname{tg}B-\operatorname{tg}C)+\beta(\operatorname{tg}C-\operatorname{tg}A)+\gamma(\operatorname{tg}A-\operatorname{tg}B)=0,$$

$$\alpha\operatorname{cotg}A+\beta\operatorname{cotg}B+\gamma\operatorname{cotg}C=0,$$

$$\alpha=0,$$

determinantul

$$\begin{vmatrix} \operatorname{tg}B-\operatorname{tg}C & \operatorname{tg}C-\operatorname{tg}A & \operatorname{tg}A-\operatorname{tg}B \\ \operatorname{cotg}A & \operatorname{cotg}B & \operatorname{cotg}C \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

se reduce la $2\operatorname{cotg}A=\operatorname{cotg}B+\operatorname{cotg}C$, relație care caracterizează triunghiul automedian.

9) *Coardele comune cercurilor adjuncte* (AC), (AB) *și cercului* BCB_hC_h *se întretaie în mijlocul medianei* AA_m.

Se știe că în triunghiul automedian cercurile adjuncte (AC), (AB) trec prin G; axa lor radicală este deci mediana AA_m. Rămâne să arătăm că axa radicală d a cercurilor BCB_hC_h și (AC) se întretaie cu axa radicală d' a cercurilor BCB_hC_h și (AB) pe dreapta B_mC_m. Ori, ecuațiile acestor cercuri, în coordonate baricentrice, sunt:

Cercul BCB_hC_h: $\quad F/\delta=\frac{1}{2}a^2\alpha,$

„ (AC): $\quad F/\delta=a^2\beta,$

„ (AB): $\quad F/\delta=a^2\gamma.$

Ecuațiile axelor radicale d și d' sunt deci respectiv:

$$\alpha-2\beta=0, \qquad \alpha-2\gamma=0.$$

Dacă adunăm, membru cu membru, aceste două ecuații, obținem

$$-\alpha+\beta+\gamma=0,$$

care e ecuația dreptei B_mC_m.

V. CRISTESCU.

RAPORTUL COMISIUNEI
PENTRU ACORDAREA PREMIULUI DE MATEMATICI APLICATE LA ŞTIINŢELE MILITARE, PE INTERVALUL 1 SEPTEMBRIE 1921 — 1 SEPTEMBRIE 1922.

In şedinţa Adunării generale extraordinare din 31 august 1921, subsemnaţii Inginer Şef M. SALIGNY şi Maior GH. LITEANU, am fost aleşi în comisiune cu D-nul Inginer I. VASILESCU, dându-ni-se însărcinarea de a examină publicaţiunile de matematică aplicată la ştiinţele militare, în intervalul dela 1 septembrie 1921 pânăla 1 septembrie 1922, în vederea acordării premiului înfiinţat de D-nul General SC. PANAITESCU şi al cărui regulament a fost publicat în „Gazeta Matematică“ Vol. XXIII pag. 10—11.

Din cercetările făcute, am constatat că în intervalul de timp menţionat, nu a apărut nicio broşură, care să trateze subiecte de natura celor expuse în regulamentul premiului.

Din această cauză, am examinat publicaţiunile făcute în revistele militare şi în special în următoarele: „Memorialul Geniului“, „Aeronautica Română“, „Revista Artileriei“, în al căror cuprins se pot publică şi articole în legătură cu matematica aplicată la ştiinţele militare.

Din cercetările făcute, putem rezumă:

1. In „Memorialul Geniului“, ce a apărut până acum numai în trei exemplare, nu s'a publicat niciun articol în legătură cu technica militară.

2. „Revista Aeronautică Română“, ce este scoasă sub îngrijirea Direcţiei Aeronautice din Ministerul de Răsboiu, publică în intervalul de timp de mai sus, următoarele articole, ce ar puteà să ne intereseze:

„Accidentele de aviaţie“ de Inginer ADR. IONESCU.

„Restituţia fotografiilor aeriene“ de Ing. Locot. Observator R. D. TEODORU.

„Consideraţiuni asupra tragerilor aeriene“ (urmare) de Locot. aviator C. I. NICOLAU.

Din examinarea acestor articole, rezultă că primul e foarte puţin în legătură directă cu armata; cel de al doilea se ocupă cu erorile ce se fac din restituirea fotografiilor la alcătuirea unei hărţi, iar cel de al treilea tratează tragerile din avion asupra obiec-

tivelor terestre; nu e un studiu complet, ci numai câtevà considerațiuni.

3. In „Revista Artileriei", s'au publicat mai multe articole dintre care, în condițiunile regulamentului, sunt următoarele:

„Reperajul prin sunete" de Lt. Col. Gr. Protopopescu.

„Corecțiunea complimentară de unghiu de teren" de R. A.

„Problema ochirei tunurilor antiaeronefe" de Sr.

Din toate articolele citate, comisiunea și-a îndreptat atențiunea asupra publicațiunii „Reperajul prin sunet" de Lt. Col. Gr. Protopopescu, ce a apărut în numerele 2-12 ale Revistei Artileriei, Anul XXXV și No. 1-2 Anul XXXVI, cu următorul cuprins:

Partea I. — Fenomenele sonore produse în timpul tragerii.

— Problema generală a reperajului prin sunet.

— Aparatele de reperaj prin sunet.

Partea II. — Problemul matematic al reperajului și regulării prin sunet.

A. Reperaj prin sunet.

— Determinarea locului tunului.

— Metoda asimptotelor.

— Construcția grafică.

— Corecții de hiperbolă.

— Sursă sonoră apropiată și îndepărtată.

— Metoda tangentelor.

— Metoda hiperbolelor.

— Procedeele grafice și prin calcul.

— Corecțiuni de: temperatură, higrometrie, vânt, altitudine.

B. Regularea tragerii prin sunet.

C. Determinarea calibrului.

Partea III. — Organizarea, întrebuințarea și funcționarea secțiilor de reperaj prin sunet.

— Intrebuințarea tactică a secțiilor de reperaj.

Domnul Lt. Col. Gr. Protopopescu a adunat, credem, materialul necesar acestei lucrări pe timpul cât a fost la stagiu în Franța, precum și atunci când D-sa a fost trimis să recepționeze pentru armată secțiile de reperaj, comandate în Franța.

Modul cum D-sa a expus acest studiu, aducându-l la cunoștința camarazilor săi, precum și felul deosebit cum tratează în special partea II-a, adică problemele matematice ale reperajului prin

sunet, ne face ca să propunem să se acorde D-lui Lt. Col. Gr. Protopopescu premiul înființat de D-l General Sc. Panaitescu pentru anul 1921—1922.

M. Saligny, Maior. G. Liteanu.

Acest raport s'a citit și aprobat în adunarea extraordinară din 29 ianuarie 1923.

Delegația societății

N. Georgescu, I. D. Teodor.

NOTE MATEMATICE.

38. *Alte zece aritmetici diverse.* (Vezi nota 24 pag. 107).

41. **Curioasă.** *P. Hilarion.* — Arithmétique curieuse. 1702.

42. **Diavolică.** *Ed. Lucas.* — Arithmétique diabolique. Paris 1889.

43. **Distractivă.** *Gutzmer.* — Aus der Unterhaltungs Arithmetik. Vezi Naturwissen. Wochenschriftt. 1892 pag. 251 — 252.

44. **Figurativă.** *Ed. Lucas.* — Sur l'arithmétique figurative. Vezi Bull. Asoss. fr. Congrès de Rouen 1883.

45. **Intreagă.** *M. Stifel.* — Arithmetica integra. Nürnberg 1544.

46. **Morală.** *Buffon.* — Essai d'arithmétique morale. 1760.

47. **Palpabilă.** *Saunderson.* — Arithmétique palpable. Vezi *Magasin pittoresque*, 1842 pag. 141.

48. **Tetraectică.** *Weigel.* — Aritmétique tétraectique. (In sistemul de numerație cu baza 4).

49. **Transcendentă.** *Ed. Lucas.* — Arithmétique transcendente. (Vezi Théorie des nombres pag. 237).

50. **Zecimală.** (Vezi *L'Intermédiaire des mathématiciens*, vol. XIII pag. 95).

(Va urmà). I. Ionescu.

39. *Asupra unei teoreme a produsului divizorilor.* Teorema III din articolul publicat în Anul XXVI, pag. 59, şi anume că dacă p este prim şi nu divide pe N, atunci.

$$\frac{\Pi(N^p)}{\Pi(N)} - 1 = \mathscr{M}\, p,$$

în care Π (N) indică produsul divizorilor lui N, nu este totdeauna adevărată. Fie de exemplu $p = 3$, $N = 8 = 2^3$, deci $N^p = (2^3)^3 = 2^9$. Găsim $\Pi(N^p) = 2^{45}$, $\Pi(N) = 2^6$ şi ar urmà să avem:

$$2^{39} - 1 = \mathscr{M}\, 3,$$

sau

$$8^{13} = \mathscr{M}\, 13 + 1.$$

Insă:

$$8^{13} = (9-1)^{13} = \mathscr{M}\, 13 - 1.$$

M. Vasiliu.

40. *Asupra formulei creşterilor finite.* D-l Profesor Tr. Bratu, într'un articol publicat sub titlul de mai sus, în *Gazeta Matematică*, stabileşte limitele în care este cuprinsă cantitatea θ, din formula creşterilor finite pentru polinoame:

$$P(x+h) - P(x) = h\, P'(x+\theta h),$$

anume:

$$\tfrac{1}{2} < \theta < 1/\sqrt[n-1]{n}.$$

Intr'o problemă propusă în *Cours d'analyse* par E. Goursat, T. I (1902) pag. 148, se dă ca limită superioară a lui θ, pentru o funcţiune continuă, deci şi pentru un polinom, valoarea:

$$\theta < 1/(n+1).$$

Vreau să observ că această limită restrânge mai mult cadrul oscilaţiunii lui θ, decât cea propusă de D-l Tr. Bratu.

In adevăr, din: $1/(n+1) < 1/\sqrt[n-1]{n}$, se deduce:

$$\left(\frac{1}{n+1}\right)^{n-1} < \frac{1}{n},$$

ceeace este evident.

Pentru generalizare, a se vedeà o notă a D-lui A. Lerner (G. M. XVII p. 16—17).

M. Ghermănescu.

41. *Notă asupra problemei 2698 (G. M., XXVII, pag. 96);* Partea dificilă a acestei probleme consistă în a arată că expresia

$$(p-a)(b-c)^2+(p-b)(c-a)^2+(p-c)(a-b)^2$$

este egală cu

$$abc-8(p-a)(p-b)(p-c),$$

unde a, b, c, p sunt laturile şi semi-perimetrul unui triunghiu oarecare.

In No. 5, pag. 156 a acestui volum, D-l V. Cristescu arată un artificiu de calcul, care simplifică mult operaţiunea de mai sus.

In această notă, voesc să arăt un alt artificiu, care uşurează chestiunea. Pentru aceasta, pornesc dela identitatea cunoscută;

$$\alpha(\beta-\gamma)^2+\beta(\gamma-\alpha)^2+\gamma(\alpha-\beta)^2\equiv(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)-8\alpha\beta\gamma.$$

Punând: $\alpha=p-a$, $\beta=p-b$, $\gamma=p-c$, şi ţinând seamă că

$$(x-y)^2=(y-x)^2;\ (p-b)+(p-c)=a;\ (p-b)-(p-a)=a-b,$$

avem evident

$$(p-a)(b-c)^2+(p-b)(c-a)^2+(p-c)(a-b)^2=abc-8(p-a)(p-b)(p-c).$$

Const. E. Georgescu.

42. *Asupra dreptei lui* Simson. Fie ABC un triunghiu şi AP o dreaptă oarecare ce taie a doua oară cercul circumscris triunghiului în P. Fie Q, R, S proiecţiile lui P pe laturile CA, AB, BC (vezi fig. dela pag. 153).

Triunghiul ARQ tăiat de transversala BC ne dă:

$$\frac{SR}{SQ}\cdot\frac{AB}{BR}\cdot\frac{CQ}{CA}=1,$$

$$\therefore\quad \frac{SR}{SQ}=\frac{CA}{AB}\cdot\frac{BR}{CQ}. \qquad (1)$$

Triunghiurile dreptunghice PBR şi PCQ sunt asemenea, căci unghiurile PBR şi PCQ sunt egale, deoarece au aceeaşi măsură ($\frac{1}{2}$ arc. ABP) în cercul circumscris. Avem deci

$$BR/CQ=PR/PQ$$

şi înlocuind în (1) obţinem

$$\frac{SR}{SQ}=\frac{AC}{AB}\cdot\frac{PR}{PQ}. \qquad (2)$$

Formula (2) ne dă, în funcţie de mărimea laturilor CA, AB şi de distanţele lui P la aceste laturi, raportul $\overline{SR}$: $\overline{SQ}$, în care segmentul RQ al dreptei lui SIMSON a punctului P, determinat de laturile CA, AB, este împărţit de a treia latura BC.

Dacă ne punem condiţia ca segmentul $\overline{SR}$ să fie egal cu segmentul $\overline{SQ}$, atunci relaţia (2) ne dă imediat:

$$PR/PQ = AB/AC,$$

care este o proprietate caracteristică a simedianei.

Avem deci următoarea teoremă enunţată şi demonstrată pentru întâia oară de J. VAN HAARST, pe altă cale *):

Dreapta lui SIMSON *a punctului unde simediana întâlneşte cercul circumscris triunghiului, este împărţită în două părţi egale de laturile triunghiului.*

Reciproca este evidentă.

V. CRISTESCU.

43. *Asupra unei relaţii.* Cele două catete ale unui triunghiu dreptunghic ABC fiind b şi c, iar h înălţimea corespunzătoare ipotenuzei, se ştie că avem relaţia:

$$(1) \qquad 1/h^2 = 1/b^2 + 1/c^2,$$

care se demonstrează cu ajutorul ariilor, iar în *Gazeta Matematică*, Vol. XXVI, p. 44, Nota 2, D-nul V. CRISTESCU o demonstrează, foarte simplu, cu ajutorul asemănării dintre triunghiurile dreptunghice ACD şi BCA, unde $AD = h$ este înalţimea corespunzătoare ipotenuzei BC.

Ţinând seamă că relaţia (1) se poate scrie sub forma:

$$(2) \qquad (bc)^2 = h^2(b^2 + c^2),$$

îmi propun a-i da o altă demonstraţie, tot aşă de simplă.

Considerând cercul circumscris triunghiului ABC, avem după o teoremă bine cunoscută de geometrie **):

$$(3) \qquad bc = 2Rh,$$

unde R este raza cercului circumscris.

Ridicând pe (3) la patrat, avem

---

*) A se vedeà: *Mathesis*, année 1882, p. 151 şi année 1922 p. 324.

**) ROUCHÉ et DE COMBEROUSSE, VI éd., *Géométrie plane*, § 239, p. 146.

(4) $$(bc)^2 = h^2 (2R)^2.$$

Insă triunghiul ABC fiind dreptunghic, avem

$$(2R)^2 = b^2 + c^2$$

şi introducând în (4), rezultă imediat relaţia (2).

MARIN G. DUMITRESCU.
Elev Cl. VI Reală, Liceul Craiova.

44. *Generalizarea unei teoreme a lui Chasles.* Se cunoaşte *dreapta mijlocurilor* lui CHASLES. (Exercices de Géométrie, F. J., No. 1355): *Se dau două drepte* Ox, Oy, *un punct* A *pe* Ox, B *pe* Oy; *dela aceste două puncte, ca origină, se ia într'un sens determinat* $AC = BD$ *şi* $CE = DF$; *locul geometric al mijlocului dreptelor* AB, CD, EF *este dreapta mijlocurilor lui* CHASLES. Generalizarea, pe care vreau să o dau, este următoarea: *Dacă se împarte în acelaş raport* k', *cele trei secante care taie două drepte, astfel ca segmentele determinate pe acestea să fie într'un raport* k, *cele trei puncte sunt în linie dreaptă.*

Fie A, C, E pe Ox; B, D, E, pe Oy; secantele sunt AB, CD, EF. Luăm punctele L, M, N astfel ca

$$LB/LA = MD/MC = NF/NE = k'$$

şi presupun că

$$BD/AC = DF/CE = k,$$

unde $k' \neq k$. Vreau să probez că punctele L, M, N sunt colineare. In adevăr, fie P şi Q punctele unde Ox tae paralelele din L şi M la Oy;

$$PL = k'.\overline{OB} \text{ şi } \overline{QM} = k'.\overline{OD}.$$

Insemnând cu R punctul unde QM tae paralela din L la Ox, avem

$$\overline{QM} - \overline{PL} = k'.\overline{BD} = \overline{RM}.$$

Apoi

$$\overline{OP} = k'.\overline{OA} \text{ şi } \overline{OQ} = k'.\overline{OC},$$

deci

$$\overline{OQ} - \overline{OP} = \overline{PQ} = k'.\overline{AC} = \overline{LR}.$$

Vom avea

$$\overline{RM}/\overline{LR} = k'.\overline{BD}/k'.\overline{AC} = k.$$

Insemnând cu S punctul de intersecţie al paralelelor din M şi N respectiv la Ox şi Oy, demonstrăm de asemenea că $NS/MS = k$.

Rezultă că cele două triunghiuri MNS şi LRM sunt asemenea şi că LM e paralelă cu MN; însă aceste două drepte având un punct comun, se confundă, adică L, M, N sunt colineare.

ION FUNDĂŢEANU.

45. *Asupra problemei 2914.* In cele ce urmează, voiu căutà să dau o soluțiune mai simplă acestei probleme.

In „*Compléments de Trigonométrie*", F. G. M. p. 625, găsim:

$$\cos^2\frac{A}{2}=\frac{r_b+r_c}{4R}, \ldots; \text{ de unde}$$

$$(1)\qquad \Sigma \sec^2\frac{A}{2}=4R\,\Sigma\frac{1}{r_b+r_c}.$$

Dar (2) $\qquad \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=r/4R.$

Multiplicând (1) cu (2), avem tocmai relațiunea propusă în problema 2914,

$$\Sigma \sec^2\frac{A}{2}\cdot \Pi \sin\frac{A}{2}=\Sigma\frac{r}{r_a+r_b}.$$

In aceiași ordine de idei, se poate stabili și relațiunea:

$$\Sigma \operatorname{cosec}^2\frac{A}{2}\cdot \Pi \sin\frac{A}{2}=\Sigma\frac{r}{r_a-r},$$

ținând seamă că

$$\sin^2\frac{A}{2}=\frac{(r_a-r)}{4R}, \text{ etc...}$$

TRAIAN A. DORDEA.

46. *Asupra Problemei No. 2480.* Voiu da o soluție mai simplă acestei probleme. Se cere a se arătà că în orice triunghiu, avem:

$$S=\sqrt[3]{\frac{abc\,r^2_a\,r^2_b\,r^2_c}{(r_a+r_b)(r_b+r_c)(r_c+r_a)}}.$$

Din formulele $a=\frac{r_a(r_b+r_c)}{p}$, $b=\frac{r_b(r_a+r_c)}{p}$, $c=\frac{r_c(r_a+r_b)}{p}$, deduc $(r_a+r_b)(r_b+r_c)(r_c+r_a)=abc\,p^3/r_a\,r_b\,r_c$. Inlocuind în relația dată și simplificând cu abc, găsesc:

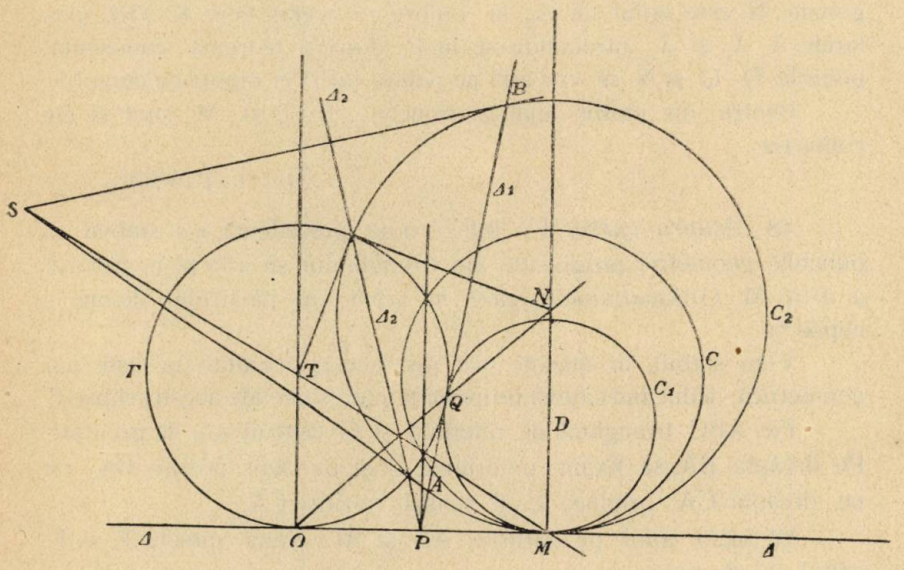
$$S=\sqrt[3]{\frac{r^3_a\,r^3_b\,r^3_c}{p^3}},$$

sau $S=r_a\,r_b\,r_c/p$, formulă cunoscută.

IOAN COȘEREANU.
Liceul din Piatra Neamțu.

47. *Asupra unei probleme de geometrie analitică dela Concursul Gazetei Matematice.* La proba teoretică de geometrie analitică, pentru Clasa VIII, dela Concursul Gazetei Matematice din 1921, s'a dat o chestiune care poate fi enunțată astfel:*)

Pe o dreaptă Δ, se iau două puncte fixe O și M. Un cerc Γ de rază R este tangent dreptei Δ în O, iar o familie de cercuri C sunt tangente aceleiași drepte în M, din care se consideră în special cercul C_1 tangent cercului Γ și cercul C_2 ortogonal cercului Γ. Tangenta de contact Δ_1 între cercurile Γ și C_1, precum și coarda de intersecție Δ_2 a cercurilor Γ și C_2 taie dreapta Δ în același punct. Se cere să se explice acest rezultat.



Candidații nu au găsit explicarea geometrică foarte simplă a rezultatului dat de calcul și pe care o dăm mai jos:

Dreapta Δ este axa radicală a cercurilor C_1 și C_2;
Dreapta Δ_1 „ „ „ „ „ Γ și C_1;
Dreapta Δ_2 „ „ „ „ „ Γ și C_2;

și se știe că axele radicale a trei cercuri luate două câte două se întâlnesc într'un același punct, centrul radical al celor trei cercuri.

*) A se vedeà: *Gazeta Matematică*, Vol. XXVI, p. 260.

De altă parte, Δ fiind o tangentă comună exterioară a cercurilor Γ şi C, mijlocul P al segmentului OM este un punct al axei radicale a cercurilor Γ şi C_1 (sau C_2); cu alte cuvinte, P este centrul radical al celor trei cercuri Γ, C_1 şi C_2 pe unde deci va trece Δ_1 şi Δ_2, precum şi orice coardă de intersecţie a cercurilor Γ şi C şi explicaţia geometrică este dată.

Fie T centrul cercului Γ, D centrul cercului C_1 şi N centrul cercului C_2. Fie Q punctul de tangenţă al cercurilor Γ şi C_1, A şi B intersecţia dreptei Δ_1 (tangenta în Q) cu cercul C_2, S intersecţia tangentelor în A şi B la cercul C_2 ortogonal cu cercul Γ.

Punctele O, Q şi N sunt colineare. In adevăr, O şi Q sunt polurile dreptelor Δ şi Δ_1 în raport cu Γ, iar C_2 şi Γ fiind ortogonale, N este polul lui Δ_2 în raport cu acelaş cerc Γ. Ori, polarele Δ, Δ_1 şi Δ_2 intretăindu-se în P, după o teoremă cunoscută, polurile O, Q şi N se vor află pe polara lui P în raport cu cercul Γ.

Pentru un motiv analog, punctele S, T şi M sunt şi ele colineare.

GH. I. JUJESCU.

48. *Asupra curbei* Γ: Intr'o notă precedentă, s'a stabilit că punctele geometric progresive ale triunghiului se află pe o curbă Γ a d-lui M. GHERMĂNESCU, care în acest caz particular devine o elipsă *).

Vom stabili, în cele de mai jos, acelaş rezultat, pe cale pur geometrică, deducând câtevà proprietăţi interesante ale acestei elipse Γ.

Fie ABC triunghiul de referinţă şi G centrul său de greutate. Pe dreapta BA, să fixăm o origine B şi un sens pozitiv $\overline{BA}$, iar pe dreapta CA, originea C şi sensul pozitiv $\overline{CA}$.

Să luăm apoi pe laturile AB şi AC două puncte F şi E, astfel ca să avem:

$$(1) \qquad \overline{EC}/\overline{EA} = \overline{FA}/\overline{FB} = k.$$

Evident că intersecţia P a dreptelor BE, CF este un punct geometric-progresiv al triunghiului şi vom obţine toate punctele geometric-progresive, făcând să varieze raportul k.

Punând $\overline{CE} = x$ şi $\overline{BE} = x'$, din relaţia (1) se deduce uşor:

$$x = bk/(k-1) \qquad x' = -c/(k-1).$$

*) In acea notă, se va inlocui pretutindeni cuvântul *parabolă* prin *elipsă*.

Eliminând pe k între aceste două relaţii, obţinem :

$$cx + bx' - bc = 0,$$

deci dreptele BE, CF descriu două fascicole omografice, cu vârfurile în B şi C. Intersecţia lor P, în virtutea unei teoreme cunoscute, va descrie o conică, care va trece prin B şi C.

Se poate lesne arătà, prin reducere la absurd, că dreptele BE, CF nu pot fi niciodată paralele, deci conica noastră nu are niciun punct la infinit, adică este o elipsă.

Această elipsă se bucură de câtevà proprietăţi interesante:

1. *Este tangentă în* B *la* AB *şi în* C *la* AC.

Se ştie că această elipsă este tangentă în B la raza fascicolului (B) omoloagă a razei CB a fascicolului (C). Când F se confundă cu B, E tinde către A, deci omoloaga lui CB este BA. Deci elipsa este tangentă la BA în B.

Analog pentru latura CA.

2. *Elipsa* Γ_a *trece prin* G *şi* G_a (asociatul armonic al lui G, în raport cu A).

Într'adevăr, aceste puncte se obţin făcând respectiv $k = -1$ şi $k = +1$.

3. *Centrul* C_a *al elipsei se află pe mijlocul dreptei* GG_a *şi aparţine primei elipse a lui* STEINER.

Observăm pentru aceasta, că punctele A, G, G_a sunt colineare. Deasemenea, BC este polara lui A, în raport cu elipsa. Dreapta AGG_a împarte în două părţi egale această polară, deci va trece prin centrul elipsei. Prin urmare, GG_a este un diametru al elipsei.

Că punctul C_a aparţine primei elipse a lui STEINER a triunghiului ABC, se poate arătà lesne, observând că avem: $BC_a \parallel CG$ şi $CC_a \parallel BG$ şi se ştie că paralelele duse prin două vârfuri ale unui triunghiu la medianele aceloraşi vârfuri se taie pe elipsa lui STEINER.

4. *Elipsa* Γ_a *este egală şi omotetică cu prima elipsă a lui* STEINER.

Este deajuns să observăm că în cazul unui triunghiu echilateral, elipsa lui STEINER devine cercul circumscris, iar elipsa Γ_a un cerc egal cu acesta. Proectând această figură oblic, pe un alt plan, obţinem proprietatea enunţată.

Dealtfel, această metodă a proecţiunii cilindrice poate servì la demonstrarea din nou a proprietăţilor de mai sus.

MIRON NICULESCU şi GR. C. MOISIL.

CERERI.

99. Se spune că *Antioch Cantemir* a fost elev al lui *Bernoulli*. Când şi la care din *Bernoulli?*

I. I.

PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 2245. *Se construesc pe laturile unui triunghiu* ABC, *în exterior, triunghiuri asemenea* AB'C, CA'B, BC'A, *având aceeaşi orientaţie. Fie* G_1, G_2, G_3 *centrele de greutate ale acestor triunghiuri. Să se demonstreze că triunghiul* G_1, G_2, G_3 *are acelaş centru de greutate ca triunghiul* ABC.

AL. ROŞU.

Punctele G_1, G_2 şi G_3 fiind puncte omoloage în triunghiurile asemenea AB'C, CA'B şi BC'A, rezultă că şi triunghiurile AG_1C, CG_2B şi BG_3A sunt asemenea şi cu aceeaşi orientaţie. Insă, conform unei proprietăţi cunoscute,*) punctele G_1 G_2 şi G_3, fiind vârfuriie a trei triunghiuri asemenea construite pe laturile lui ABC, urmează că triunghiurile ABC şi G_1 G_2 G_3 au acelaş centru de greutate.

Din cursul demonstraţiei de mai sus, se vede că proprietatea subsistă şi în cazul când punctele G_1, G_2 şi G_3 ar fi trei puncte omoloage oarecare în triunghiurile asemenea AB'C, CA'B, BC'A.

MICU GRÜNBAUM.

Notă. O bună soluţie a fost dată de D-l B. M. BARBĂLATT, în cazul cevà mai general când punctele G_1, G_2, G_3 ar fi puncte omoloage, situate pe medianele triunghiurilor asemenea AB'C, CA'B şi BC'A, mediane corespunzătoare vârfurilor A', B' şi C'.

PROBLEMA 2492. *O baterie de artilerie a patru piese, execută o tragere progresivă începând cu înălţătorul* D. *Se cere densitatea medie a snopurilor la piciorul traectoriei.*

Aplicaţie, pentru tunul de câmp de 75 $^{m}/_{m}$, mod. 1904, care execută tragerea cu şrapnele, începând cu înălţătorul 4800 m. şi admiţându-se intervalul de spargere constant de 70 m.

LT. I. LINTEŞ.

*) *Exércices de Géometric F. G. M.* pag. 515 sau Rouché et Comberousse, Ière partie, VII-ème édition, pag. 478.

Această problemă, a fost propusă în timpul războiului. Nu a fost însă rezolvată de nimeni — deşi nu este prea grea. Aceasta dovedeşte că în vremea războiului, rezolvatorii noştri rezolvau asemenea probleme făcând trageri reale asupra inamicului, nefiind vreme de teorie.

Astăzi — din punct de vedere artileristic — o asemenea problemă nu mai este modernă, noile regulamente ne mai prevăzând asemenea trageri. Problema 2492, va fi însă rezolvată conform principiilor preconizate de vechiul regulament al tragerilor.

* * *

In studiul „efectelor şrapnelului" se demonstrează că densitatea Δ a gloanţelor la piciorul traectoriei este dată de formula:

$$(1) \qquad \Delta = \frac{N}{\pi\, l_D^2\, \mathrm{tg}^2 \frac{\beta}{2}},$$

în care:

N este numărul gloanţelor ce are şrapnelul.

l_D intervalul de spargere al şrapnelului la distanţa D.

β unghiul de deschidere al snopului şrapnelului, care este dat de formula:

$$(2) \qquad \mathrm{tg}\, \frac{\beta}{2} = \frac{V_R}{V_r + V_s}$$

unde, iarăşi:

V_R este vitesa de rotaţie a proectilului, care este constantă,

V_r vitesa rămasă,

V_s vitesa sporită de încărcătura de pulbere din şrapnel, care, de asemenea, este constantă.

Intr'o tragere progresivă, se fac patru „salturi" din 50 m. în 50 m., când distanţa la care se trage este mai mare ca 3000 m., şi pe fiecare înălţător, un tun trage două şrapnele, deci dacă:

Δ_1, Δ'_1; Δ_2, Δ'_2; Δ_3, Δ'_3; Δ_4, Δ'_4 reprezintă densităţile respective ale unui singur tun, în timpul tragerilor, atunci şi pentru celelalte tunuri ale bateriei — care trag la aceleaşi distanţe — densităţile vor fi identice. Cum Δ şi Δ' înseamnă densităţile a două proectile trase cu acelaş înălţător, deci în aceleaşi condiţiuni, urmează că $\Delta = \Delta'$. Aşà dar, densitatea medie a unui singur tun va fi:

$$(3) \qquad \Delta_m = 2 \times \frac{\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \Delta_4}{4}$$

şi densitatea bateriei întregi va fi:

$$\Delta_m = 2 \times \frac{\Delta_m + \Delta_m + \Delta_m + \Delta_m}{4},$$

adică va fi tot Δ_m, corespunzător unui singur tun.

Din (1) şi (2), obţinem:

$$\Delta = \frac{N}{\pi . I_D^2 \frac{V_R^2}{(V_R + V_s)^2}}$$

şi înlocuind în (3) avem:

$$(4) \qquad \Delta_m = \frac{2N}{4 \pi V_R^2} \left[\left(\frac{V_{r_1} + V_s}{I_D} \right)^2 + \left(\frac{V_{r_2} + V_s}{I_{D+50}} \right)^2 + \left(\frac{V_{r_3} + V_s}{I_{D+100}} \right)^2 + \left(\frac{V_{r_4} + V_s}{I_{D+150}} \right)^2 \right],$$

care formulă reprezintă soluţia problemei, adică valoarea densităţei gloanţelor la piciorul traectoriei.

Aplicaţie.

In cazul tunului de 75 $^m/_m$ mod. 1904, care execută tragerea cu şrapnele, avem:

$$N = 295 \quad , \quad V_R = 38 \, ^m/_{sc} \quad , \quad V_s = 100 \, ^m/_{sc}$$

$$I_D = I_{D+50} = I_{D+100} = I_{D+150} = 70 \text{ m},$$

căci intervalul de spargere a fost dat constant.

V_r, fiind vitesa rămasă proectilului la distanţa de tragere, va trebui să fie luat din tabelele de tragere, corespunzătoare distanţelor:

$$D \quad , \quad D + 50 \quad , \quad D + 100 \quad , \quad D + 150,$$

sau, în cazul nostru, distanţelor:

4800, 4850, 4900, 4950.

Pentru a da, însă, acestei probleme un caracter mai asemănător problemelor care ocupau mai mult pe artilerişti înainte şi la începutul războiului, voiu întrebuinţă formula:

$$V_r = 6{,}5 \ K^2 - 76 K + 450,$$

dedusă prin interpolări, care ne dă vitesa rămasă în funcţie de distanţa în kilometri, pentru tunul de 75 $^m/_m$, mod. 1904.

Aşà dar avem:

D	4800	4850	4900	4950
V_r	235	234	234	233

Inlocuind astfel toate datele numerice în formula (4), obţinem:

$$\Delta_m = 0{,}296 \sim 0{,}3 \text{ aprox.}$$

adică, ar trebui să repetăm aproape de patru ori tragerea progresivă, pentru a aveà 1 glonţ pe metru patrat.

Lt. I. Linteş.

PROBLEMA 2535. *Se dă pentagonul stelat regulat* ABCDE. *Latura* AB *taie latura* DE *în* I. *Să se arate că* A I *este latura pentagonului regulat convex.*

I. Ionescu.

Soluţie dată de D-nii: T. Popoviciu (Lc. Arad) şi P. Katz (Lc. Com. Israelite, Galaţi).

Fie cercul O, împărţit prin A, D, B, E, C în cinci părţi egale. Figura ABCDE este pentagonul regulat stelat. Fie I intersecţia lui DE cu AB. Unghiul AID este egal cu unghiul ADE, căci ele au ca măsură $\frac{1}{2}$ (arc AD + arc BE) = arc AD şi $\frac{1}{2}$ arc ACE = arc AC = arc AD. Triunghiul AID este deci isoscel şi avem AI=AD. Insă AD este latura pentagonului convex înscris în cercul O.

PROBLEMA 2726. *Fie* A', B', C' *picioarele înălţimilor unui triunghiu oarecare* A B C *şi* α, β, γ *punctele euleriene ale înălţimilor*). Să se găsiască condiţia ce trebue să îndeplinească triunghiul pentru ca patrulaterul* A' C' B' γ *să fie un patrat.*

C. H. Nicolau.

Soluţie dată de D-nul Constantin I. Georgescu (Elev în clasa VIII reală a Liceului Mihai Viteazul).

---

*) Punctele euleriene α, β, γ ale înălţimilor sunt respectiv mijloacele segmentelor A H, B H, C H, H fiind ortocentrul triunghiului.

Pentru această denumire, a se vedeà: F. G. — M. *Exercicies de Géométrie,* VI éd., questions 721 a. Note, pag. 305 şi 724 pag. 306.

V. C.

Pentru ca figura $A'C'B'\gamma$ să fie un patrat, este necesar şi suficient ca unghiurile $C'B'\gamma$ şi $A'C'B'$ să fie drepte. In adevăr, în acest caz, patrulaterul $A'C'B'\gamma$, care e înscris în cercul lui EULER, va aveà toate unghiurile drepte, iar diagonalele sale $A'B'$ şi $C'\gamma$ vor fi egale ca diametre ale cercului lui EULER.

Pentru ca unghiul $C'B'\gamma$ să fie drept, trebue ca $C'\gamma$ să fie diametru al cercului lui EULER. Această condiţie atrage imediat ca consecinţă ca centrul cercului lui EULER şi centrul O al cercului circumscris triunghiului să se afle pe înălţimea CC'. Triunghiul ABC trebue deci să fie isoscel, având:

$$\sphericalangle A = \sphericalangle B.$$

Să exprimăm acum şi condiţia ca unghiul $A'C'B'$ să fie drept. Acest unghiu fiind egal cu $180^0 - 2C$, va trebui să avem:

$$180^0 - 2C = 90^0, \qquad \therefore \qquad \sphericalangle C = 45^0.$$

Triunghiul ABC trebue deci să fie un triunghiu isoscel, ale cărui unghiuri sunt:

$$\sphericalangle C = 45^0, \text{ iar } \sphericalangle A = \sphericalangle B = 67^0\,30'.$$

PROBLEMA 2813. *Trouver deux nombres triangulaires, c'est-à-dire de la forme* $\frac{1}{2}a(a+1)$, *dont la demi-somme soit un nombre triangulaire.*

J. N.

Soluţie dată de D-l GR. C. MOISIL, completată cu formulele de rezoluţie.

Chestiunea se reduce la rezolvarea în numere întregi a ecuaţiei cu trei necunoscute:

$$\frac{x(x+1)}{2} = \frac{1}{2}\left[\frac{y(y+1)}{2} + \frac{z(z+1)}{2}\right], \qquad (1)$$

din care deducem:

$$2x^2 + 2x = y^2 + y + z^2 + z,$$

$$4x^2 + 4x + 1 = 2y^2 + 2z^2 + 2x + 2y + 1,$$

$$(2x+1)^2 = (y+z+1)^2 + (y-z)^2. \qquad (2)$$

Putem presupune în (1) că $y > z$, fără a restrânge generalitatea problemei. Ipoteza $y = z$ duce la $x = y = z$, care dă soluţia banală a trei triunghiulare egale.

Egalitatea (2) ne arată că $(2x+1)$, $(y+z+1)$, $(y-z)$ sunt trei *numere pitagorice*, adică trei întregi cari pot măsură laturile unui triunghiu dreptunghic. Se ştie că m şi n sunt două numere întregi şi că dacă $m>n$, putem lua:

$$2x+1=m^2+n^2\ ,\ y+z+1=m^2-n^2\ ,\ y-z=2mn, \quad (3)$$

sau:

$$2x+1=m^2+n^2\ ,\ y+z+1=2mn\ ,\ y-z=m^2-n^2. \quad (4)$$

Cum $y-z+1>y-z$, trebuie să avem în primul caz $m^2-n^2>2mn$ şi în al doilea, $m^2-n^2<2mn$. Rezolvându-le în raport cu m, găsim $m\gtrless(1+\sqrt{2})n$, adică $m\gtrless 2{,}414\ldots n$. Rezolvând sistemele (3) şi (4), găsim:

$$x=\tfrac{1}{2}(m^2+n^2-1)\ ;\ y=\tfrac{1}{2}(m^2-n^2+2mn-1);$$
$$z=\pm\tfrac{1}{2}(m^2-n^2-2mn\mp 1), \quad (5)$$

luând la z semnele superioare, sau inferioare, după cum $m\gtrless 2{,}414\ldots n$.

Pentru ca x, y, z să fie întregi, este destul ca m şi n să fie unul pereche şi altul nepereche. Să facem dar $m=2\alpha+1$, $n=2\beta$ şi apoi $m=2\alpha$, $n=2\beta+1$. Condiţiile $m>n$, $m\gtrless 2{,}414\ldots n$ devin, în primul caz, $\alpha>\beta-0{,}5$ şi $\alpha\gtrless 2{,}414\ldots\beta-0{,}5$ şi în al doilea $\alpha>\beta+0{,}5$ şi $\alpha\gtrless 2{,}414\ldots\beta+1{,}207\ldots$ De aci, rees următoarele serii de formule pentru, x, y, z.

(1) $$\alpha>2{,}414\ldots\beta-0{,}5;$$
$$x=2(\alpha^2+\beta^2+\alpha)\ ;\ y=2(\alpha^2+2\alpha\beta-\beta^2+\alpha+\beta);$$
$$z=2(\alpha^2-2\alpha\beta-\beta^2+\alpha-\beta).$$

Astfel, $\alpha=2$, $\beta=1$ dă $x=14$, $y=20$, $z=0$, la care corespund triunghiularele 105, 210, 0, dintre care primul este media aritmetică a celorlalte două.

De asemenea, $\alpha=3$, $\beta=1$ dă $x=26$, $y=36$, $z=8$, care dau triunghiularele 351, 666, 36 şi avem $351=\tfrac{1}{2}(666+36)$.

(2) $$\beta-0{,}5<\alpha<2{,}414\ldots\beta-0{,}5;$$
$$x=2(\alpha^2+\beta^2+\alpha)\ ;\ y=2(\alpha^2+2\alpha\beta-\beta^2+\alpha+\beta);$$
$$z=2(\beta^2+2\alpha\beta-\alpha^2-\alpha+\beta)-1.$$

Astfel, $\alpha=1$, $\beta=1$ dă $x=6$, $y=8$, $z=3$, care dau triunghiularele 21, 36 şi 6 şi avem $21=\tfrac{1}{2}(36+6)$.

De asemenea, $\alpha = 2$, $\beta = 2$ dă $x = 20$, $y = 24$, $z = 15$, care dau triunghiularele 210, 300, 120 şi avem $210 = \frac{1}{2}(300 + 120)$.

(3) $$\alpha > 2{,}414... \beta + 1{,}207...;$$

$$x = 2(\alpha^2 + \beta^2 + \beta) \; ; \; y = 2(\alpha^2 + 2\alpha\beta - \beta^2 + \alpha - \beta) - 1;$$

$$z = 2(\alpha^2 - 2\alpha\beta - \beta^2 - \alpha - \beta) - 1.$$

Astfel, $\alpha = 4$, $\beta = 1$ dă $x = 36$, $y = 51$, $z = 3$, care dau triunghiularele 666, 1326 şi 6 şi avem $666 = \frac{1}{2}(1326 + 6)$.

(4) $$\beta + 0{,}5 < \alpha < 2{,}414... \beta + 1{,}207;$$

$$x = 2(\alpha^2 + \beta^2 + \beta) \; ; \; y = 2(\alpha^2 + 2\alpha\beta - \beta^2 + \alpha - \beta) - 1;$$

$$z = 2(\beta^2 + 2\alpha\beta - \alpha^2 + \alpha + \beta).$$

Astfel, $\alpha = 2$, $\beta = 1$ dă $x = 12$, $y = 15$, $z = 8$, care dau triunghiularele 78, 120, 36 şi avem $78 = \frac{1}{2}(120 + 36)$.

De asemenea, $\alpha = 3$, $\beta = 1$ dau $x = 22$, $y = 31$, $z = 4$, care dau triunghiularele 253, 496 şi 10 şi avem $253 = \frac{1}{2}(496 + 10)$.

Un mijloc de a da soluţii a fost trimis şi de D-l I. B. Florescu.

PROBLEMA 2852. *Un beţiv eşind dintr'o cârciumă, noaptea târziu, nedumerit încotro îi este casa, socoteşte cam cum ar veni punctele cardinale, după felul cum simţia că se învârteşte pământul cu el; şi, determinându-şi direcţiunea... nimereşte iar în cârciumă! Işi aduce însă aminte că din îndelungata lui experienţă, a putut constată că băutura luată cu kilogramul, în progresie aritmetică, te face să-ţi deviezi mintea şi direcţia cu unghiuri care cresc în progresie geometrică.*

Deci, socotind şi mai cinstindu-se cu circa 2 kg. de vin, numărând la urmă mai multe de câte erau, sticlele consumate, iese iar din cârciumă, determină pentru a doua oară punctele cardinale şi pentru verificare, îmbrăţişând un stâlp, îşi ridică ochii către cer, confundă steaua polară cu un felinar din depărtare... şi-o apucă în direcţiunea opusă aceleia care trebuia.

Se întreabă câte kilograme de vin a băut beţivul?

Gh. Zapan.

Fie x numărul de kilograme băute. Dacă un kilogram deviază direcţia cu unghiul θ, exprimat în grade, 2 kg. vor devià direcţia cu θ^2 grade, iar x kg. cu θ^x grade.

Beţivul, după ce a băut $(x-2)$ kg. de vin, ieşind din cârciumă... se reîntoarce iarăşi; adică îşi greşeşte direcţiunea cu 90 grade.

De unde:

$$(1) \qquad \theta^{x-2} = 90.$$

Revenit în cârciumă, îşi dă seama că s'a rătăcit în unghiu drept, îşi aminteşte de legea enunţată mai sus şi îşi propune ca să ajungă acasă, înainte de-a se lumină de ziuă!

Comandă 2 kilograme de vin şi îşi propune să socotiască cantitatea băută, după numărul total al sticlelor pe care le aveà pe masă.

Beţivul, care, după cât se vede, erà şi bun matematecian, calculează ca unghiul de deviaţie al direcţiei să crească pânăla 360^0, adică să se ajungă tocmai acolo de unde s'a pornit! Beţivul însă, în prada unei iluzii inerente, a văzut mai multe sticle de câte erau. Iese afară şi, orientându-se iarăşi... o apucă în direcţiunea opusă aceleia care trebuià!

Avem dar:

$$(2) \qquad \theta^{x} = 180.$$

Ridicăm relaţiunile (1) şi (2) respectiv la puterile x, $(x-2)$ şi eliminăm pe θ:

$$180^{x-2} = 90^{x}, \quad \therefore \quad 90^{x-2} \times 2^{x-2} = 90^{x-2} \times 90^{2} \quad \therefore \quad 2^{x-2} = 8100.$$

Aplicăm logaritmii:

$$(x-2)\log 2 = \log 8100,$$

$$\therefore \quad x = \frac{\log 8100}{\log 2} + 2 = \frac{3,90849}{0,30103} + 2$$

$$\therefore \quad x = 14,98.$$

Adică beţivul a băut un total de aproximativ 15 kg.!

Au rezolvat această problemă D-nii: Ion S. Antoniu şi Emilian Iliescu (elevi cl. VII Lic. militar Mânăstirea Dealu).

In rezolvarea problemei, se admite că intrarea în cârciumă are direcţiunea perpendiculară pe direcţiunea străzei. Pentru cazul când cârciuma s'ar găsi la o „răspântie", problema se complică; orientarea devine prea dificilă.

G. Z.

PROBLEMA 2941. *Să se calculeze unghiurile a, b, c cuprinse între 0° şi 180°, care satisfac relaţiunilor:*

$$\cot a + \cot b + \cot c = \cot a \cot b + \cot b \cot c + \cot c \cot a$$
$$\cot^2 a + \cot^2 b + \cot^2 c = \cot^2 a \cot^2 b + \cot^2 b \cot^2 c + \cot^2 c \cot^2 a.$$

(Enunţ rectificat).

M. GHERMĂNESCU.

Dacă ridicăm ambii membri ai primei relaţiuni la patrat şi ţinem seama de a doua, vom obţine:

$$\cot a \cot b \cot c = 1.$$

Să punem:

$$\cot a + \cot b + \cot c = \alpha,$$

atunci $\cot a$, $\cot b$, $\cot c$ sunt rădăcinele ecuaţiei:

$$x^3 - \alpha x^2 + \alpha x - 1 = 0,$$
$$\therefore \quad (x-1)[x^2 - (\alpha - 1)x + 1] = 0,$$
$$\therefore \quad x = \cot a = 1, \quad \therefore \quad a = 45^0.$$

Cu această valoare a lui a, ambele relaţiuni din enunţ dau:

$$\cot b \cot c = 1 \quad \therefore \quad \cot b = \operatorname{tg} c,$$
$$\therefore \quad b + c = 90^0 \quad b = m, \; c = 90 - m.$$

Notă. In forma sub care fusese propusă, această problemă era imposibilă.

D-l CONST. I. GEORGESCU (Elev cl. VIII Lic. Mihaiu Viteazul, Bucureşti) a trimis o elegantă soluţie, arătând că enunţul trebuia modificat.

M. G.

PROBLEMA 2957. *Să se afle şase numere consecutive* a, b, c, a', b', c', *astfel ca* a' + b' + c' *să fie rădăcina patrată a numărului* b a c, *iar* a + a' + c + c' + b' *să fie rădăcina patrată a numărului* a' c' b'.

N. CIORĂNESCU.

Soluţie dată de D-l EUGENIU I. BALLAN (cl. VIII particulară, Iaşi).

Cele şase numere consecutive pot avea toate acelaş număr de cifre, n de exemplu; sau unele n cifre şi altele $n+1$.

Dacă toate au acelaş număr de cifre, suma $a' + b' + c'$ poate avea n sau $n+1$ cifre şi, în consecinţă, patratul sumei $a' + b' + c'$

va fi un număr de $2n-1$, $2n$ sau $2n+1$ cifre. Intr'adevăr, patratul unui număr de n cifre are $2n$ sau $2n-1$ cifre, ceeace corespunde şi cazului când suma $a'+b'+c'$ are n cifre; în caz însă, când ea are $n+1$ cifre, pătratul: $(a'+b'+c')^2$ nu poate aveà decât $(2n+2)-1=2n+1$ cifre. Această din urmă consideraţie rezultă din faptul că suma celor 3 numere consecutive a', b', c', sumă ce are $n+1$ cifre, nu poate aveà ca cifră începătoare decât maximum pe 2, iar patratul acelei sume e totdeauna inferior lui $(300\ldots0)^2$.

Repetăm deci că $(a'+b'+c')^2$ are $2n-1$, sau $2n$ sau $2n+1$ cifre. Deoarece bac are $3n$ cifre, prima condiţie din enunţul problemei ne dă $n=1$, adică numerele trebue să fie de o singură cifră.

Să presupunem acum că unele numere au n cifre şi altele au $n+1$ cifre.

Putem distinge cazurile:

1) Primele cinci numere de n cifre şi al şaselea de $n+1$; atunci suma $a'+b'+c'$ are $n+1$ cifre, iar patratul ei $2n+1$ cifre, după cum am văzut mai sus, şi cum bac are $3n$ cifre, rezultă că trebue să avem negreşit $n=1$.

2) şi 3) Când primele patru sau trei numere sunt de n cifre iar celelalte de $n+1$ cifre, aceleaşi consideraţiuni ca în cazul 1) conduc a deduce $n=1$.

4) şi 5) Dacă primele două numere, sau numai primul număr, ar fi de n cifre, iar celelalte de $n+1$ cifre, prin consideraţiuni analoage, urmează că trebue să avem sau $3n=2n$ sau $n=-1$, ceeace nu se poate.

Rezultă, dar, că numerele cerute se pot găsi în şirurile următoare de numere consecutive:

1, 2, 3, 4, 5, 6.	5, 6, 7, 8, 9, 10.
2, 3, 4, 5, 6, 7.	6, 7, 8, 9, 10, 11.
3, 4, 5, 6, 7, 8.	7, 8, 9, 10, 11, 12.
4, 5, 6, 7, 8, 9.	

Dacă ţinem seamă că ac, trebue să fie ultimele două cifre ale unui patrat perfect, rezultă că numai şirul al doilea, adică

2, 3, 4, 5, 6, 7

satisface primei condiţiuni din problemă.

Aceste numere, verificând şi condiţiunea a doua pusă în enunţul problemei, adică

$$(2+4+5+6+7)^2 = 576,$$

sunt numerele căutate.

Soluţiuni analoage, arătând că numerele căutate nu pot fi decât de o singură cifră, s'au primit dela D-nii: Fl. E. Georgescu (cl. VI, Lic. Cantemir); Tib. Popoviciu (Lic. Arad); M. Pinchis (Lic. Galaţi); W. Solomon şi E. Bercovici (Lic. Matei Basarab); A. Miclescu (Şc. de Artilerie); N. Tailer (Lic. Bârlad); S. Solacolu şi O. Popea.

Au rezolvat problema pe cale algebrică, formând conform enunţului, ecuaţiile:

$$9a^2 - 39a + 42 = 0 \quad \text{şi} \quad 25a^2 + 29a - 158 = 0,$$

care ne dau $a = 2$, de unde şirul de numere consecutive 2, 3, 4, 5, 6, 7, D-nii: Cr. Goilav, Tib. Popoviciu, A. Buşilă, I. Coşereanu, V. Dan, M. G. Dumitrescu, C. E. Georgescu, C. I. Georgescu, V. Ghiţescu, Carol Ionescu, I. Lazarovici, D. Măru, Fl. Negretzu, I. Popescu-Văleni, C. Schönfeld, Ş. Solacoglu, Em. Ştefănescu şi L. Weiss.

Au trimis soluţii şi D-nii: T. Dordea, C. Toia, P. Katz, D. Blumenfeld şi S. Katz.

Observaţii. 1. Acelaş şir de numere consecutive satisface şi condiţiei: $(a' + b + b' + c + c')^2 = b'\,a\,a'$, adică $(5+3+6+4+7)^2 = 625$.

(Tr. Dordea).

2. Probleme analoage se pot formă uşor, de ex.:

Să se găsiască şase numere consecutive $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$, astfel încât $a_2 + a_3 + a_5 + a_6$ să fie rădăcina patrată a numărului $a_3\,a_5\,a_4$, şi numărul $a_6 + a_1 + a_3 + a_4 + a_5$ rădăcina patrată a numărului $a_5\,a_6\,a_2$.

Rezultatul e: 3, 4, 5, 6, 7, 8.

(Tr. Dordea).

Să se găsiască numerele a_1, a_1, a_3 consecutive, precum şi numerele b_1, b_2, b_3 consecutivè, astfel ca să avem relaţia: $(a_1 + a_2 + a_3)^2 = b_1\,b_3\,b_2$. Rezultatul $a_1 = 7$, $b_1 = 5$.

(Fl. Georgescu).

3. In soluţia dată, s'a considerat că $(a' + b' + c')$ şi $(a + a' + c + c' + b')$ sunt rădăcinile patrate exacte ale numerelor bac şi $a'\,c'\,b'$. Să cercetăm dacă avem soluţii, când acele sume ar fi rădăcinile cu o aproximaţie în minus sau plus, de o unitate a numerelor bac şi $a'\,c'\,b'$. Cercetând şirul 3, 4, 5, 6, 7, 8, vedem că $3+5+6+7+8 = 29$, pe când $26^2 < 687 < 27^2$, in consecinţă cu atât mai mult în şirurile superioare şirului considerat, suma $a+a'+c+c'+b'$ va fi superioară rădăcinilor cu aproximaţie ale lui $a'\,c'\,b'$ şi deci un astfel de şir nu există.

(T. Popoviciu).

4. D-nii Fl. Georgescu şi C. Schönfeld, au conchis că a doua condiţie din enunţ nu serveşte la găsirea numerelor 2, 3, 4, 5, 6, 7; iar D-l W. Solomon a cercetat şi cazul când numerele sunt consecutive în sens descrescând, adică $a > c'$ şi a demonstrat că, în acest caz, problema nu e posibilă.

Maior G. I. L.

PROBLEMA 2963. *Se dă un polinom $f(x)$, care nu are rădăcini duble. Să se demonstreze că integrala curbilinie luată dealungul unui cerc cu raza foarte mare:*

$$\int_{(C)} \frac{y f'_x(x)\,dx - f(x)\,dy}{2y^2 - 2y f(x) + f^2(x)}$$

nu poate avea decât una din valorile 0 *sau* $\pm 2\pi$.

P. Sergescu.

Punând:

$$X = y - f(x) \qquad Y = y,$$

integrala propusă devine:

$$\int_{(C)} \frac{X\,dY - Y\,dX}{X^2 + Y^2} = \int_{(C)} d \operatorname{arc\,tg} \frac{Y}{X}.$$

Deci, avem integrala unei diferenţiale totale. Ca atare, această cantitate e *nulă*, dacă coeficienţii lui dX şi dY sunt continui în interiorul cercului, adică dacă curbele $X = 0$, $Y = 0$ nu au nici o rădăcină comună în acest domeniu. Această eventualitate echivalează cu: $f(x)$ nu se anulează în interiorul cercului pentru x real, sau fiindcă cercul e foarte mare, $f(x)$ nu are nici o rădăcină reală.

Dar dacă $f(x)$ are rădăcini reale, putem presupune că C le conţine pe toate, căci el e arbitrar de mare. In acest caz, integrala propusă e egală cu suma integralelor luate în sens direct dealungul cercurilor cu raza foarte mică, care înconjoară fiecare rădăcină. Această din urmă integrală e egală cu variaţia lui arc tg Y/X. Insă, se ştie că dacă

$$\left[\frac{D(X, Y)}{D(x, y)}\right]_{\alpha, \beta} \neq 0$$

(unde α, β e un punct de intersecţie al curbelor $X = 0$, $Y = 0$), la un cerc mic descris de punctul x, y în jurul lui α, β, corespunde un contur închis descris de punctul X, Y în jurul originei.

Sensul de parcurs pe cele două contururi e acelaş sau nu, după cum determinantul funcţional e pozitiv sau negativ. Prin urmare, variaţia lui arc tg Y/X este $\pm 2\pi$, (după semnul determinantului funcţional), pentru fiecare din cercurile cele mici. Integrala dealungul lui C e egală cu $2\pi(P-N)$, unde P e numărul rădăcinilor reale ale lui $f(x)$ pentru care determinantul funcţional e pozitiv, iar N acela pentru care determinantul e negativ.

Pentru problema noastră, acest determinant funcţional este $-f'(x)$. Prin ipoteză, $f(x)$ nu are zerori duble, deci $f'(x)$ e diferit de zero pentru toate zerorile lui $f(x)$. Pe de altă parte, e evident că pentru două rădăcini consecutive ale lui $f(x)=0$, semnul lui $f'_x(x)$ e diferit. Aceasta însemnează că avem $P-N=\pm 1$, deci integrala propusă nu poate aveà decât una din valorile $\pm 2\pi$, când $f(x)=0$ are rădăcini reale.

Notă. Nici una din soluţiile primite nu a dat demonstraţia riguroasă a proprietăţei enunţate.

PROBLEMA 2966. *Să se găsiască formula care permite a calculà suma*

$$1+12+112+\ldots+11\ldots12$$

compusă din n *numere şi să se calculeze această sumă.*

L. Focşăneanu.

1. Soluţie şi generalizare de D-l Ioan Şerbănescu (Liceul Mihai-Viteazul, Bucureşti).

Fie suma mai generală:

$$S=a+ab+aab+aaab+\ldots aa\ldots aab$$

compusă din n numere, a şi b fiind cifre în sistemul de numeraţie cu baza β. Avem :

$$S=a+aa+\ldots+aa\ldots aa+(b-a)(n-1)$$

$$S=a(1+11+\ldots+11\ldots11)+(b-a)(n-1)$$

$$S'=1+11+\ldots+11\ldots11$$

$$S'=1+(\beta+1)+(\beta^2+\beta+1)+\ldots+(\beta^{n-1}+\beta^{n-2}+\ldots+\beta+1)$$

$$=1+\frac{\beta^2-1}{\beta-1}+\frac{\beta^3-1}{\beta-1}+\ldots+\frac{\beta^n-1}{\beta-1}=\frac{1}{(\beta-1)}\left[\frac{\beta^{n+1}-\beta}{\beta-1}-n\right]$$

şi

$$S = a\frac{\beta^{n+1} - (n+1)\beta + n}{(\beta-1)^2} + (b-a)(n-1).$$

Dacă în această formulă, facem $\beta = 10$, obţinem

$$S = a\frac{10^{n+1} - 9n - 10}{81} + (b-a)(n-1),$$

iar problema 2966 se obţine făcând aci $a = 1, b = 2$, în care caz, suma devine

$$S = \frac{10^{n+1} + 72n - 91}{81}.$$

2. Au generalizat problema în sistemul de numeraţie zecimal, D-nii: F. Negretzu, T. Popoviciu (Arad), I. Constantinescu (M-rea Dealu), A. Tauber (Botoşani), E. Russu (Lc. Internat Iaşi), E. Ştefănescu, I. Stoenescu (Lc. Cantemir), C. E. Georgescu, F. Georgescu, I. Antoniu, E. Iliescu (M-rea Dealu), Cr. Goilav, D. Blumenfeld, V. Vasilescu şi T. Popa.

3. Unii corespondenţi au observat că problema, sub forma generalizată, se găseşte în „*Culegere de Probleme*", Cap. XVIII, No. 42, pag. 64; alţii au observat că o problemă analoagă s'a propus în revista „Matematicas y Fisicas elementales" anul III p. 140 (N-rul 217).

4. D-l Traian A. Dordea a calculat suma:
$a + a(p+k) + a(p^2 + p + k) + \ldots + a(p^{n-1} + p^{n-2} + \ldots + p + k)$
în care p şi k sunt numere oarecare.

5. D-nii V. Vasilescu (Ploeşti), I. Teodorescu (Ploeşti), V. Dan (Galaţi) M. Georgescu, M. Adam şi T. Popa observă că suma se mai poate scrie sub forma:

$$S = \frac{111\ldots101 + 8n}{9}.$$

6. D-nii O. Popea, E. Russu şi R. Cădere, observă că o consecinţă a problemei este divizibilitatea prin 81 a expresiunei:

$$E = 10^{n+1} + 72n - 91.$$

7. Au rezolvat problema, fără a o generaliză, tot prin metoda dela 1, D-nii C. I. Georgescu, B. Martinian, A. Panaitescu

(Brăila), E. Bercovici, J. Charas (Buzău), M. Adam (Constanța), M. Gogălniceanu, O. Popea (Chișinău), E. Ballan, I. Ionescu-Brezuica (Caracal), Dobrescu-Băbici, Carol Ionescu, N. Tailer (Bârlad), M. Grünbaum, I. Coșereanu (Timișoara), A Miclescu (Șc. Artilerie), A. Pamula, P. Katz, S. Vasilache, A. Școdrano (Durostor), I. Nicolau (Pitești), V. Dan (Galați) M. Georgescu, M. Pinchis, N. Brătescu, W. Solomon, R. Cădere, N. Arcadian V. Antoniu, Ablor, I. Ioniță.

8. D-l A. Bușilă, a dat o altă soluție, cu ajutorul derivatelor.

9. Foarte mulți corespondenți nu au dat rezultatul sub o formă simplă și concentrată, cum ar fi trebuit. De pildă, un corespondent găsește ca formulă de sumare expresiunea:

$$1+2(n-1)+\frac{10}{9}\left[\frac{10\,(10^{n-1}-1)}{9}-(n-1)\right].$$

PROBLEMA 2981. *Fie* A B *și* C D *diametre perpendiculare în cercul* O. *Dacă* N *e proecția pe tangenta în* C *la cerc, a punctului* M *variabil pe semicercul* A C B, *să se găsiască locul geometric al simetricului punctului* O *în raport cu intersecția dreptei* O M *cu paralela din* N *la* D M.

N. Tuhai.

Ca o generalizare a problemei propuse, voiu considerà A B și C D două diametre oarecare în cercul O, iar punctul N, intersecția tangentei în C la cerc cu o dreaptă de direcție dată, dusă prin punctul M variabil pe cercul O.

Fie ω intersecția dreptei O M cu paralela din N la D M; iar E al doilea punct de intersecție al dreptei O M cu cercul O. Vom aveà:

$$\sphericalangle\, M\,\omega\,N = \sphericalangle\, D\,M\,\omega \quad \text{ca alterne interne,}$$

iar: măs. $\sphericalangle\, D\,M\,\omega = \frac{1}{2}$ arc D E $= \frac{1}{2}$ arc M C $=$ măs. $\sphericalangle\, N\,C\,M$,

de unde: $\sphericalangle\, M\,\omega\,N = \sphericalangle\, M\,C\,N$.

Această egalitate de unghiuri ne arată că patrulaterul N C ω M este inscriptibil. Insă unghiul C N M este constant, ca format din direcția fixă a tangentei C N cu direcția, iarăși fixă, a dreptei M N, deci și unghiul C ω O $= \sphericalangle$ C N M va fi constant; de aci, urmează

că locul lui ω va fi un cerc, capabil de unghiul cunoscut C N M şi construit pe segmentul dat C O.

Locul simetricului lui O în raport cu punctul ω, va fi prin urmare, un cerc omotetic cu cercul C ω O, raportul de omotetie fiind 2.

In cazul particular al problemei propuse, unghiul C ω O fiind drept, locul lui ω va fi cercul de diametru C O, deci locul simetricului lui O în raport cu ω, va fi cercul de rază C O şi cu centrul în punctul C.

MIRON NICULESCU.
Student.

Soluţie analitică dată de D-nii: E. BALLAN, I. COŞEREANU, L. FOCŞENEANU, C. E. GEORGESCU, F. GEORGESCU, E. OPRIŞANU, A. POPEANU, A. STOENESCU şi ST. THEODORESCU.

Luăm ca axe de coordonate diametrele A B şi C D ale cercului O; atunci coordonatele punctelor D, C, M şi N vor fi: $D_{(0,-R)}$, $C_{(0,R)}$, $M_{(\alpha,\beta)}$, $N_{(\alpha,R)}$.

Coeficientul unghiular al dreptei DM va fi: $(\beta + R/\alpha)$, iar ecuaţia paralelei duse prin N la dreapta D M se poate scrie:

$$y - R = \frac{\beta + R}{\alpha}(x - \alpha). \qquad (1)$$

Ecuaţia dreptei O M este:

$$y = \frac{\beta}{\alpha} x, \qquad (2)$$

x şi y fiind coordonatele punctului ω, intersecţia dreptei O M cu paralela din N la D M. Fie $P_{(X,Y)}$ simetricul lui O în raport cu ω; vom aveà:

$$X = 2x \quad \text{şi} \quad Y = 2y. \qquad (3)$$

Ducând valorile lui x şi y, din relaţiile (3) în (1) şi (2), obţinem următoarele două ecuaţii, care ne dau coordonatele X şi Y ale punctului P.

$$Y - 2R = \frac{\beta + R}{\alpha}(X - 2\alpha), \qquad (4)$$

$$Y = \frac{\beta}{\alpha} X. \qquad (5)$$

Eliminând pe α şi β între ecuaţiile (4), (5) şi relaţia de condiţie:

$$\alpha^2+\beta^2=R^2, \qquad (6)$$

se obţine ecuaţia locului geometric al punctului P.

Pentru eliminare, se observă că dacă rezolvăm ecuaţiile (4) şi (5) în raport cu α şi β, se obţine:

$$\beta^2=RY \quad \text{şi} \quad \alpha^2=RX^2/Y,$$

valori care introduse în relaţia (6) dau:

$$X^2+Y^2-RY=0,$$

care este ecuaţia locului geometric al punctului P. Această ecuaţie reprezintă un cerc cu centrul în punctul C şi care trece prin O.

Au mai rezolvat bine problema propusă, pe cale geometrică D-nii: A. Buşilă, M. Focşeneanu, C. I. Georgescu, M. Grünbaum, P. Katz, D. Măru, Gh. D. Popescu, T. Popoviciu, A. Potop, E. Russu, A. Şcodrano, M. I. Şerbănescu, W. Solomon, N. Tailer şi I. Teodorescu.

D-nii A. Popeanu şi L. Focşeneanu au arătat pe cale analitică, că problema se poate generaliză înlocuind cercul O prin o elipsă sau hiperbolă şi că se obţine ca loc geometric al punctului P, o curbă de aceeaşi natură ca şi curba pe care se mişcă punctul M.

PROBLEMA 2997. *Să se demonstreze că aria unui triunghiu este dată de relaţiunile:*

$$2S=\frac{a^2}{\operatorname{tg}B+\operatorname{tg}C}+\frac{b^2}{\operatorname{tg}C+\operatorname{tg}A}+\frac{c^2}{\operatorname{tg}A+\operatorname{tg}B},$$

$$2S=\frac{a^2}{\operatorname{cotg}\frac{1}{2}B+\operatorname{cotg}\frac{1}{2}C}+\frac{b^2}{\operatorname{cotg}\frac{1}{2}C+\operatorname{cotg}\frac{1}{2}A}+\frac{c^2}{\operatorname{cotg}\frac{1}{2}A+\operatorname{cotg}\frac{1}{2}B}.$$

Gh. D. Popescu.

I. Soluţie dată de D-nul B. M. Barbălatt (Elev Cl. VI, Liceul Codreanu, Bârlad *).

Fie H ortocentrul triunghiului ABC şi A', B', C' picioarele înălţimilor. Dacă scriem că aria triunghiului ABC este egală cu suma ariilor triunghiurilor HBC, HCA, HAB, avem:

$$2S=BC.HA'+CA.HB'+AB.HC'. \qquad (1)$$

*) Aceiaşi soluţie a fost dată şi de autorul problemei.

(N. R.)

Dar $BA' = HA' \operatorname{tg} C$, $CA' = HA' \operatorname{tg} B$,

$\therefore\ a = BA' + CA' = HA'(\operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C)$, $HA' = \dfrac{a}{\operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C}$, etc.

şi înlocuind în (1) obţinem prima relaţie cerută.

Fie I centrul cercului înscris în triunghiul ABC. Dacă scriem că suma ariilor triunghiurilor IAB, IBC, ICA este egală cu aria triunghiului ABC, avem

$$2S = ar + br + cr. \qquad (2)$$

Dacă D este punctul de contact al cercului înscris cu latura BC, triunghiurile dreptunghice IBD, ICD ne dau:

$BD = ID \operatorname{cotg} \frac{1}{2} B$, $CD = ID \operatorname{cotg} \frac{1}{2} C$ $\therefore\ a = r(\operatorname{cotg} \frac{1}{2} B + \operatorname{cotg} \frac{1}{2} C)$, etc.

Inlocuind pe r în (2), obţinem a doua relaţie cerută.

II. Soluţie dată de D-nii: A. Popeanu (Constanţa), Ion Coşereanu (Timişoara), Florea I. Negretzu (Elev Cl. VII, Liceul I. C. Brătianu, Piteşti), Tiberiu Popoviciu (Elev Cl. VII, Liceul Moise Nicoară Arad), Mircea I. Adam (Elev Cl. VI Liceul Mircea cel Bătrân, Constanţa), Const. E. Georgescu şi Florian Er. Georgescu (Elevi Cl. VIII Liceul Cantemir-Vodă, Bucureşti), Emil Ştefănescu (Elev Cl. VII, Liceul Spiru Haret, Bucureşti), Mihail H. Brătescu (Elev Cl. VII, Liceul Al. Lahovari), I. M. Şerbănescu şi Const. I. Georgescu (Elevi Cl. VIII, Liceul Mihai Viteazul), Alexandru Tauber (Elev Cl. VII, Liceul Laurian, Botoşani), C. D. Mihăescu (Elev Cl. VII, Giurgiu), David M. Blumenfeld (Elev Cl. VI, Liceul Laurian, Botoşani), Ion Constantinescu (Elev Cl. VII, Liceul Mânăstirea Dealului), Aurel G. Panaitescu (Elev Cl. VII Liceul Nicolae Bălcescu, Brăila), Pincu M. Katz (Elev Cl. VII Liceul Comunităţei israelite, Galaţi), Marcu Witzman-Vania (Elev Cl. VII Liceul V. Alexandri, Galaţi), Ovidiu G. Popea (Elev Cl. VI Liceul Chişinău), Virgil Ghiţescu (Elev Cl. VII Liceul Mihai Viteazul), Adrian A. Buşilă (Elev Cl. VII Liceul Mihai Viteazul), Ion N. Dragomir (Elev Cl. VII Liceul Cantemir).

Plecând dela relaţiile cunoscute:

$a = h_a(\operatorname{cotg} B + \operatorname{cotg} C)$, ... $2S = a h_a$, ...

putem scrie:

$$\Sigma \frac{a^2}{\operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C} = \Sigma\, a h_a \operatorname{cotg} B \operatorname{cotg} C = 2S\, \Sigma \operatorname{cotg} B \operatorname{cotg} C = 2S.$$

Pentru a demonstrà a doua relație, plecăm dela relațiile:

$$a = r(\operatorname{cotg} \tfrac{1}{2} B + \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2} C), \qquad b = r(\operatorname{cotg} \tfrac{1}{2} C + \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2} A), \text{ etc.}$$

$$\therefore \quad \Sigma \frac{a^2}{\operatorname{cotg} \tfrac{1}{2} B + \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2} C} = r(a+b+c) = 2pr = 2S.$$

Au rezolvat bine problema și D-nii: Ernest G. Oprișanu (Student, Bucureşti), D. C. Schileru, Alex. Brăileanu (Cl. VII, Constanța), N. P. Arcadian și I. Icnescu-Brezuica (Elevi Cl. VII, Liceul Caracal), M. D. Vasilescu (Cl. VIII, Craiova), Alex. Şcodrano (Cl. VIII, Liceul Durostor), Petre A. Miescu (Cl. VII, Liceul Lazăr), Herman S. Grünberg, Ion Chr. Popovici, G. Mateescu, I. Goldenberg, M. Pinchis și Salo C. Haimovici (Elevi Liceul V. Alexandri, Galați).

Notă. Avem și relațiile analoage:

$$\Sigma \frac{a^2}{\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} B + \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} C} = 2p(2R - r).$$

Const. I. Georgescu, D. C. Schileru, N. P. Arcadian.

$$\Sigma \frac{a^2 - b^2}{\operatorname{tg} A - \operatorname{tg} B} = \Sigma \frac{a^2 - b^2}{\operatorname{cotg} \tfrac{1}{2} B - \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2} A} = 2S.$$

Fl. Er. Georgescu, Aurel G. Panaitescu, C. I. Georgescu.

PROBLEMA 3006. *Să se stabiliască identitatea.*

$$a_1 \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} + b_1 \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = c_1 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

și să se generalizeze. N. Georgescu-Roegen.

Soluție și generalizare dată de D-nii: B. M. Barbălatt, E. Bercovici, V. Ghițescu, I. Goldenberg, H. Grünberg, N. Iordanian, P. Katz, St. Măcrineanu, G. Mateescu, A. Popeanu, L. Rosenfeld, D. Samoilă, M. Sane, A. Şcodrano, M. Stavrat, E. Ştefănescu, A. Tauber și V. Vasilescu.

Dacă considerăm determinantul de ordinul $(n+1)$:

$$D_{n+1} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1,n+1} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1,n+1} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2,n+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{n,n+1} \end{vmatrix} = 0$$

având primele două linii identice, pe care-l desvoltăm după elementele primei linii, vom puteà scrie, însemnând cu A_{ik} minorul lui a_{ik}:

$$D_{n+1} = a_{12} A_{11} - a_{12} A_{12} + \ldots \pm a_{1,n+1} A_{1,n+1} \equiv 0.$$

Dacă în fiecare din minorii A_{ik}, facem ca elementele $a_{i,n+1}$ să ocupe coloana i, toate produsele vor fi de acelaş semn, afară de ultimul şi vom puteà deci scrie:

$$a_{11} A_{11} + a_{12} A_{12} + \ldots + a_{1n} A_{1n} \equiv a_{1,n+1} A_{1,n+1},$$

identitatea care generalizează pe cea din enunţ ($n = 2$).

Altă generalizare. Să considerăm sistemul de n ecuaţii lineare:

$$a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \ldots + a_{in} x_n = a_i , \qquad (i = 1, 2, \ldots n)$$

în care determinantul coeficienţilor δ, este diferit de zero. Sistemul se poate rezolvà atunci, iar valorile necunoscutelor sunt date de regula lui CRAMER:

$$x_1 = \delta_1/\delta ; x_2 = \delta_2/\delta ; \ldots x_i = \delta_i/\delta, \qquad (i = 1, 2, \ldots n)$$

în care δ_i se obţine din δ înlocuind elementele coloanei i, respectiv prin a_i.

Valorile necunoscutelor, astfel determinate, verifică oricare din ecuaţiile propuse, astfel că vom aveà identic:

$$a_{i1} \delta_1 + a_{i2} \delta_2 + \ldots + a_{in} \delta_n \equiv a_i \delta$$

Această relaţiune este adevărată, chiar când $\delta = 0$, ceeace nu reese din consideraţiunile de mai sus, dar reese implicit din desvoltarea dată în prima generalizare.

Generalizarea pe care am dat'o mai sus, dă însă o interpretare mai intuitivă problemei propuse şi acest mod de a vedeà nu a fost observat la corespondenţii noştri, afară de D-nii F. RABINOVICI şi F. MARCUS, însă numai pentru cazul particular din enunţ.

O şi mai largă generalizare în sensul primei metode, a fost dată de D-l TIB. POPOVICIU.

D-l P. MIRESCU s'a mulţumit să verifice, prin desvoltări, identitatea propusă.

M. G.

PROBLEMA 3016. *Trei cercuri oarecare se întretaie două câte două în şase puncte* A_1, B_1, C_1 *şi* A_2, B_2, C_2. *Să se arate că cele şase drepte* A_1B_1, A_2B_2, B_1C_1, B_2C_2, C_1A_1, C_2A_2, *care trec prin aceste puncte şi care nu sunt coarde comune, se taie două câte două în trei puncte în linie dreaptă.*

ION FUNDĂŢEANU.

Soluţie dată de D-nii: TIBERIU POPOVICIU (Elev Cl. VII Liceul Moise Nicoară, Arad), EUGEN I. BĂLAN (Elev Cl. VIII particulară), B. M. BARBĂLATT (Elev Cl. VI Liceul Codreanu, Bârlad) şi CONST. I. GEORGESCU (Elev Cl. VIII Liceul Mihai Viteazul).

Să notăm cu C_3, A_3, B_3 intersecţiile dreptelor (A_1B_1, A_2B_2), (B_1C_1, B_2C_2), (C_1A_1, C_2A_2). Se ştie că corzile comune A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 sunt concurente, ca fiind axele radicale ale celor trei cercuri luate două câte două. De aici, urmează că triunghiurile $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ sunt omologice; deci punctele A_3, B_3, C_3 sunt în linie dreaptă. Aceasta este proprietatea cerută în enunţ.

Notă. Figura formată se bucură şi de alte proprietăţi.

Să însemnăm cu A_4, B_4, C_4 intersecţiile dreptelor (B_1C_2, C_1B_2), (C_1A_2, A_1C_2), (A_1B_2, B_1A_2).

1. Triunghiurile $A_1B_1C_2$, $A_2B_2C_1$ sunt omologice; deci punctele C_3, A_4, B_4 sunt colineare. Asemenea şi grupele de puncte B_3, A_4, C_4 şi A_3, B_4, C_4 sunt colineare. Din aceasta, urmează că:

2. Triunghiurile $A_1B_1C_1$, $A_4B_4C_4$ sunt omologice. Tot aşă şi triunghiurile $A_2B_2C_2$, $A_4B_4C_4$ sunt omologice, adică grupele de drepte A_1A_4, B_1B_4, C_1C_4 şi A_2A_4, B_2B_4, C_2C_4 sunt concurente.

3. Cele trei triunghiuri $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$, $A_4B_4C_4$ sunt omologice două câte două, având aceeaşi axă de omologie,

TIBERIU POPOVICIU.

D-nul G. MATEESCU (Elev Cl. VII Liceul Galaţi) a rezolvat problema cu ajutorul teoriei transversalelor.

EXERCIŢII.

41. Se dau două numere consecutive şi scriem înaintea celui mare răsturnatul celui mic. Se formează astfel un patrat de patru cifre. Se cer acele numere.

OVIDIU P. POPEA.

R. Se iau ultimele două cifre care pot termină un patrat şi se scrie înaintea lor, răsturnat, numărul imediat inferior celui format, ca de exemplu 4225. Se caută care numere, aşà formate, sunt patrate şi se găsesc soluţiile: $4225 = 65^2$; $0441 = 21^2$; $5776 = 76^2$.

42. Să se arate că

$$100^{203^n} - 99^{201^m} - 1$$

se divide cu 10100.

L. ROSENFELD.

R. Cum $201^m = p$ este nepereche, $(100-1)^p = \mathcal{M}.100 - 1$ şi deci expresia este $\mathcal{M}.100$. Cum $203^n = 9$ este nepereche şi $(101-1)^9 = \mathcal{M}.101 - 1$, rămâne a arătà că $(101-2)^p + 2 = \mathcal{M}.101$, sau că $2^p - 2 = \mathcal{M}.101$, adică $2^{p-1} - 1 = \mathcal{M}.101$. Dar $p - 1 = \mathcal{M}.100 = 100r$. Deci e de arătat că $(2^r)^{100} - 1 = \mathcal{M}.101$, ceeace este evident, după teorema lui FERMAT.

43. Să se verifice identitatea:

$$a^{\lg\left(\frac{b}{c}\right)} \cdot b^{\lg\left(\frac{c}{a}\right)} \cdot c^{\lg\left(\frac{a}{b}\right)} = 1.$$

M. GHERMĂNESCU.

R. Aplicând logaritmii, găsim:

$$\sum \lg a\,(\lg b - \lg c) \equiv 0.$$

44. Se consideră toate poligoanele de n laturi, în care suma perimetrului lor cu produsul laturilor e constantă; poligonul cu perimetrul minimum e acela care are toate laturile egale.

P. SERGESCU.

R. In adevăr, dacă două laturi ar fi de lungimi neegale a şi b, se poate găsi un poligon din cele considerate, care să aibă perimetrul mai mic. Insemnând cu $a, b, c, \ldots, l$ laturile poligonului, să determinăm cantitatea x astfel ca:

$$a + b + c + \ldots + l + abc \ldots l = 2x + c + \ldots + l + x^2 c \ldots l = C.$$

$$c \ldots l\,(x^2 - ab) + 2x - (a + b) = 0.$$

Această ecuaţie are o rădăcină cuprinsă între 0 şi $\frac{1}{2}(a+b)$. Poligonul de laturi $x, x, c, \ldots l$ face parte din cele considerate, iar perimetrul său e mai mic decât al celui cu laturi $a, b, c \ldots l$, căci $2x < a + b$.

Rezultă că poligonul de perimetru minimum trebue să aibă toate laturile egale; lungimea unei laturi e rădăcina *pozitivă* a ecuaţiei:

$$x^n + nx - C = 0.$$

45. Să se demonstreze identitatea:

$$\frac{p}{r} = \sqrt{\frac{r_b + r_c}{r_a - r}} + \sqrt{\frac{r_c + r_a}{r_b - r}} + \sqrt{\frac{r_a + r_b}{r_c - r}}.$$

p, r, r_a, r_b, r_c fiind elementele obişnuite ale unui triunghiu.

C. I. GEORGESCU.

R. Din relaţiile cunoscute:

$$r = 4R \sin \tfrac{1}{2}A \sin \tfrac{1}{2}B \sin \tfrac{1}{2}C; \quad p = 4R \cos \tfrac{1}{2}A \cos \tfrac{1}{2}B \cos \tfrac{1}{2}C$$

$$r_a = 4R \sin \tfrac{1}{2}A \cos \tfrac{1}{2}B \cos \tfrac{1}{2}C,$$

se deduce:

$$\sum \sqrt{\frac{r_a + r_b}{r_c - r}} = \sum \sqrt{\frac{\cos \frac{1}{2}A \sin \frac{1}{2}(B + C)}{\sin \frac{1}{2}A \cos \frac{1}{2}(B + C)}} = \sum \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}A$$

$$= \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}A \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}B \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}C = p/r.$$

PROBLEME PROPUSE.

3031. Care sunt numerele de patru cifre, aşà ca produsul cifrelor extreme să fie egal cu suma celor mijlocii, iar produsul acestora egal cu suma celor extreme. Generalizare pentru un număr de $2n$ cifre. Putem da lui n orice valoare?

W. SOLOMON.

3032. Fie (c, d) şi (a, b) două perechi de numere prime între ele. Să se demonstreze că dacă

$$c/d = (ma + nb)/(pa + qb),$$

atunci avem şi

$$a/b = (nd - qc)/(pc - md),$$

iar diferenţa $(np - mq)$ este egală cu produsul dintre c. m. m. c. d. al termenilor primei fracţii şi c. m. m. c. d. al termenilor ultimei fracţii; $m, n, p,$ şi q sunt numere întregi.

LOCOT. COL. GH. BUICLIU.

3033. Intr'o poezie, EMINESCU spune următoarele:

„Te-i răzimă, dulce copil, de al meu umăr
„Şi fir cu fir, păru-ţi aurit, am să-l număr".

Cam cât timp i-ar fi trebuit lui ca să facă această numărătoare?

I. IONESCU.

3034. Termenii unui şir sunt legaţi prin relaţia de recurenţă:

$$u_n = a u_{n-1} + b u_{n-2}, \text{ în care } u_0 = 1 \text{ şi } u_1 = a,$$

iar a şi b sunt cantităţi pozitive. Să se arate că suma:

$$S_n = \frac{u_1 + \sqrt{u_2} + \sqrt{u_3} + \cdots + \sqrt[n]{u_n}}{n}$$

păstrează o valoarea finită, când numărul n creşte nemărginit.

M. GHERMĂNESCU.

3035. Să se rezolve sistemul de ecuaţii

$$a(a+x)(a+y)(a+x+y) = b(b+x)(b+y)(b+x+y)$$

$$x(x+j)(x+\beta)(x+j+\beta) = y(y+j)(y+\beta)(y+j+\beta).$$

GH. D. POPESCU.

3036. Fie A_1, B_1, C_1 punctele care împart laturile BC, CA, AB ale unui triunghiu ABC, în acelaş sens şi în acelaş raport α; A_2, B_2, C_2 punctele care împart aceleaşi laturi în acelaş sens şi în acelaş raport β; P_a, P_b, P_c respectiv intersecţiile perechilor de drepte (C_1A_1, AA_2), (A_1B_1, BB_2), (B_1C_1, CC_2); A_3, B_3, C_3 intersecţiile dreptelor AP_b, BP_c, CP_a respectiv cu laturile BC, CA, AB. Se cere să se arate că triunghiurile ABC, $A_3B_3C_3$ au acelaş centru de greutate.

CONST. I. GEORGESCU.

3037. Să se construiască un triunghiu ABC cunoscând cen-

trele α, β, γ ale cercurilor adjuncte (CA), (AB), (BC), sau centrele α', β', γ' ale cercurilor adjuncte (BA), (CB), (AC).

N. Georgescu-Roegen.

3038. Se dă un con drept SAB, centrul cercului de bază fiind C. Să se găsiască raza unei sfere O, care trece prin S, are centrul pe SC şi detaşează din conul dat un volum egal cu $3a^3/\pi$.

D. V. Ionescu.

3039. Să se demonstreze relaţia

$$\frac{\operatorname{cotg} A + \operatorname{cotg} B}{\operatorname{tg} \frac{1}{2} A + \operatorname{tg} \frac{1}{2} B} + \frac{\operatorname{cotg} B + \operatorname{cotg} C}{\operatorname{tg} \frac{1}{2} B + \operatorname{tg} \frac{1}{2} C} + \frac{\operatorname{cotg} C + \operatorname{cotg} A}{\operatorname{tg} \frac{1}{2} C + \operatorname{tg} \frac{1}{2} A} = \frac{2R}{r} - 1,$$

A, B, C fiind unghiurile unui triunghiu oarecare, iar R şi r razele cercului circumscris şi înscris triunghiului.

Adrian A. Buşilă.

3040. Se consideră o linie plană, frântă $A_0 A_1 \ldots A_n$ şi un mobil M, care o parcurge dela A_0 la A_n. Se consideră deasemenea, sistemul de forţe având poziţia în plan şi mărimea determinate de segmentele A_0A_1, A_1A_2,..., $A_{n-1}A_n$, al căror sens este sensul de parcus al mobilului M.

Să se studieze poziţia rezultantei acestor forţe, în raport cu linia de închidere A_0A_n.

Aplicaţie în cazul când linia poligonală $A_0 A_1 \ldots A_n$ tinde către un arc de cerc cu un unghiu la centru variabil.

Cristea Mateescu.

Dela apariția ultimului număr s'au primit spre publicare: articole (A), note (N), cereri (C), exerciții (E), probleme propuse (P), recreațiuni (R) și probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela D-nii:

Abramovici A. (2979, 90); *Adam M.* (2933, 98, 3002, 04, 11, 29, N.); *Antoniu S. I.* (2458, 661, 773, 952, 71, 79, 3014, 29, E.); *Balan E.* (2411, 905, 46, 55, 65, 67, 79, 3001, 04, 11, 14, 17, 22, 26, 27, E.); *Barbălatt M. B.* (2377, 748, 59, 827, 946, 51, 3029, E, N, P, R.); *Berindei C.* (R.); *Bocancea I. K.* (2856); *Bogdan M.* (2952, 79, 90, 3014, 15, E.); *Brătescu N.* (2965, 67, 79); *Buşilă A.* (2792, 978, 90, 3011, 15, 17, 22, 26, 29); *Cazacincu V.* (2979, 90); *Constantinescu I.* (2354, 458, 773, 938); *Coşereanu I.* (3014, 15, 30); *Doncescu A.* (3027, 28, 29); *Dragomir I.* (3011, 22, 29); *Dumitrescu G. M.* (2938, 3011, 22, E.); *Epure St.* (2990, 3029); *Florescu B. I.* (2937, 92, N, P.); *Focşeneanu I. M.* (2116, 430, 58, 575, 86, 661, 773, 807, 3003, 14, 15, N, P.); *Georgescu I. C.* (2290, 99, 377, 411, 799, 929, 90, 3006, 07, 11, 15, 16, 17, 22, 26, E, P, R.); *Georgescu Gorjan St.* (2992, 3002, 11, 15, 22, 29, E.), *Ghiţescu V.* (2978, E.); *Goilav Cr.* (2990, 92, 3002, 11, 14); *Goldstein M. I.* (2990); *Herscovici* E. (3015); *Iliescu St. D.* (2856); *Iliescu Em.* (2354, 661, 773, 950, 52, 71, 79, 3021, 22, 29, E, N.); *Ionescu-Brezuica I.* (2766, 838, 56, 933, 90); *Iordache N. Ion* (3029); *Jujescu G.* (E, N, P.); *Katz P.* (2990, 3007, 12, 30, E.); *Katz S.* (E.); *D-ra Lăzărescu Elena* (2965, 3002, 22); *Lăzărescu Th. I.* (2933, 79, 90, 98); *Lăzărescu S.* (2979, 3004, E.); *Măcrineanu S.* (3011, 15, 22); *Manoilescu C.* (3002); *Marcus F.* (3002, 11, 15, R.); *Măru D.* (2992); *Mateescu G.* (2974, 3015); *Miclescu A.* (E.); *Mihăiescu C.* (3015, E.); *Moisil Gr.* (2773, 946, 92, 3015, 26, A, E, N, P.); *Oprişanu E.* (2971, 3014, 15); *Orănescu O.* (N, P, R.); *Popa T.* (3002, E.); *Popea G. O.* (3011, P.); *Popoviciu T.* (2397, 431, 872, 969, 89, 98, 99. E.); *Rabinovici S. F.* (2990); *Rădulescu M.* (2933, 78); *Röder C.* (2990); *Rosenberg Leon* (2640); *Rosenfeld L.* (2856, 978); *Rothenberg M.* (2990, 3002, 11); *Sane M.* (E.); *Sarian M.* (P.); *Şcodrano A.* (2989, 3026); *Septilici R.* (2990); *Şerbănescu M. I.* (2989, 91, 94); *Solacolu Ş.* (2990); *Solomon D.* (3022); *Solomon N.* (2979, 3002); *Solomon W.* (2979, 82, 90, E.); *Stavrat G.* (3015); *Tailer N.* (3011); *Tauber Al.* (2887, 998, 3022, 29); *Teodorescu M. D.* (3027); *Teodorescu St. I.* (2989, 90, 92, 3004); *Vlad O.* (3022); *Weinstein J.* (2683); *Weiss L.* (3002, 15, 17, 22, E, R.); *Weiss S.* (2990, 3017); *Zuckerman B. M.* (2990);

Problemele de geometrie rezolvate cât şi cele de propus a căror soluţie nu va fi însoţită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în consideraţiune.

Soluţiunile primite în ultimul timp la problemele: 2035, 63, 91, 108, 17, 87, 91, 289, 95, 337, 43, 46, 59, 83, 98, 411, 61, 71, 552, 94, 682, 705, 861, 74, 79, 95, 905, 06, 10, 20, 29, 31, 32, 55, 70, 72, 80, 88, 91, 93, 3007 şi 19 nu au fost încă examinate de redactorii cărora le-au fost repartizate.

Colecţiunea „GAZETEI MATEMATICE“
27 VOLUME

Colecţiunea întreagă . . . . . Lei 1000,—

Se vând şi volume izolate, cu preţul de 50 lei, afară de volumele: I, X, XV, XIX, XX şi XXI care se vând numai cu colecţiunea întreagă.

Biblioteca „GAZETEI MATEMATICE“

1. **I. Ionescu, G. Ţiţeica, A. G. Ioachimescu şi V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Aritmetică, Geometrie, Algebră şi Trigonometrie. (520 pag. cu 3381 probleme).* (Epuizată).

2. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de probleme de algebră* (teoria ecuaţilor), (82 pag. cu 462 probleme). (Epuizată).

3. **N. Abramescu,** *Curs de algebră superioară* pentru cl. VIII reală, *Ediţia III revăzută şi adăogită,* 1921 . . . Lei 30,—

4. **A. G. Ioachimescu şi G. Ţiţeica,** *Culegere de probleme de mecanică şi geometrie analitică* (222 pag. cu 825 probleme şi o planşă) (Epuizată) . . . . . Lei 20,—

5. **Tr. Lalescu şi Şt. N. Mirea,** *Culegere de probleme de geometrie descriptivă şi cosmografie* . . . . . Lei 15,—

6. **Tr. Lalescu,** Tratat de Geometrie analitică,
Fascicola I (Epuizată) . . . . . Lei 10,—
Idem, Fascicola II Conice . . . . . Lei 20,—
Idem, Fascicola III Cuadrice . . . . . Lei 20,—

7. **Gh. Lazăr,** *Trigonometria drept liniară* (după cursul predat de Gh. Lazăr la colegiul Sf. Sava) . . . . . Lei 5,—

8. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de probleme de Algebră,* ediţia II-a revăzută şi adăogită, 400 pagini cuprinzând 1765 probleme . . . . . Lei 60,—

La aceste preţuri se vor adăogà taxele poştale pentru expediţie.

Biblioteca Technică a „GAZETEI MATEMATICE“
(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

I. Ionescu, *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcţiune şi a principiilor de calcul.* Volum legat, cuprinzând 128 de pagini şi 15 tabele numerice practice, pentru proiectarea construcţiunilor de beton armat. Lei 12,—

Gazeta Matematică apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 50 lei anual, se plăteşte înainte şi începe la 15 Septemvrie, ori când s'ar face achitarea lui în cursul anului şi nu se face pe termene mai scurte de un an. Abonamentele, schimbările de adrese, reclamaţiunile şi cererile pentru cărţi din biblioteca «Gazetei Matematice», se vor trimete D-lui: **I. D. Teodor,** Inginer Inspector General, Directorul General al Regiei Monopolurilor Statului (adresa: Fabrica de Chibrituri, Bucureşti).

Shimburile de reviste, uvrage pentru recenzii şi orice alte cereri, afară de cele privitoare la cassierie şi expediţie, se vor trimite D-lui Inginer Inspector General I. IONESCU, Str. Căluşei 23, Bucureşti.

Onor Asociatia pentru Cultură și literatura poporului Român din Sibiu

GAZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

ANUL XXVIII.

NUMĂRUL 8. — APRILIE 1923

SUMARUL

1. Asupra unei transformări geometrice. *Mihail Ghermănescu.*
2. Note Matematice: 49 — 59.
3. Bibliografie.
4. Cereri: 100.
5. Probleme rezolvate: 1040, 2411, 2700, 2722, 2734, 2807, 2874, 2930, 2933, 2939, 2951, 2979 și 2982.
6. Exerciții: 46 — 54.
7. Probleme propuse: 3041 — 3050.

ABONAMENTUL 50 LEI PE AN.

BUCUREȘTI
IMPRIMERIA FABRICILOR DE CHIBRITURI ȘI TIMBRE - FILARET
1923

SPRE ŞTIINŢA

Gazeta Matematică se publică de către **Societatea „Gazeta Matematică“** având sediul în Bucureşti, compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie de 3 membri, care pentru anul XXVIII se compune din D-nii **N. I. Georgescu,** Inginer-Şef, Director General al Serviciului Imbunătăţirilor Funciare, **Tr. Lalescu,** Doctor în Matematici, Profesor Universitar şi **I. D. Teodor,** Cassier, Inginer Inspector General, Profesor la Şcoala Politechnică, Directorul General al Regiei Monopolurilor Statului.

Manuscrisele destinate „Gazetei Matematice“ se vor trimite D-lui GEORGE BORNEANU, Inginer, sub-directorul Fabricilor de chibrituri şi timbre, Bucureşti.

Se pot trimite şi pe acelaş nume în Str. Sf. Constantin 31, Bucureşti.

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse şi exerciţiile se vor redijă în conformitate cu instrucţiunile se se pot procură dela D-l Cassier *I. D. Teodor,* în schimbul sumei de 1 (un) leu ce se poate trimite prin poştă.

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evită confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare : numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie.

In vederea sporirii taxelor poştale, corespondenţii pot trimete de aci înainte manuscrisele scrise pe ambele pagini ale unei foi, fără a lăsă spaţii albe pe margini sau dedesubt, tăind foile în consecinţă.

Nu se admite însă a se tratà pe aceeaşi foaie mai multe chestiuni sau probleme.

Articolele, notele, problemele propuse, exerciţiile, recreaţiile ce se trimit pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICĂ“, trebue să fie originale, iar nu luate din cărţi sau reviste speciale de matematici.

Probleme nerezolvate : 171, 485, 581, 691, 886, 87, 914, 44, 1000, 08, 56, 58, 83, 92, 146, 62, 78, 80, 214, 36, 70, 71, 87, 97, 99, 355, 64, 67, 77, 79, 84, 86, 98, 99, 412, 50, 82, 90, 553, 84, 87, 626, 37, 50, 76, 79, 80, 711, 29, 33, 35, 53, 64, 90, 835, 76, 82, 84, 905, 06, 14, 29, 44, 45, 49, 59, 73, 79, 87, 2003, 04, 16, 17, 32, 70, 74, 94, 111, 12, 26, 56, 70, 216, 300, 47, 53, 91, 92, 95, 408, 14, 20, 22, 28, 34, 39, 40, 43, 44, 48, 53, 56, 59, 61, 62, 66, 69, 71, 73, 77, 79, 81, 84, 87, 91, 97, 500, 01, 02, 03, 10, 11, 12, 24, 29, 32, 37, 39, 43, 44, 45, 46, 55, 56, 60, 69, 71, 77, 78, 80, 82, 87, 91, 93, 96, 97, 99, 602, 07, 08, 10, 13, 23, 35, 38, 41, 43, 44, 45, 47, 50, 55, 56, 58, 60, 65, 69, 71, 75, 84, 86, 92, 93, 94, 95, 96, 709, 12, 13, 17, 27, 35, 38, 43, 45, 47, 52, 58, 64, 69, 78, 80, 89, 96, 809, 14, 16, 29, 41, 51, 53, 57, 60, 65, 86, 88, 89, 98, 902, 09, 12, 15, 16, 26, 32, 36, 45, 53, 56, 59, 61, 83, 95, 3000, 05, 08, 10, 13, 19, 20, 23, 25, 32, 33, 35, 38, 40.

La redacţia revistei **„Gazeta Matematică“** *se primesc abonamente pentru* **„Revista de matematicas y fisicas elementales“** *din Buenos-Aires, Anul V (Mai 1923 — Aprilie 1924). Costul unui abonament anual este de 70 lei.*

GAZETA MATEMATICA

ANUL XXVIII *SUPLIMENT* No. 8.

RECREAŢIUNI

1. **Expresiuni numerice populare:**

Una şi cu *una* face *două*. Din *două*, *una*.
Nici *una*, nici *două*. *Un* om şi *jumătate*.
Decât *doi* „ţi-oi da", mai bine *un*„na". La câte *două* şi dă câte *nouă*.
Cinci câştig, *zece* mănânc, în pungă ce pui? Îi dă *zece* înainte.
Celui cu economie, *suta* e o *mie*. *Miile* mărită momâile; *sutele* [slutele.

I. I.

* * *

2. **Numărul 13.**

Gazeta Matematică s'a ferit de numărul 13, căci apare numai pânăla numărul 12 în fiecare an; totuşi nu a scăpat totdeauna de el. Astfel primul număr din primul an a avut 13 probleme propuse. In 1913 a coincidat anul, cu un număr al unei probleme propuse. In anii V şi VI revista a stat cu 13 redactori. In 1913 corespondenţa ei se trimeteà în str. Sf. Ionică No. 13, etc.

GHEORGHE TULEA.

Am de adăogat că numele autorului acestei recreaţiuni mistice, se compune din 13 litere

I. I.

* * *

3. **Raport direct şi invers.**

Citim într'o carte franceză de istorie:

„Les déliquants étaient conduits à la police ou le colonel leur faisaient administrer un nombre des coups de bâton, proportionné a son hummeur du moment et en rapport inverse avec la condition sociale du coupable".

I. I.

* * *

4. **Probleme fără date.**

In Suplimentul din Anul XX No. 11 am propus următoarele trei chestiuni:

a) La rezolvarea unei probleme am' întrebuinţat o metodă, care nu s'a mai pomenit; zile întregi m'am muncit cu dânsa. Imi veţi spune câte zile anume?

b) Trei fraţi posedă o vie. Din porţiunea care a revenit celui mai mic s'a făcut un vin de o calitate superioară. Ce posedă din acea vie?

c) La finele anului, tatăl unui şcolar silitor îi dărueşte o carte nouă. Din cele vechi dă la un elev sărman care rămăsese repetent. Cu cât s'a modificat numărul cărţilor ce posedă acel elev?

Numai dela D-l E. Grigorescu s'au primit răspunsurile următoare:

a) La rezolvarea acelei probleme autorul ei s'a muncit un număr ne mai pomenit de zile.

b) Ceeace a rămas din vie, este vinul.

c) Numărul cărţilor elevului a scăzut cu atâtea, câte a dat elevului repetent mai puţin una.

Soluţiile autorului sunt următoarele:

a) Inlocuim *„care nu s'a mai pomenit"* prin egalul său *„nouă"* şi pauza cerută de punctul şi virgulă, o facem înaintea acestul cuvânt. Rezultatul ese 9.

b) Inlocuim *„vin de o calitate superioară"* prin *„nectar"*, pronunţăm din nou enunţul şi găsim că via are o arie de 1 ha.

c) Pauza cerută de punctul de după *nouă* o punem înainte. Găsim $+1-9=--8$.

I. I.

* * *

5. Lipsă de practică!

Problema jucătorilor rezolvată în *Gazeta Matematică*, anul XX, nu este completă, nici rezolvarea bună, căci autorul nu a ţinut seama de taxele ce le iau cluburile şi de bacşişurile care se dau servitorilor.

C. Ionescu.

* * *

6. Disociare logaritmică.

La lecţia de algebră se dă unui elev să rezolve ecuaţia:

$$\log x = 5.$$

Elevul cu o repeziciune uimitoare strigă: *„Avem"*:

$$x = \frac{5}{\log}$$

S. Gorovei

* * *

7. Logaritmii în literatură.

In *„Notre Dame de Paris"* scriitorul Victor Hugo spune:

„Statues, vitraux, arabesques, dentelures, chapiteaux, bas-reliefs, elle combine toutes ces imaginations selon le logarithme qui lui convient".

St. Ghiolu.

* * *

Numai că acea biserică s'a făcut în secolul XI, pe când logaritmii au fost descoperiţi de Neper în 1614, astfel că architecţii ei nu se puteau servi de un instrument, care a apărut numai după şase secole

I. I.

* * *

8. Concurenţă!

Un comerciant aude pe fiul său discutând cu un camarad al lui asupra unei probleme de *drepte concurente*. Chiamă pe fiul său la o parte, îi dă o sumă oarecare şi îi spune „dă-i banii ăştia, să nu-ţi mai facă concurenţă" Autentic. S. Felix.

* * *

9. Erori de tipar.

In programul de admitere la o şcoală, publicat în *Monitorul oficial*, găsim printre materiile ce se cer la *Geometria Analitică*:

„*Cerc*: educaţia lui redusă."

„*Conice*: eclipsa."

Dacă cercul are educaţia redusă, ce trebue să fie la elipsă, care are *cercuri directoare*, ce trebue să fie de iperbolă şi parabolă, care umblă haimanale pe la infinit! In tot cazul culegătorul cunoaşte astronomia, căci eclipsa este efectul unui con de umbră!

I. Aprihăneanu.

* * *

10. O sfântă geometră.

E vorba de St. Ecaterina care se serbează la 25 Noemvrie. Ea a propagat creştinismul la Alexandria, unde a profesat geometria celebrul Euclide. St. Ecaterina avea o cultură cum rar se vedea prin secolul IV d. Cr. în care ea a trăit, după cum ne afirmă învăţatul Joseph Assemani. Împăratul Maximin a trimis mai mulţi filozofi păgâni ca să discute cu dânsa şi să o reîntoarcă dela creştinism, dar aceştia nu au fost în stare să o facă să-şi părăsească ideile. Din această cauză Maximin ordonă în 311 ca să fie ucisă, împreună cu filozofii care nu au fost în stare să o convertească. Călăul întrebând pe St. Ecaterina cu ce se ocupă, i-a răspuns: M'am ocupat cu retorica, filosofia, *geometria* şi alte ştiinţe. Prin secolul VIII corpul ei a fost dus la mânăstirea Sinai, de unde o parte dintr'ânsul s'a dus în secolul XI la Rouen.

I. I.

* * *

11. Gen şi funcţie.

Focarii conduc maşinele, iar focarele conicele.

Gh. Zapan.

* * *

12. Matematica.

Prin *unghiuri suplimentare*
Se plimbă 'ncet al meu toc,
In *mediane*'s rătăcit,
De *bisectoare* n'am loc.

In ochi *asimtote*-mi răsar
Ce conduc către *infinit*,
Muncesc, dar vai în zadar,
Căci sunt *punct răsleţit*.

Hai la *trigonometrie*
Sin pe *cos* şi *cos* pe *sin*,
Par c'ar fi o jucărie
Dar atât şi vai *amin*!

Am urmat puţin *algebra*,
Radicalu-i o comoară,
Dar apoi m-a transformat
In *câtime imaginară*.

Printre *cercuri* încurcat,
Pe-o *tangentă* am scăpat.

C. Ionescu.

* * *

13. **Matematica în dicţionare.**

In micul dicţionar *Larousse* găsim:

Opération. Calcul qu 'il faut faire pour obtenir un résultat.

Calcul. Opération par laquelle on trouve le résultat de la combinaison des nombres et des quantités.

Deci: Operaţia este calcul şi calculul operaţie!

I. I.

* * *

14. **Adoratorii matematicilor.**

Intr'o scrisoare a sa, BESSEL spune:

„Matematica este cea mai plăcută ştiinţă, ea, impreună cu astronomia sunt pentru mine Societăţile de dans, concertele şi toate celelalte distracţiuni, pe care le cunosc numai după nume".

I. I.

* * *

15. **Un poet glorificând un matematician.**

Iată ce spune VOLTAIRE despre *Newton*:

Confidents du Trés Haut, substances éternelles,
Qui brûlent de ses feux qui couvrez de vos ailes,
Le trône dn votre Maitre est assis parmi vous,
Parlez: du grand *Newton* n'étiez-vouz point jaloux?

I. I.

* * *

16. **Doctori. Doctoranzi.**

Intr'o revistă română de matematici, văd scriindu-se despre *doctoranzi* in matematici, articole semnate X. Y. *Doctorand*, etc. Care să fie nevoia acestui nou titlu? Care sunt condiţiunile de admisibilitate pentru dânsul? Nu văd decât nerăbdarea, căci prin răbdare şi muncă se va ajunge la titlul de *Doctor*, mai scurt, dar mai mare, mai pozitiv. Goana după acest titlu are să ne conducă la decadenţa lui, cum s'a intâmplat în secolul XIV, când titlul devenise prea comun şi trebuia întărit cu diferite calificative. Iată aci exemple de pe acele vremuri, scoase din istoria matematicilor de M. CANTOR:

BRADVARDINUS.	Doctor	profundus	LULLUS.	Doctor	illuminatus
BAWN.	„	mirabilis	GANDAVENSIS.	„	solemnis
SCOTUS.	„	subtilis	BACONTHORP.	„	resolutus
ALQUIN.	„	angelicus	OCCAM	„	invincibilis
„	„	universalis	„	„	singularis

I. I.

ASUPRA UNEI TRANSFORMARI GEOMETRICE.

In „Gazeta Matematică“ No. 2 a anului curent, am găsit locul potențialelor unui punct în raport cu un triunghiu, rezervându-mi dreptul de a revenì asupra acelei chestiuni cu ocazia unui studiu, pe care voiu încercà să-l schițez în cele ce urmează.

O parte din rezultatele esențiale de mai jos, le-am expus acum doi ani, într'o comunicare făcută „Soc. studenților în Matematici“, devenită azi „Asociația de Matematici pure și aplicate“.

In cele de mai jos, reiau acel subiect, precizând unele puncte asupra valabilității cărora, aveam numai intuiția pe atunci și studiindu-l mai pe larg într'un singur caz particular, rămânând ca acei pe cari i-ar interesà chestiunea să o completeze, acolo unde e locul și să o continue, atât timp cât va prezentà interes.

* * *

Dacă iau ca triunghiu de referință un triunghiu ABC, cu laturile a, b, c și consider în planul triunghiului un punct M, de coordonate baricentrice α, β, γ, voiu definì punctul N, de coordonate baricentrice α_1, β_1, γ_1, ca fiind „transformatul logaritmic“ al punctului M, în raport cu triunghiul ABC, atunci când între coordonatele baricentrice respective, vor existà relațiunile:

(1) $$\alpha/\lg \alpha_1 = \beta/\lg \beta_1 = \gamma/\lg \gamma_1.$$

Dacă asupra punctului N aplicăm aceiași transformare, vom zice că punctul P, astfel obținut, este „transformatul logaritmic de al doilea ordin“ al punctului M, etc.

Se vede cu înlesnire că, *„transformările logaritmice formează un grup“*. *„Transformarea logaritmică nu este biunivocă“*; în adevăr, un punct $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ nu este transformatul logaritmic al unui singur punct (α, β, γ) și reciproc; pentru a invederà acest lucru, este destul a considerà mai multe puncte potențiale ale unui punct M (α, β, γ); ele sunt toate transformate logaritmice ale punctului M, căci din:

$$\alpha/\lg \alpha^m = \beta/\lg \beta^m = \gamma/\lg \gamma^m,$$

se deduce:

$$\alpha/\lg \alpha = \beta/\lg \beta = \gamma/\lg \gamma.$$

Pentru a evità însă confusiuni, vom considerà, în evidențiarea

biunivocității, punctele distincte, adică acele care nu se pot deduce unul din altul, prin una din corespondențele cunoscute în Geometria triunghiului.

Dacă un punct M (α, β, γ) descrie o curbă:

$$f(\alpha, \beta, \gamma) = 0, \tag{2}$$

transformatul său logaritmic verifică relațiunea:

$$f(\lg \alpha_1, \lg \beta_1, \lg \gamma_1) \equiv F(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) = 0,$$

care însă *nu reprezintă totdeauna o curbă*, în coordonate baricentrice, căci expresiunea $F(\alpha_1 \beta_1 \gamma_1)$ nu este totdeauna omogenă, în raport cu $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$. In adevăr, f având o expresiune algebrică în raport cu α, β, γ, este de forma:

$$f(\alpha, \beta, \gamma) = \Sigma A_{ijk} \alpha^i \beta^j \gamma^k = 0, \tag{2'}$$

în care i, j, k iau toate valorile positive, satisfăcând relațiunei:

$$i + j + k = m,$$

m fiind gradul de omogeneitate. Vom deduce:

$$f(\lg \alpha_1, \lg \beta_1, \lg \gamma_1) = \Sigma A_{ijk} (\lg \alpha_1)^i \lg (\beta_1)^j \lg (\gamma_1)^k = 0.$$

Pentruca această expresiune să fie omogenă în raport cu $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$, trebue ca înlocuindu-le prin valori proporționale, să căpătăm aceiași expresie, afară de un factor constant, care se suprimă când egalăm expresia cu zero.

Făcând înlocuirea α_1 cu $\lambda \alpha_1$, etc. vom găsi:

$$f(\lg \lambda\alpha_1, \lg \lambda\beta_1, \lg \lambda\gamma_1) = \Sigma A_{ijk} (\lg \lambda)^{i+j+k=m} + A_{ijk} (\lg \alpha_1)^i \lg (\beta_1)^j \lg (\gamma_1)^k = 0$$

și cum $(\lg \lambda^m)$ ese de sub Σ, condiția de omogeneitate este:

$$\Sigma A_{ijk} = 0. \tag{3}$$

Dar această relațiune exprimă condiția ca curba (2) să treacă prin centrul de gravitate G (1, 1, 1), al triunghiului ABC. Rezultă de aci următoarea proprietate fundamentală:

Teorema I. *Curbele care trec prin centrul de gravitate al triunghiului de referință, sunt singurele care se pot transformă logaritmic.*

In enunțul teoremei de mai sus, am omis particularitatea de a fi curbele algebrice, întrucât în cazul când sunt transcendente, expresia, sub formă polinomială, pe care am dat-o ecuației lor,

devine o serie, asupra căreia se pot trage în această ordine de idei, aceleaşi concluziuni.

Acest rezultat erà într'un fel, evident, dacă ţineam seamă de faptul că transformatul logaritmic al centrului de gravitate este el însuşi; nimic nu probà însă, că numai sunt şi alte curbe, care să nu conţină acest punct şi care totuşi să admită o transformată logaritmică.

Un corolar imediat al teoremei de mai sus, este următorul:

O curbă are cu transformata sa logaritmică, un punct comun în centrul de gravitate al triunghiului de referinţă.

Modul cum acest punct se impune dela început în acest studiu, mă îndreptăţeşte să întrevăd un rol mai important pe care l'ar aveà.

Să consider pentru aceasta, tangentele în acest punct la o curbă (2) şi la transformata sa logaritmică. Parametrii directori respectivi, sunt:

$$f'_\alpha(1, 1, 1); f'_\beta(1, 1, 1); f'_\gamma(1, 1, 1)$$

$$\frac{1}{e}f'_{\lg\alpha_1}(1, 1, 1) ; \frac{1}{e}f'_{\lg\beta_1}(1, 1, 1) ; \frac{1}{e}f'_{\lg\gamma_1}(1, 1, 1).$$

Pentru a doua serie de coeficienţi am luat pentru G coordonatele *(e, e, e)*. O simplă comparaţie, arată că sunt proporţionali şi atunci rezultă o a doua proprietate fundamentală, care ne dă o clară idee asupra naturii geometrice a transformărilor logaritmice.

Teorema II. *O curbă se transformă logaritmic într'o altă curbă, tangentă primei în centrul de gravitate al triunghiului de referinţă.*

Acestea sunt cele două proprietăţi fundamentale ale grupului de transformări logaritmice, pe care le-am enunţat, fără demonstraţie pentru cazul general, în comunicarea amintită mai sus.

Nu rămâne acum, decât să trec la studiul detailat al diferitelor curbe, căutând a pune în evidenţă proprietăţile esenţiale, locale.

Voiu abordà astfel cazul cel mai simplu, acela al dreptei.

Ecuaţia baricentrică a unei drepte, trecând prin punctul G (1, 1, 1), este: (4) $m\alpha + n\beta + p\gamma = 0,$

în care: (5) $m + n + p = 0.$

Transformata sa logaritmică are ecuaţia:

$$m \lg\alpha_1 + n \lg\beta_1 + p \lg\gamma_1 = 0,$$

sau:

$$\lg(\alpha^m) + \lg(\beta^n) + \lg(\gamma^p) = 0,$$

sau:

$$(\Gamma) \qquad \alpha^m \beta^n \gamma^p = 1,$$

cu condiția (5).

Această curbă trece prin punctul G, în care punct are ca tangentă chiar dreapta (4).

Curba (Γ) *mai trece și prin două din vârfurile triunghiului, care sunt puncte multiple;* în adevăr, în virtutea relațiunei (5) două din cantitățile *m, n, p* sunt pozitive și una negativă și reciproc; fie $p < 0$. Ecuația (Γ) se mai poate scrie:

$$\alpha^m \beta^n = \gamma^{p'}, \quad (p' = -p > 0)$$

și pe această formă se vede ușor că curba (Γ) conține punctele A (1, 0, 0) și B (0, 1, 0). In aceste puncte, laturile triunghiului sunt tangente curbei.

Curba (Γ) *se reproduce prin puncte reciproce.* In adevăr, transformarea $\alpha\alpha' = k$ lasă invariabilă ecuația sa.

Dacă printre curbele (Γ) voim să găsim una care să se reproducă și printr'o inversiune: $\alpha\alpha' = a^2$, $\beta\beta' = b^2$, $\gamma\gamma' = c^2$, vom găsi condiția:

$$(6) \qquad m \lg a + n \lg b + p \lg c = 0,$$

care împreună cu (5) ne dau valorile lui *m, n, p*:

$$(7) \qquad \frac{m}{\lg\left(\frac{b}{c}\right)} = \frac{n}{\lg\left(\frac{c}{a}\right)} = \frac{p}{\lg\left(\frac{a}{b}\right)}.$$

Curba (Γ) este în acest caz:

$$\alpha^{\lg\left(\frac{b}{c}\right)} \beta^{\lg\left(\frac{c}{a}\right)} \gamma^{\lg\left(\frac{a}{b}\right)} = 1,$$

curbă pe care am menționat-o în articolul citat la începutul acestui studiu și care este *locul potențialelor obicinuite ale unui triunghiu.*

Dar, deosebit de această particularizare, putem merge mai departe în cazul general.

Fiind date cantitățile *m, n, p* și relația (5), se pot determină trei cantități *x, y, z,* astfel ca:

$$(8) \qquad \frac{m}{\lg\left(\frac{y}{z}\right)} = \frac{n}{\lg\left(\frac{z}{x}\right)} = \frac{p}{\lg\left(\frac{x}{y}\right)}$$

şi atunci ecuaţia (Γ) se mai poate scrie:

$$(\Gamma) \qquad \alpha^{\lg\left(\frac{y}{z}\right)} \beta^{\lg\left(\frac{z}{x}\right)} \gamma^{\lg\left(\frac{x}{y}\right)} = 1,$$

care este prima ecuaţie stabilită în articolul de mai sus şi care reprezintă *locul potenţialelor unui punct* M (x, y, z), *în raport cu triunghiul de referinţă* ABC. Rezultă atunci că:

Transformata logaritmică a unei drepte, este locul potenţialelor unui punct invariabil legat de dreaptă, în raport cu triunghiul de referinţă.

Asupra legăturei intime între punctul M (x, y, z) şi dreapta (4) se poate spune că: *punctul* M (x, y, z) *este transformatul logaritmic al unui punct de pe dreapta (4).*

In adevăr după (8), ecuaţia dreptei (4) se poate scrie:

$$\lg\left(\frac{y}{z}\right)\alpha + \lg\left(\frac{z}{x}\right)\beta + \lg\left(\frac{x}{y}\right)\gamma = 0.$$

Dacă înlocuim α, β, γ respectiv cu x_1, y_1, z_1 ale căror expresii sunt tocmai $\lg x$, $\lg y$, $\lg z$, obţinem:

$$\Sigma \lg\left(\frac{y}{z}\right) \lg x = 0,$$

care este o identitate. Această proprietate simplă rezultă de altfel chiar din definiţii.

Mă opresc acì cu acest studiu, lăsându-l în grija tinerilor corespondenţi, atraşi de frumuseţea studiului geometriei triunghiului, în coordonate baricentrice.

MIHAIL GHERMĂNESCU.

NOTE MATEMATICE.

49. *Alte zece algebre diverse.* (A se vedeà nota 5, pag. 49).

11. **Aplicată.** *J. Derousseau.* — Algèbre pure et appliquée. Liège 1887.

12. **Colegiilor.** *Fine.* — College algebra. London.

13. **Germană.** *I. H. Rahn.* — Deutsche Algebra. Zürich 1659.

14. **Indiană.** *E. Struckey.* — Bija-Ganita, or the algebra of the Hindous. 1813.

15. **Logicei.** *L. Conturat.* — L'algèbre de la logique. Paris 1914.

16. **Numerică.** *Algèbre nombreuse.* — A se vedeà *Cours de mathèmatique* al lui *Hérigone.* 1635.

17. **Originală.** *J. B. Shaw.* — Original algebra. (A se vedeà Bulletin of the American mathematical Society. Vol. XXI, pag. 297).

18. **Parastrofică.** *J. B. Shaw.* — On parastrophic algebra. (A se vedeà Bulletin of the American mathematical Society, pag. 287).

19. **Pură.** (A se vedeà No. 21).

20. **Teoretică.** *Eysséric & Pascal.* — Elements d'algèbre théorique et pratique. Paris.

(Va urmà). I. Ionescu.

50. *O generalizare.* In *Gazeta Matematică* Anul XXVI pag. 245, în exercițiul No. 41 se cereà să se arată că:

$$2^{2n} - 3n - 1 \equiv \mathscr{M}9.$$

Putem generalizà astfel această chestiune. Dacă m și n sunt întregi pozitivi, atunci

$$m^n - (m-1)n - 1 \equiv \mathscr{M}(m-1)^2.$$

Punând $m - 1 = p$, avem:

$$(p+1)^n - pn - 1 = p^n + np^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2}p^{n-2} + \ldots$$

$$\ldots + np + 1 - np - 1 \equiv \mathscr{M}p^2,$$

ceeace erea de arătat.

C. I. Georgescu.

51. *Asupra problemei* 2927 (pag. 34 și u.). Vreau să arăt că între lungimile $A\alpha$, $A\alpha'$, $B\beta$, $B\beta'$, $C\gamma$, $C\gamma'$ (vezi figura dela pag. 35) avem relațiunile:

$$A\alpha = B\beta', \quad B\beta = C\gamma', \quad C\gamma = A\alpha'.$$

In adevăr, triunghiurile αBC şi $\beta'CB$ sunt fiecare invers asemenea cu triunghiul CAB şi deci laturile $C\alpha$ şi $C\beta'$ sunt paralele cu AB (Rouché et de Comberousse, *Géométrie plane*, VIII-e éd., Scolie 44. 2⁰ pag. 479). Laturile $C\alpha$ şi $C\beta'$ fiind paralele cu AB şi având punctul C comun, sunt în prelungire. Urmează că patrulaterul $\alpha BA\beta'$ este un trapez, de oarece el are două laturi paralele. Observ însă că unghiurile $B\alpha C$ şi $A\beta'C$ sunt fiecare egale cu unghiul C al triunghiului ABC; trapezul $\alpha BA\beta'$ este deci isoscel şi prin urmare diagonalele sale $A\alpha$ şi $B\beta'$ sunt egale.

In mod analog demonstrăm că şi patrulaterele $\beta CB\gamma'$ şi $\gamma AC\alpha'$ sunt trapeze isoscele şi deci avem*): $B\beta = C\gamma'$ şi $C\gamma = A\alpha'$.

Teodor I. Popa.
Elev Cl. VII Liceul Cantemir-Vodă
Bucureşti.

52. *Asupra problemei 2389 (G. M. vol. XXI p. 434).*

In această problemă se cereà o demonstraţie geometrică a proprietăţii: *Dacă* $AH/BC = BH/AC = CH/AB$, *atunci* ABC *e echilateral,* H *fiind ortocentrul său.* Iată o soluţie simplă.

Fie O centrul cercului înscris şi O_a, O_b, O_c proecţiile lui O pe laturile lui ABC. Avem: $AH = 2OO_a$, $BH = 2OO_b$, $CH = 2OO_c$; deci relaţia dată devine:

$$OO_a / BC = OO_b / CA = OO_c / AB,$$

adică distanţele lui O la laturi sunt proporţionale cu aceste laturi, proprietate de care se bucură numai punctul K al lui Lemoine, deci K se confundă cu O şi atunci evident ABC este echilateral. Dacă A', B', C' sunt picioarele înălţimilor, iar H', H'', H''' ortocentrele triunghiurilor AB'C', BC'A', CA'B', avem $AH'/B'C' = AH/BC$ etc., deci condiţia dată ar fi putut fi înlocuită cu:

$$AH'/B'C' = BH'' / C'A' = CH'''/A'B',$$

iar demonstraţia geometrică era aceiaşi.

B. M. Barbălatt.
Liceul Codreanu, Bârlad.

*) A se compară cu figura şi observaţia dela problema 2847 (*Gazeta Matematică*, Vol. XXVII, pag. 178 şi 179), în care dreptele BN şi CM sunt dreptele $B\beta$ şi $C\gamma'$ din figura problemei 2927.

V. C.

53. *Generalizarea problemei 2704. a)* Fie M, S şi I picioarele medianei, simedianei şi bisectoarei interioare, scoborâte respectiv din vârfurile A, C, B ale unui triunghiu ABC. Pentru ca aceste trei drepte să fie concurente, trebue să avem, după teorema lui CEVA:

$$\frac{AI}{IB}\times\frac{BM}{MC}\times\frac{CS}{SA}=1, \tag{1}$$

dar avem:

$MB=MC$, $AI=cb/(a+b)$, $BI=ca/(a+b)$ şi $CS/SA=a^2/c^2$;

înlocuind aceste valori în (1), vom avea:

$$ab=c^2.$$

Deci mediana, bisectoarea interioară şi simediana, scoborâte din A, B, C, sunt concurente în triunghiul, în care o latură e medie proporţională între celelalte două laturi.

b) Iată o altă soluţie dată cu ajutorul coordonatelor baricentrice. Ecuaţiile celor trei drepte sunt:

$$\beta=\gamma, \quad b\alpha=a\beta, \quad c^2\alpha=a^2\gamma.$$

Pentru ca aceste drepte să fie concurente, trebue să avem:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ b & -a & 0 \\ c^2 & 0 & -a^2 \end{vmatrix}=0,$$

de unde:

$$ab=c^2.$$

ION RIZESCU.
(Elev Liceul Constanţa).

54. *Asupra Problemei* 2760 (*G. M.* pag. 224). Relaţiunea (2) ce se cereà a se stabili, admite o demonstraţie mai elegantă de cât cea dată, care o şi generalizează în acelaş timp [1])

In adevăr, D-nul Inginer V. CRISTESCU a demonstrat că dacă proiectăm vârfurile A, B, C ale unui triunghiu în A_2, B_2, C_2 pe o dreaptă Δ ce trece prin centrul O al cercului circumscris, avem relaţiunea [2]):

$$\overline{CC_2}\sin 2C=\overline{AA_2}\sin 2A+\overline{BB_2}\sin 2B.$$

---

[1]) Aceiaşi demonstraţie a fost indicată şi de D-nul B. M. BARBĂLATT cu ocazia soluţiei Problemei 2760 ce ne-a trimes. (N. R.)

[2]) V. CRISTESCU, *Relaţiuni metrice în triunghiu, Gazeta Matematică*, Vol. XXVI, p. 28, relaţia (8).

Dacă dreapta Δ trece şi prin centrul I al cercului înscris, atunci $\overline{AA_2}$, $\overline{BB_2}$, $\overline{CC_2}$ sunt distanţele vârfurilor A, B, C la dreapta OI şi după o teoremă citată la soluţia problemei 2760, avem[1]):

$$\overline{AA_2} = \overline{\varphi A'}\ ,\quad \overline{BB_2} = \overline{\varphi B'}\ ,\quad \overline{CC_2} = \overline{\varphi C'}\ ,$$

aşa că relaţiunea precedentă devine:

$$\overline{\varphi C'}\ \sin 2C = \overline{\varphi A'}\ \sin 2A + \overline{\varphi B'}\ \sin 2B.$$

Tot astfel relaţia (4) nu e de cât un caz particular al unei alte relaţii mai generale[2]), stabilită de D-nul V. Cristescu şi anume:

$$c.\, d_c = a.\, d_a + b.\, d_b\ ,$$

în care a, b, c sunt laturile triunghiului, iar d_a, d_b, d_c distanţele vârfurilor sale la o dreaptă oarecare ce trece prin centrul I al cercului înscris.

Dacă dreapta trece şi prin centrul O al cercului circumscris, atunci avem ca mai sus:

$$d_a = \overline{\varphi A'}\ ,\quad d_b = \overline{\varphi B'}\ ,\quad d_c = \overline{\varphi C'},$$

iar relaţia precedentă devine:

$$c.\,\overline{\varphi C'} = a.\,\overline{\varphi A'} + b.\,\overline{\varphi B'}.$$

Constantin I. Georgescu.
Elev în cl. VIII reală, Liceul Mihai Viteazul.

55. *Calculul sumei puterilor a cincea a primelor* n *numere.* In *„Culegere de probleme de Algebră“* de Ioachimescu, XXVII, probl. 19, la indicaţiuni, găsim un mod mai uşor de procedare pentru sumarea puterilor a patra a primelor n numere, cu ajutorul cunoscutei relaţiuni din triunghiul lui Pascal:

$$(1)\qquad \sum_{i=p}^{i=p+n} C_i^p = C_{p+n+1}^{p+1}\ .$$

Prin acelaş procedeu se poate află şi suma puterilor a cincea a primelor n numere. Având în vedere că:

$$n^5 = (n+2)(n+1)n(n-1)(n-2) + 5(n+1)n(n-1) + n,$$

[1]) F. G.—M., Exercices de Géométrie, VI-e éd., question 1342, p. 609.
[2]) V. Cristescu, *Gazeta Matematică*, loc. cit. relaţia (15).

deducem:

$$n^5 = 120\,C^5_{n+2} + 15\,C^3_{n+1} + C^1_n,$$

$$S_5 = \sum_{n=1} n^5 = 120 \sum_{n=1} C^5_{n+2} + 15 \sum_{n=2} C^3_{n+1} + \sum_{n=1} C^1_n.$$

Ţinând seama de relaţiunea (1), obţinem:

$$S_5 = 120\,C^6_{n+3} + 15\,C^4_{n+2} + C^2_{n+1}.$$

Inlocuind simbolul C^m_q prin valoarea lui, făcând calculele şi dând factori comuni, găsim:

$$S_5 = \frac{n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)}{12}.$$

STOENESCU AL. I.
Cl. VI-a R. Lic. „Cantemir".

56. *Asupra notei 36.* Problemele pe care D-l V. CRISTESCU le readuce la aceeaşi matcă, sunt cazuri particulare ale următoarei chestiuni mai generale:

„Dacă: $x+y+z=0$,
expresiunea: $x^{2n+1}+y^{2n+1}+z^{2n+1}$,
este divizibilă cu $(x^3+y^3+z^3)$".

In virtutea ipotezei putem scrie:

$$x^{2n+1}+y^{2n+1}+z^{2n+1} = x^{2n+1}+y^{2n+1}-(x+y)^{2n+1}$$

$$= -\sum_1^{2n} C^i_{2n+1} x^{2n-i+1} y^i = -xy \sum_1^{2n} C^i_{2n+1} x^{2n-i} y^{i-1}$$

$$x^3+y^3+z^3 = x^3+y^3-(x+y)^3 = -3xy(x+y).$$

Restul împărţirii sumei:

$$\sum_1^{2n} C^i_{2n+1} x^{2n-i} y^{i-1},$$

prin $(x+y)$, se obţine făcând $x=-y$ în această expresiune; vom avea deci:

$$R = y^{2n-1} \sum (-1)^{2n-i} C^i_{2n+1} \equiv 0,$$

ceeace demonstrează proprietatea.

Problemele la care se referă D-l V. CRISTESCU, corespund cazului $n=3$.

M. GHERMĂNESCU.

57. *Asupra problemei 200 din Revista Matematică* din *Timişoara.* In nota matematică No. 36 dela pag. 210 din *Gazeta Matematică*, D-nul V. CRISTESCU arată că această problemă reiese din problema 161 din aceiaşi Revistă şi din problema II. 13 din *Culegere de Probleme*, Algebra.

Iată încă o soluţie simplă a problemei 200, care arată în acelaş timp că ea este un caz particular al altei probleme mai generale.

In *Culegerea de Probleme de Algebră* (ediţia II), III, 42, se arată că polinomul

$$(x+y+z)^{2n+1} - x^{2n+1} - y^{2n+1} - z^{2n+1},$$

este divizibil cu:

$$(x+y+z)^3 - x^3 - y^3 - z^3.$$

Dacă în polinom şi divizor facem $x+y+z=0$ şi $n=3$, obţinem tocmai problema 200.

MIRCEA I. ADAM.
Elev Liceul din Constanţa.

58. *Asupra unor relaţii trigonometrice.* Intr'o notă din *Revista Matematică din Timişoara*, Anul II, Nr. 3, p. 45, D-nul N. GEORGESCU-ROEGEN arată o cale pentru stabilirea unor noi relaţii trigonometrice între unghiurile unui triunghiu. Această cale se găseşte dată şi generalizată în uvragiul: *Rélations entre les Eléments d'un Triangle*, pag. 130. Voi lua unul dintre exemplele tratate de D-sa.

Fie relaţia dintre unghiurile unui triunghiu:

$$\frac{\operatorname{cotg} A + \operatorname{cotg} B}{\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B} + \frac{\operatorname{cotg} B + \operatorname{cotg} C}{\operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C} + \frac{\operatorname{cotg} C + \operatorname{cotg} A}{\operatorname{tg} C + \operatorname{tg} A} = 1.$$

Această relaţie va fi satisfăcută şi pentru unghiurile:

$$A_1 = \frac{\pi}{3} + k\left(\frac{\pi}{3} - A\right),\ B_1 = \frac{\pi}{3} + k\left(\frac{\pi}{3} - B\right),\ C_1 = \frac{\pi}{3} + k\left(\frac{\pi}{3} - C\right)$$

a căror sumă este π.

Ţinând seamă că avem:

$$\operatorname{cotg}\left[\frac{\pi}{3} + k\left(\frac{\pi}{3} - A\right)\right] = \operatorname{tg}\left[\frac{\pi}{6} - k\left(\frac{\pi}{3} - A\right)\right],\ \text{etc.},$$

$$\operatorname{tg}\left[\frac{\pi}{3} + k\left(\frac{\pi}{3} - A\right)\right] = \operatorname{cotg}\left[\frac{\pi}{6} - k\left(\frac{\pi}{3} - A\right)\right],\ \text{etc.},$$

şi înlocuind în relaţia considerată, obţinem relaţia:

$$\sum \frac{\operatorname{tg}\left[\frac{\pi}{6}-k\left(\frac{\pi}{3}-A\right)\right]+\operatorname{tg}\left[\frac{\pi}{6}-k\left(\frac{\pi}{3}-B\right)\right]}{\operatorname{cotg}\left[\frac{\pi}{6}-k\left(\frac{\pi}{3}-A\right)\right]+\operatorname{cotg}\left[\frac{\pi}{6}-k\left(\frac{\pi}{3}-B\right)\right]}=1.$$

Făcând pe $k=1/2$ găsim relaţia dată de D-nul GEORGESCU-ROEGEN:

$$\sum \frac{\operatorname{tg}\frac{A}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}}{\operatorname{cotg}\frac{A}{2}+\operatorname{cotg}\frac{B}{2}}=1.$$

In acelaş mod se pot găsi şi generaliză toate relaţiile obţinute de D-sa, precum şi multe altele.

FLOREA I. NEGRETZU.
Elev cl. VII reală, Liceul I. C. Brătianu.
Piteşti.

59. *Generalizarea problemei 2750.* Această problemă, rezolvată la pagina 131, volumul XXVII, se poate generaliză în felul următor:

Se dau punctele fixe A, C *şi un punct* B *mobil pe curba* $f(x,y)=0$. *Se cere locul punctului* M *pentru care* MA = MB = BC, *ştiind că punctele* A, B, C *se află într'un plan dat.*

Iau pe AC ca axă de x şi pe A ca origină. Fie $C(p,0)$ şi $M(\lambda,\mu)$. Punctul M se găseşte evident la întâlnirea perpendicularei ridicată pe AM în mijlocul său, cu cercul de rază MC şi cu centrul în M. Ecuaţiile perpendicularei şi cercului în chestiune sunt:

$$(1)\qquad 2\lambda x+2\mu y=\lambda^2+\mu^2$$

$$(2)\qquad (x-\lambda)^2+(y-\mu)^2=(p-\lambda)^2+\mu^2$$

Eliminând pe λ,μ între aceste ecuaţii şi ecuaţia $f(\lambda,\mu)=0$, se găseşte ecuaţia locului cerut.

Eliminarea se face cu mare uşurinţă în unele cazuri particulare, cum a fost exemplul problemei 2750.

Problema se poate extinde şi în spaţiu.

Fie: $F(x,y,z)=0,\quad \varphi(x,y,z)=0,$
curba pe care se mişcă un punct B. *Dacă* A *şi* C *sunt 2 puncte fixe, se cere locul lui* M *pentru care* MA = MB = BC.

Fie $A(0,0,0)$, $C(p,0,0)$, $M(\lambda,\mu,\nu)$. Punctul M se află pe sfera cu centrul în B şi cu raza BC şi pe planul perpendicular pe AM în mijlocul său. Ecuaţiile sferei şi a planului sunt:

$$(x-\lambda)^2+(y-\mu)^2+(z-\nu)^2=(p-\lambda)^2+\mu^2+\nu^2$$

$$\lambda\left(x-\frac{\lambda}{2}\right)+\mu\left(y-\frac{\mu}{2}\right)+\nu\left(z-\frac{\nu}{2}\right)=0.$$

Locul lui M se obţine eliminând pe λ, μ, ν între aceste ecuaţiuni şi

$$F(\lambda,\mu,\nu)=0 \quad , \quad \varphi(\lambda,\mu,\nu)=0.$$

LOCOT COL. GH. BUICLIU.

BIBLIOGRAFIE.

Mathesis. Volumul XXXVII No. 2. Fevruarie 1923. Bruxelles. Bibliografia triunghiului şi tetraedrului de J. NEUBERG. Asupra tetraedrelor bilogice de CL. SERVAIS. Calculul infinitesimal de *Simon Stevin*, de H. BOSMANS. Asupra ortopolului unui diametru al cercului circumscris unui triunghiu, de V. THÉBAULT.

Revista de matematicas y fisicas elementales. Anul IV No. 9. Ianuarie 1923. Buenos-Aires. (Număr redus de vacanţă, numai cu probleme).

Buletinul Asociaţiei de matematici pure şi aplicate. Anul II No. 6. Fevruarie 1923. Bucureşti. Les séries trigonométriques de TR. LALESCU. Proprietăţi ale funcţiunilor algebrice de P. SERGESCU. Teorema lui Rolle în cazul rădăcinilor imaginare, de AL. PROCA.

Idem No. 7. Martie 1923. Les séries trigonométriques par TR. LALESCU. Despre cuaternioni, de E. ABASOHN. Isomorfismul grupului transformărilor omografice cu grupul cuaternionilor, de D. BARBILIAN.

Note matematice şi stiinţifice. Seria I. Martie 1923 No. 7—10. Craiova. Cuvântul nostru, de Comitetul Societăţii Matematice a Liceului Carol I din Craiova. Teoria relativităţii, de ST. GEORGESCU GORJAN. Rezolvarea în numere intregi a ecuaţiei $px^2+qy^2=(p+q)z^2$, de I. B. FLORESCU. Note şi articole de alte ştiinţe.

S'au primit dela Universitatea *Masaryk* din Brün următoarele broşuri în limba cehă, cu rezumate în limba franceză şi ale căror titluri le dăm în limba română:

1. Dr. J. KAUCKY. *Asupra unei ecuaţii singulare a lui Volterra de prima speţă.*

2. Dr. J. KAUCKY. *Asupra reducerii ecuaţiilor diferenţiale la ecuaţii integrale.*

3. Dr. J. KAUCKY. *Asupra ecuaţiilor cu diferenţe finite, care sunt identice cu asociatele lor.*

4. L. Seifert. *Observări asupra unei suprafețe cubice cu punct uniplanar.*
5. B. Hostinsky. *Asupra forțelor centrale.*
6. T. V. Durbsky. *Microanaliză elementară cantitativă simplificată.*

Locot. Col. **Gh. I. Popescu.** *Apărarea antiaeriană.* (Lucrare premiată de Societatea Gazeta Matematică cu premiul „General Panaitescu)".
Timișoara. Tipografia școalelor militare de artilerie. 1922.

R. C. Archibald. *Euclide's book on division of figures.* Cambridge 1915. Prețul $10\,^1/_2$ șilingi.

Printre cărțile rămase dela Euclide și pierdute în urmă ereă și un tratat *„Despre parcelări"* și despre existența căreia a scris Proclus. In 1851 Woepcke a găsit în Biblioteca națională din Paris un manuscris arab pe care l-a tradus în *Journal asiatique.* Traducătorul arab al operei lui Euclide a dat enunțul celor 36 propozițiuni din acea operă și demonstrațiile a patru din ele numai, scriind la sfârșit: *„Finele tratatului. Ne-am mărginit la darea enunțurilor fără demonstrații, din cauză că demonstrațiile sunt ușoare".*

La anul 1220 Fibonacci, care a călătorit prin Orient și ereă în curent cu matematica greacă, a scris *Practicae geometriae,* în care este o parte relativă la parcelări. In această parte sunt unele chestiuni absolut identice cu cele găsite de Woepcke în manuscrisul arab, iar la ele demonstrațiile sunt bazate numai pe *Eleméntele lui* Euclide. Este neîndoios că Fibonacci a avut la dispoziție un manuscris grec sau arab al cărții *„Despre parcelări"* al lui Euclide.

Luând de bază aceste două opere, D-l Archibald și-a propus să restaureze cartea lui Euclide. A luat tot ce a tradus Woepcke și a completat demonstrațiile cu ce a găsit în cartea lui Fibonacci, făcând demonstrațiile după normele date în Elementele de geometrie ale lui Euclide. S'a dat enunțul a 36 propozițiuni, teoreme și probleme, — relative la parcelări în părți egale sau proporționale ale ariilor triunghiurilor, paralelogramelor, trapezelor, arii limitate cu arce de cerc; la detașări de anumite arii prin drepte paralele sau trecând prin puncte date, precum și unele teoreme ori probleme auxiliare pentru a regulă acele chestiuni, ca de exemplu următoarea: „să se aplice unei linii drepte un dreptunghiu egal cu dreptunghiul construit cu dreptele AB, AC și de care să difere cu un patrat", problemă care revine la o rezolvare grafică a ecuațiilor de gradul II. Fiecare propoziție este la urmă enunțată și are date bibliografice interesante.

Autorul se mai ocupă de unele scrieri vechi asupra parcelărilor, arătând că ele nu se pot considera ca traduceri ale operii lui Euclide, ci ca fiind inspirate de acesta, sau de altele mai vechi. Se examinează pe larg tratatul lui Mohammed Bagdedinus, copiat de John Dee în 1563 și trimes lui Commandinus. Se vorbește de scrierea lui Savasorda, tradus de Tivoli în 1116; de a lui Nemorarius de pe la 1222 și a lui Pagiulo din 1494, iar în Apendice se dă o bibliografie a lucrărilor referitoare la parcelarea figurilor apărute din 1500 până în 1911, precum și înainte de această dată unele opere arabe, grecești, etc.

D-l Archibald a reuşit să deà, pe cât isvoarele găsite până azi permit,— o restaurare a unor opere pierdute, a marelui geometru al antichităţei şi a-i pune in o nouă lumină ştiinţa şi rigoarea în expunere a lui Euclide, acest geniu al antichităţei care străduieşte de 22 secole, fără eclipsă, în desvoltarea ştiinţelor matematice. — Autorul a făcut un mare serviciu literaturii matematice prin publicarea acestei reconstituiri.

I. Ionescu.

Bulletin of the American mathematical Society. Vol. XXVIII No. 7. Octomvrie 1922. New-York. Transformările lui Cremona şi aplicaţiuni la algebră, geometrie şi funcţiuni modulare de A. B. Coble.

Mathesis. Vol. XXXVII. Anul 1923. No. 1 Ianuarie. Bruxelles. Bibliografia triunghiului şi tetraedrului de J. Neuberg. Asupra trisectriţei lui Longchamps de P. de Lépiney. Asupra ortopolului de Cl. Servais. Calculul infinitesimal la Simon Stevin de H. Bosmans.

Th. de Donder. *Interpretation physique de la relativité générale.* (Extras din *Bulletins de la Classe des Sciences*, şedinţa din 2 Decemvrie 1922. Supliment la *Mathesis*).

G. Bratu. *Sur les suites polynomiales et polyexponentielles.* (Extras din *Buletinul Societăţii de Ştiinţe din Cluj.* Vol. I. Ianuarie 1923. Cluj).

Revista matematică din Timişoara. Anul II. No. 12. Fevruarie 1923. Cum se pot găsi unele identităţi trigonometrice prin desvoltarea determinanţilor de Maior O. Bugeanu.

Gaspard Monge. *Géométrie descriptive.* Vol. I şi II. Paris. *Gauthier Villars* et C-ie 1922.

In colecţiunea de memorii şi uvragii: „*Les maitres de la pensée scientifique*“ de sub direcţiunea D-lui Solovine, s'a reedidat geometria descriptivă a lui Monge, părintele acestei ramuri a ştiinţei matematice aplicate. Ori cine se ocupă mai de aproape cu studiul acestei stiinţe, nu trebuie să neglijeze de a citi opera lui Monge, scrisă cu multă pătrundere, cu multă claritate şi cu toată dorinţa de a o vedeà răspândită cât mai mult, chiar printre lucrători. Cuvintele cu care incepe prefaţa, sau programul lui Monge, arată toată preocuparea lui şi tot patriotismul pe care l'a pus în redijarea cursului său. Reproduc aci o parte din acea prefaţă:

„Pentru a scoate naţiunea franceză din dependenţa in care a fost până în prezent industriei străine, trebuie mai intâi, să dirijăm educaţia naţională către cunoaşterea obiectelor care cer exactitate, ceeace a fost cu totul neglijat până azi şi să obişnuim mâinile meşteşugarilor noştri cu mânuirea instrumentelor de tot felul, care servă să aducă preciziune în lucrări şi să-i măsoare gradul; atunci consumatorii apreciind exactitatea, vor puteà să o pretindă la diferite lucrări şi vor oferi preţurile necesare; iar meşteşugarii noştri, familiarizaţi cu dânsa din cea mai fragedă etate, vor fi în măsură să o realizeze.“

„Trebui in al doilea loc, să facem populară cunoştinţa unui mare număr de fenomene naturale, indispensabile progresului industriei şi să pro-

fităm, pentru înaintarea instrucțiunii generale a națiunii, de această circumstanță fericită în care ea se găsește, de a avea la dispoziție principalele resurse care îi sunt necesare".

„Trebue în fine să răspândim, printre meșteșugarii noștrii, cuncașterea procedeelor artelor și mașinilor, care are ca obiect, sau de a reduce manopera, sau de a da rezultatelor lucrărilor mai multă uniformitate și mai multă preciziune și în această privință, trebue să o mărturisim, că avem mult de luat dela națiunile străine".

„Nu se pot îndeplini toate aceste vederi, decât dând educațiunii naționale o direcțiune nouă".

„Mai întâi trebue să familiarizăm cu întrebuințarea geometriei discriptive pe toți tinerii care au inteligență, fie cei ce au o avere dobândită, fie că o dată ei ar fi în stare de a întrebuința mai bine capitalurile lor, pentru dânșii ori pentru stat, fie că nu au altă avere decât educația; pentruca într'o zi să poată să tragă un mai mare folos din munca lor."

„Această artă are două scopuri principale".

„Prima este de a reprezentà cu exactitate, pe desemne care nu au de cât două dimensiuni, obiectele care au trei dimensiuni și care sunt susceptibile de o definiție riguroasă".

„Din acest punct de vedere, ea este o limbă necesară omului de geniu care concepe un proect, acelora care trebue să-i dirijeze executarea și în fine meșteșugarilor, care trebue ei înșuși să execute diferitele părți".

„Al doilea obiect al geometriei descriptive este de a deduce, din descrierea exactă a corpurilor, tot ce decurge neapărat din formele lor și din pozițiunile lor respective. In acest sens, ea este un mijloc de cercetare a adevărului; ea oferă exemple continui de trecere dela cunoscut la necunoscut și de oarecé ea se aplică la obiecte susceptibile de cea mai mare evidență, este necesar să o facem să intre în planul unei educațiuni naționale. Ea este nu numai proprie de a exercità facultățile intelectuale ale unui mare popor și să contribue prin aceasta la perfecționarea speței umane, dar încă ea este indispensabilă tuturor lucrătorilor al căror scop este de a da corpurilor anumite forme determinate; și tocmai din cauză că metodele acestei arte au fost până aci foarte puțin răspândite și chiar aproape cu totul neglijate, progresul industriei noastre a fost așà de încet".

„Se va contribui deci a da educațiunii naționale o direcțiune avantajoasă, familiarizând pe tinerii noștri meșteșugari cu aplicațiunile geometriei descriptive la construcțiunile grafice, care sunt necesare unui mare număr de arte și de a face uz de această geometrie pentru reprezentarea și determinarea elementelor mașinilor, cu mijlocul cărora omul, punând la contribuțiune forțele naturii, nu-și mai rezervă, pentru a zice astfel, în operațiunile sale altă muncă, de cât pe a inteligenții sale".

„De asemenea este tot atât de avantajos de a răspândi cunoștința fenomenelor naturii, pe care le putem utilizà în profitul artelor".

„Farmecul care le însoțește poate să învingă repulsiunea, pe care oamenii o au în general pentru strădania spiritului și de a-i face să găsiască plăcere în exercitarea inteligenței, pe care aproape toți o privesc ca penibilă și greoaie".

Aceste idei, emise de MONGE, acum un secol şi mai bine, îşi au şi azi aplicaţiune la noi, unde industria trebue să lupte cu concurenţa străină şi de aceia geometria descriptivă nu poate lipsi din educaţia oricărui om, care va aveà de citit în viaţă planuri de construcţiuni, maşini, lucrări militare, etc.

Pentru aceştia geometria lui MONGE este un catechism, care dă în mod clar elementele acestei ştiinţe. Ea este urmată de noţiuni de teoria curbelor şi perspectivă.

I. IONESCU.

B. M. BARBĂLATT *Două puncte remarcabile.* No. 3 din *Biblioteca Societăţei „Matematica Bârlădeană"*, 1922. Tipografia *Aron Haber*, Bârlad.

CERERI.

100. Unde s'ar putea găsi studiată ecuaţia:

$$\sin ax = \operatorname{tg} bx.$$

GH. I. JUJESCU.

Răspuns la cererea No. 90. S'a mai oferit a cercetà manuscrisele *Culegerii de Probleme* de Aritmetică şi D-l Căp. GR. ZAPAN (Tg. Mureşului).

PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 1040*) *Dacă* α, β, γ *sunt unghiurile pe care le fac medianele* AA', BB', CC' *ale unui triunghiu* ABC *cu laturile* AB, BC, CA, *avem relaţiile:*

$$a \sin(C+\beta-\gamma) \sin(B+\alpha) = b \sin(A+\gamma-\alpha) \sin(C+\beta) = C \sin(B+\alpha-\beta) \sin(A+\gamma).$$

N. DIACONESCU.

Fie G centrul de greutate al triunghiului, adică intersecţia lui AA', BB', CC'. Avem:

$$\sphericalangle CA'G = B + \alpha, \qquad \sphericalangle CGA' = A - \alpha + \gamma,$$

$$\sphericalangle CB'G = 180^0 - (C + \beta), \qquad \sphericalangle CGB' = C - \gamma + \beta.$$

*) Enunţ rectificat.

Teorema sinusurilor aplicată triunghiurilor A'CG, B'CG dă:

$$\frac{\frac{1}{2}a}{\sin(A+\gamma-\alpha)} = \frac{CG}{\sin(B+\alpha)}, \quad \frac{\frac{1}{2}b}{\sin(C+\beta-\gamma)} = \frac{CG}{\sin(C+\beta)}.$$

Eliminând CG găsim:

$$a \sin(C+\beta-\gamma) \sin(B+\alpha) = b \sin(A+\gamma-\alpha) \sin(C+\beta).$$

In mod analog se arată şi ultima egalitate.

G. NANEŞ.

PROBLEMA 2411. *Intr'un triunghiu* ABC *se construesc cercurile cu centrele* A, B, C *şi cu razele respectiv egale cu laturile opuse. Centrul radical al acestor trei cercuri este simetricul ortocentrului, în raport cu centrul cercului circumscris.*

E. N. BARISIEN.

Soluţie dată de D-nul EUGEN I. BALAN (Elev clasa VIII, particular) şi IOAN M. ŞERBĂNESCU (Elev clasa VIII, Liceul Mihai Viteazul).

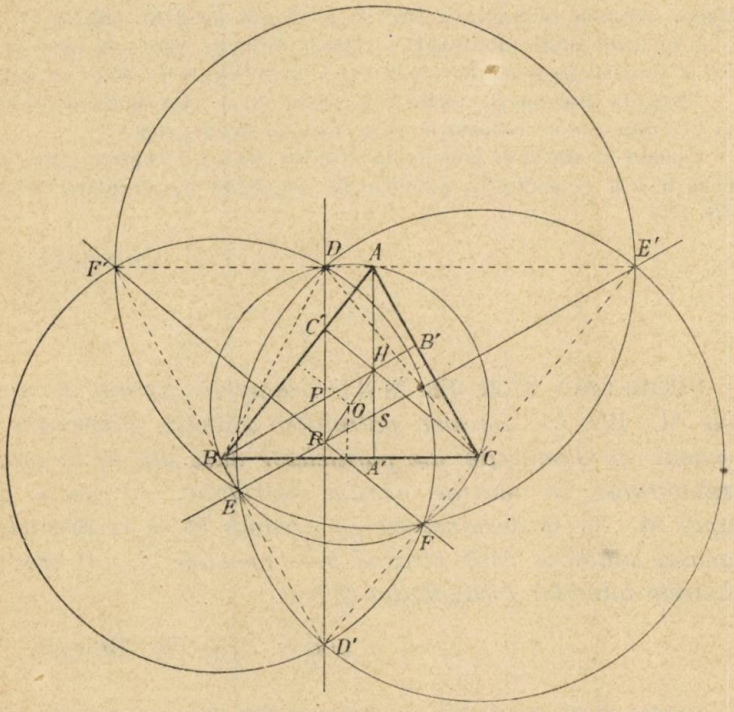
Fie H ortocentrul, O centrul cercului circumscris, D şi D' punctele de intersecţie ale cercurilor descrise din B şi C ca centre; E, E' ale cercurilor descrise din C şi A; F, F' ale cercurilor descrise din A şi B, în condiţiile problemei. Axele radicale DD', EE', FF', se întretaie în R, centrul lor radical. Trebue să demonstrăm că centrul O al cercului circumscris este mijlocul segmentului HR.

Proprietatea este aproape evidentă dacă observăm că axele radicale DD', EE', FF' sunt simetricele înălţimilor AA', BB', CC', în raport cu perpendicularele ridicate respectiv pe mijloacele laturilor BC, CA, AB.

In adevăr, axa radicală DD', spre ex., e perpendiculară pe linia centrelor BC, iar triunghiul DBC este egal, prin construcţie, cu triunghiul ABC, căci DB = AC, DC = AB, iar latura BC e comună. Rezultă de aici imediat că axa radicală DD' e simetrica înălţimei AA' în raport cu perpendiculara ridicată pe mijlocul laturei BC. Demonstraţie analoagă pentru EE' şi FF'.

Dreptele DD' şi AA' precum şi EE' şi BB' fiind paralele, formează, prin intersecţia lor, paralelogramul HPRS. Perpendicularele

ridicate pe mijloacele laturilor BC, CA, AB trec evident prin mijlocul diagonalei HR, însă aceste perpendiculare determină, prin intersecţia lor, centrul O al cercului circumscris; cu alte cuvinte O este mijlocul diagonalei HR, ceeace demonstrează teorema.



D-nul Constantin I. Georgescu a dat o bună soluţie cu ajutorul geometriei analitice.

Notă. 1. Figura formată se bucură şi de alte proprietăţi. Astfel punctele E', A, D, F' sunt colineare; asemenea punctele F', B, E, D' şi D', F, C, E' sunt colineare. Laturile triunghiului D' E' F' sunt paralele cu laturile triunghiului ABC, iar A, B, C sunt mijloacele laturilor triunghiului D'E'F', astfel că ABC este triunghiul median (sau complimentar) al lui D'E'F', iar DEF este triunghiul ortic. Toate aceste proprietăţi se pot uşor stabili geometriceşte.

Teorema care face obiectul problemei este evidentă, dacă considerăm triunghiul ABC şi triunghiul său anticomplimentar D'E'F'. In adevăr, cercurile descrise din A, B şi C ca centre, cu raze egale cu laturile opuse ale triunghiului ABC, sunt cercurile descrise pe laturile triunghiului anticomplimentar D'E'F' ca diametre. Aceste cercuri, luate două câte două, au ca

axe radicale înălțimile DD', EE', FF' ale triunghiului anticomplimentar, ar centrul lor radical R este ortocentrul acestui triunghiu. Ortocentrul H al triunghiului ABC este centrul cercului circumscris triunghiului anticomplimentar D'E'F', iar cercul O circumscris triunghiului ABC, este cercul lui EULER al triunghiului anticomplimentar. Ori se știe că în orice triunghiu, centrul cercului lui EULER este mijlocul segmentului care unește ortocentrul cu centrul cercului circumscris. Deci R și H sunt simetrice față de O.

2. O proprietate interesantă a figurei formate, este cea care se raportă la construcția punctului lui STEINER al triunghiului ABC și anume:

„Dreapta care unește vârful A cu punctul de intersecție al dreptelor BC și EF, taie cercul circumscris O în punctul lui STEINER *)".

Evident că tot prin punctul lui STEINER trec și dreptele care unesc vârfurile B și C respectiv cu punctele de intersecție ale dreptelor (CA, FD) și (AB, DE).

V. CRISTESCU.

PROBLEMA 2700. *Fie* M N P *triunghiul format de diagonalele* AC, BD, EF *ale unui patrulater complet. Patru, din cele 12 puncte de intersecție ale paralelelor duse din* M *la laturile patrulaterului, cu laturile acestui patrulater, se găsesc pe o dreaptă* M'. *Să se demonstreze că dreapta* M' *și cu dreptele* N', P' *analog obținute, însă plecând dela punctele* N *și* P, *trec prin mijloacele laturilor triunghiului* M N P.

LOCOT. COL. GH. BUICLIU.

Soluție dată de D-nii: I. BÂRSU, M. BERCOVICI, A. LEON, B. BARBĂLATT și M. GRÜNBAUM.

Conform enunțului, se duc din M paralele la laturile patrulaterului. Din cele 12 puncte obținute, se vede, pe o figură bine construită, că ar puteà fi în linie dreaptă cele 4 puncte, așezate la intersecția paralelelor, cu laturile opuse acelora cărora s'au dus paralelele. Astfel, în figura de față, par a fi în linie dreaptă punctele: A_1, care se găsește la intersecția lui C D cu paralela dusă prin M la A B; B_1, care se află la intersecția lui A D cu paralela dusă prin M la BC; C_1, care se află pe AB și paralela dusă prin M la C D și D_1, care se află pe B C și paralela dusă prin M la

*) J. NEUBERG, *Mathesis*, année 1889, exercice 137, p. 69.

A D. Să demonstrăm că așà este. Ținând seama de modul cum sunt construite punctele A_1, B_1, C_1, D_1 se poate scrie:

$$B_1F/B_1A = MC/MA = C_1E/C_1A \quad \therefore \quad A_1C_1 \parallel EF$$

$$A_1C/A_1E = MC/MA = D_1C/D_1F \quad \therefore \quad A_1D_1 \parallel EF$$

$$B_1F/B_1D = MC/MD = A_1E/A_1D \quad \therefore \quad A_1B_1 \parallel EF.$$

Aceste rezultate dovedesc că punctele A_1, B_1, C_1, D_1 se găsesc pe o dreaptă M' paralelă cu E F, adică paralelă cu N P. Dreapta M' fiind diagonală paralelogramelor MA_1EC_1, MB_1FD_1, va trece prin mijloacele dreptelor ME și MF, deci și prin mijloacele dreptelor MN și MP.

In mod analog, se arată că dreptele N' și P', construite la fel, trec prin mijloacele laturilor triunghiului MNP.

Este de observat că atunci când se ia punctul M, intersecția diagonalelor interioare, punctele A_1, B_1, C_1, D_1 se găsesc pe laturile opuse celor cărora s'au dus paralelele, iar când se ia punctul N sau P, atunci A_1, B_1, C_1, D_1 respectiv, se găsesc pe una din laturile adiacente celor cărora s'au dus paralelele.

PROBLEMA 2722. *Să se găsiască un număr de șease cifre, cub perfect, așà că suma celor două grupe de câte trei cifre, să fie egală cu pătratul triplului sumei cifrelor rădăcinii sale.*

B. FREYER.

Soluție dată de D-nii I. T. BÂRSU și ION RIZESCU (Lic. Constanța).

Dacă notăm cu A și B cele două grupe de câte trei cifre ale numărului căutat, a cărui rădăcină cubică este R, va trebui să avem, conform enunțului problemei:

(1) $\qquad 10^5 \leqslant R^3 < 10^6 \quad \therefore \quad 47 \leqslant R < 100,$

(2) $\qquad R^3 = 1000\,A + B = 999\,A + (A + B),$

(3) $\qquad A + B = 9\,(a+b)^2,$

a și b fiind cifrele lui R.

Din relația (3), se vede că (A + B) este un multiplu de 3,

atunci observând relaţia (2), se deduce că şi R^3 şi deci R va fi divizibil prin 3, sau cu $a+b=\mathscr{M}3$.

A şi B fiind numere de câte trei cifre, maximul sumei A + B va fi deci 999 + 999 = 1998, aşà că din relaţia (3), scoatem:

$$a+b\leqslant\sqrt{1998/9}\quad\therefore\quad a+b\leqslant 14.$$

Pe de altă parte, $a+b\geqslant 4$, căci R este cel puţin 47, atunci din cele de mai sus, rezultă că $a+b$ nu poate aveà de cât valorile: 6, 9 şi 12, cu care putem formà toate numerele R: 51, 60; 54, 63, 72, 81, 90; 48, 57, 66, 75, 84 şi 93, care ar puteà satisface condiţiilor problemei propuse.

Pentru găsirea soluţiilor, facem următorul tablou:

R	51	60	54	63	72	81	90	48	57	66	75	84	93
R^3	132651	216000	157464	250047	373248	531441	**729000**	110592	185193	287496	**421875**	**592704**	804357
A+B	783	216	621	297	621	972	729	702	378	783	1296	1296	1161
$9(a+b)^2$	324	324	729	729	729	729	729	1296	1296	1296	1296	1296	1296

Din acest tablou, se vede că singurele valori ale lui R, care dau soluţiuni problemei, sunt 75, 84 şi 90, cărora le corespund, ca soluţiuni, numerele: **421875, 592704** şi **729000.**

Notă. Au găsit numai soluţia 729000, D-nii Alex. Tauber şi Leon Rosenfed.

D-l A. Pamula a găsit, pe o cale foarte greoaie, numai soluţiile: 592704 şi 729000.

D-l C. I. Georgescu a găsit toate soluţiile problemei, făcând încercări directe cu toate numerele dela 47 pânăla 99.

PROBLEMA 2734. *In triunghiul* ABC, *în care* $\sphericalangle C=45^0$, *se duce bisectoara* BD *care taie latura* CA *în* D. *Să se stabiliască relaţiunile:*

$$DC=\frac{2a^3b(c-a)}{(b^2-c^2)^2-a^4}\quad şi\quad AD=b\frac{(b^2-c^2)^2+a^3(a-2c)}{(b^2-c^2)^2-a^4}.$$

Luca N. Luca.

Soluție dată de D-nul CONSTANTIN I. GEORGESCU (Elev în cl. VIII reală, Liceul Mihai Viteazul, București).

Fie AE înălțimea dusă din A. Unghiul C fiind 45^0, triunghiul dreptunghic ACE este isoscel și vom aveà:

$$\overline{AC}^2 = 2\overline{AE}^2 \quad \therefore \quad AE = \tfrac{1}{2} b\sqrt{2}.$$

Aria S a triunghiului ABC va fi:

$$S = \tfrac{1}{2}\overline{BC}\cdot\overline{AE} = \tfrac{1}{4} ab\sqrt{2} \quad \therefore \quad 16\,S^2 = 2\,a^2 b^2. \qquad (1)$$

Se știe însă că într'un triunghiu oarecare, avem:

$$16\,S^2 = -a^4 - b^4 - c^4 + 2\,a^2 b^2 + 2\,b^2 c^2 + 2\,c^2 a^2. \qquad (2)$$

Dacă ținem seamă de condiția (1), relația (2) se poate scrie succesiv:

$$a^4 + b^4 + c^4 - 2\,b^2 c^2 - 2\,c^2 a^2 = 0,$$

$$a^5 + ab^4 + ac^4 - 2\,ab^2 c^2 - 2\,c^2 a^3 = 0,$$

$$a^5 + ab^4 + ac^4 - 2\,ab^2 c^2 - 2\,c^2 a^3 - 2\,a^4 c + 2\,a^4 c = 0,$$

$$a\,(b^4 - 2\,b^2 c^2 + c^4 + a^4 - 2\,a^3 c) = c\,(2\,a^3 c - 2\,a^4),$$

$$\frac{b^4 - 2\,b^2 c^2 + c^4 + a^4 - 2\,a^3 c}{2\,a^3 c - 2\,a^4} = \frac{c}{a}. \qquad (3)$$

Se știe însă că avem:

$$AD/DC = c/a, \text{ iar } \overline{AD} + \overline{DC} = b,$$

$$\therefore \qquad DC = b.\frac{a}{c+a}, \quad AD = b.\frac{c}{c+a}.$$

Aplicând relației (3) o teoremă cunoscută a rapoartelor egale, obținem ușor:

$$DC = b.\frac{2\,a^3 c - 2\,a^4}{b^4 - 2\,b^2 c^2 + c^4 - a^4} = \frac{2\,a^3 b\,(c-a)}{(b^2-c^2)^2 - a^4}.$$

$$AD = b.\frac{b^4 - 2\,b^2 c^2 + c^4 + a^4 - 2\,a^3 c}{b^4 - 2\,b^2 c^2 + c^4 - a^4} = b.\frac{(b^2-c^2)^2 + a^3(a-2c)}{(b^2-c^2)^2 - a^4}.$$

PROBLEMA 2807. *Să se rezolve sistemul:*

$$x\cos\alpha\sin\beta+y\sin\alpha\sin\beta+z\cos\beta-a\cos\alpha=0$$

$$x\sin\alpha-y\cos\alpha-z\operatorname{cotg}\beta+a\cos\alpha\operatorname{cosec}\beta=0$$

$$x^2+y^2+z^2-a^2=0.$$

G. A. NICHIFOR.

Soluție dată de D-l EMIL ȘTEFĂNESCU (Liceul Sp. Haret, București).

In a 2-a ecuație, înlocuind $\operatorname{cosec}\beta$ cu $1/\sin\beta$ și gonind numitorul, în ipoteza $\beta\neq k\pi$, obținem ecuațiunea:

$$x\sin\alpha\sin\beta-y\cos\alpha\sin\beta-z\cos\beta+a\cos\alpha=0,$$

care adunată cu prima ecuațiune, ne va da, după reducerea lui $\sin\beta$, ecuațiunea simplă:

$$x(\cos\alpha+\sin\alpha)=y(\cos\alpha-\sin\alpha),$$

pe care o putem scrie sub următoarea formă de proporție:

$$\frac{x\sin\alpha}{(\cos\alpha-\sin\alpha)\sin\alpha}=\frac{y\cos\alpha}{(\cos\alpha+\sin\alpha)\cos\alpha}=\frac{x\sin\alpha-y\cos\alpha}{-1}.$$

Acest șir de rapoarte se poate egală, în baza ecuației a 2-a, cu fracția:

$$\frac{z\cos\beta-a\cos\alpha}{-\sin\beta}.$$

Din acest șir de rapoarte, deducem pe x și y în funcție de z:

$$(A)\begin{cases} x=\dfrac{\cos\alpha-\sin\alpha}{\sin\beta}(a\cos\alpha-z\cos\beta), \\ y=\dfrac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\sin\beta}(a\cos\alpha-z\cos\beta), \end{cases}$$

care introduse în ecuația a 3-a, dau:

$$\sin^2\beta(a^2-z^2)=2(a\cos\alpha-z\cos\beta)^2$$

$$\therefore\quad z^2(1+\cos^2\beta)-4az\cos\alpha\cos\beta+a^2(2\cos^2\alpha-\sin^2\beta)=0$$

$$\therefore\quad z=\frac{2a\cos\alpha\cos\beta\pm\sqrt{4a^2\cos^2\alpha\cos^2\beta-a^2(1+\cos^2\beta)(2\cos^2\alpha-\sin^2\beta)}}{1+\cos^2\beta}$$

sau:
$$z=\frac{a}{1+\cos^2\beta}(2\cos\alpha\cos\beta\pm\sin\beta\sqrt{2\sin^2\alpha-\sin^2\beta}),$$

care introduse în formulele (A), ne vor da foarte uşor pe x şi y. Rădăcinile vor fi reale dacă: $2\sin^2\alpha - \sin^2\beta \geqslant 0$.

Au mai rezolvat problema şi D-nii: I. T. BÂRSU (Liceul din Constanţa), I. COŞEREANU (Liceul din Piatra Neamţ), I. B. FLORESCU, M. GÂTAN şi C. I. GEORGESCU (Liceul din Constanţa).

PROBLEMA 2874. *Să se studieze natura suprafeţei:*

$$4(x^2+y^2+z^2) - 3(xy+yz+zx)+5x+16y-17z+26=0$$

şi să se scrie ecuaţia redusă.

P. SERGESCU.

Soluţie dată de D-l D. PANAITESCU (elev al Şcoalei Politechnice din Bucureşti). Determinantul coeficienţilor nu e nul, deci suprafaţa e o cuadrică veritabilă. Cuadrica e cu centru, căci determinantul ecuaţiilor

$$f'_x=0 \quad , \quad f'_y=0 \quad , \quad f'_z=0,$$

e egai cu 121/4. Ceilalţi doi invarianţi sunt $I=12$, $J=165/4$. Deci ecuaţia în s care dă axele este:

$$s^3 - 12\,s^2 + 165/4\,s - 121/4 = 0.$$

Ea are rădacinile 1, $11/2$, $11/2$. Ca atare, cuadrica e *un elipsoid de revoluţie*. Centrul lui are coordonate rădăcinile sistemului de trei ecuaţii scrise mai sus, ceeace ne dă:

$$x_0=-1 \quad , \quad y_0=-2 \quad , \quad z_0=1.$$

Luând un nou sistem de axe CXYZ cu origina în centrul elipsoidului, dar paralele cu vechile axe, avem:

$$X=x+1 \quad , \quad Y=y+2 \quad , \quad Z=z-1,$$

iar ecuaţia elipsoidului devine:

$$4(X^2+Y^2+Z^2) - 3(XY+YZ+ZX)=1.$$

Elipsoidul e real şi, evident, de revoluţie în jurul dreptei $X=Y=Z$, căci ecuaţia se poate scrie:

$$\frac{11}{2}(X^2+Y^2+Z^2) - \frac{3}{2}(X+Y+Z)^2=1.$$

Pentru a obţine ecuaţia redusă la axele principale, vom luà dreapta $X=Y=Z$ ca noua axă ζ şi ca axe ξ, η două drepte rec-

tangulare oarecare, situate în planul dus din C perpendicular pe C ζ. De exemplu, facem transformarea:

$$X+Y+Z=\sqrt{3}\,\zeta, \qquad X-Y=\sqrt{2}\,\eta, \qquad X+Y-2Z=\sqrt{6}\,\xi,$$

ceeace dă:

$$6X=\sqrt{6}\,\xi+3\sqrt{2}\,\eta+2\sqrt{3}\,\zeta$$

$$6Y=\sqrt{6}\,\xi-3\sqrt{2}\,\eta+2\sqrt{3}\,\zeta$$

$$6Z=-2\sqrt{6}\,\xi+2\sqrt{3}\,\zeta.$$

Ecuaţia redusă la aceste axe, a elipsoidului, devine:

$$\frac{11}{2}(\xi^2+\eta^2)+\zeta^2=1,$$

care se puteà scrie imediat, din cunoaşterea rădăcinilor ecuaţiei în s.

Notă. Elipsoidul acesta e elipsoidul de inerţie al unui cub omogen, faţă de unul din vârfurile sale.

PROBLEMA 2930. *Un tren blindat, fiind urmărit de focurile unei baterii duşmane, instalată în apropierea liniei ferate, se retrage cu viteza maximă. După un minut, comandantul trenului constată că intervalul dintre flacăra tunului şi zgomotul de plecare al loviturilor duşmane s'a mărit cu 4 secunde. Se întreabă care este viteza uniformă a trenului?*

GH. ZAPAN

Presupunem că într'o clipă oarecare, când comandantul trenului vede flacăra tunului, trenul s'ar găsi în punctul P_1 la distanţa d de tunul T.

Fie V viteza sunetului, v viteza trenului şi x distanţa P_1P_2, parcursă de tren în timpul t cât sunetul parcurge distanţa TP_2. Admitem că linia ferată este în linie dreaptă.

Putem scrie: $x/v=(d+x)/V=t$.

Aplicăm o proprietate a proporţiilor, după care diferenţa numărătorilor împărţită la diferenţa numitorilor este egală cu valoarea fiecărei fracţii şi găsim:

$$(1) \qquad d=t(V-v).$$

Considerând punctele P'_1, P'_2, în care $TP'_1 = D$, etc., vom avea în mod analog:

$$D = (t + 4)(V - v) = t(V - v) + 4(V - v).$$

Ţinând seamă de (1), rezultă:

$$D = d + 4(V - v) \tag{2}$$

şi cum, după un minut, trenul ajunge din P_1 în P'_1, avem încă:

$$D = d + 60\,v. \tag{3}$$

Relaţiile (2) şi (3) ne dau expresiunea valorii vitezei v a trenului în raport cu viteza V a sunetului:

$$60\,v = 4(V - v)$$

$$\therefore \quad v = V/16 = 340/16 = 21{,}25\ m/s = 76{,}5\ Km/oră.$$

Observări. 1°. Această problemă nu a fost rezolvată de niciunul dintre cei ce au încercat-o. S'a neglijat faptul că în timp ce sunetul parcurge distanţa dela tun la tren, trenul se deplasează le rându-i, aşà încât pentru aceiaşi viteză a sunetului, 340 metri ca mai sus, s'a găsit că trenul are o viteză de 81,6 Km. pe oră!

2°. D-ra Elena Lăzărescu (cl. V secundară, Bucureşti) a dat o soluţie, în care raţionamentul şi rezultatul se apropie de cel de mai sus.

Gh. Zapan.

PROBLEMA 2933. *Dacă între laturile unui triunghiu există relaţiunea* $2a = b + c$, *să se arate că există şi relaţia:*

$$8/r_a^3 = 1/r_b^3 + 1/r_c^3 + 6/r_a r_b r_c,$$

r_a, r_b, r_c *fiind razele cercurilor exînscrise.*

Grigore Zapan.

Soluţie şi generalizare dată de D-nii: I. S. Antoniu, B. M. Barbălatt, A. Buşilă, Tr. Dordea, C. I. Georgescu, A. Tauber, Mircea Vasiliu.

Să rezolvim problema mai generală: Dacă între laturile unui triunghiu există relaţiunea $ka = mb + nc$, atunci există şi relaţia:

$$\left(\frac{m+n}{r_a}\right)^3 = \left(\frac{k-n}{r_b}\right)^3 + \left(\frac{k-m}{r_c}\right)^3 + 3\frac{(m+n)(k-m)(k-n)}{r_a r_b r_c},$$

r_a, r_b, r_c fiind razele cercurilor exînscrise.

In adevăr, dacă între laturile triunghiului există relaţia: $ka = mb + nc$, e uşor de văzut că există şi relaţia:

$$(m+n)/r_a = (k-n)/r_b + (k-m)/r_c$$

(G. M. XXVIII, 23.), pe care ridicând-o la cub şi ţinând seamă de identitatea:

$$(x+y)^3 = x^3 + y^3 + 3xy(x+y),$$

obţinem:

$$\left(\frac{m+n}{r_a}\right)^3 = \left(\frac{k-n}{r_b}\right)^3 + \left(\frac{k-m}{r_c}\right)^3 + 3\frac{(m+n)(k-m)(k-n)}{r_a r_b r_c}.$$

In cazul particular, când $k=2$ şi $m=n=1$, relaţia de mai sus devine:

$$8/r_a^3 = 1/r_b^3 + 1/r_c^3 + 6/r_a r_b r_c,$$

care face obiectul problemei 2933.

Notă. 1°. Au generalizat problema pentru cazul când între laturi există relaţia: $na = b + c$, arătând că avem:

$$\frac{8}{(n-1)^3 r_a^3} = \frac{1}{r_b^3} + \frac{1}{r_c^3} + \frac{6}{(n-1) r_a r_b r_c},$$

D-nii: B. Barbălatt, A. Buşilă, I. Constantinescu, I. Coşereanu, E. Iliescu, I. Iliescu, Th. Popa, T. Popoviciu, I. Şerbănescu, Em. Ştefănescu, Al. Tauber.

2°. Au rezolvat problema, fără a o generaliză, D-nii: G. Amărascu, N. Arcadian (Craiova), Em. Bercovici, C. Berdan, P. Biberi (M-rea Dealului), D. Blumenfeld, M. Bogdan (Caracal), Al. Brăileanu, M. Brătescu (R.-Vâlcea), V. Dan, V. Dinulescu (Galaţi), F. Dobrescu (Caracal), I. Dragomir, Marin Dumitrescu (Craiova), I. B. Florescu, L. Focşăneanu, M. Gatan, C. E. Georgescu, Fl. Georgescu, Marin Georgescu (Liceul Militar, Tg.-Mureş), V. Ghiţescu, M. Gogălniceanu (Brăila), Cr. Goilav, B. Grünberg, E. Iliescu (M-rea Dealului), Corneliu Ionescu, Longin Ionescu (Caracal), Tănase Ionescu (M-rea Dealului), I. Ioniţă (Şc. Artilerie-Timişoara), Gh. Jujescu, P. Kaiz, Şt. Lăzărescu (Giurgiu), D. Măru, A. Miclescu (Şc. Artilerie), A. Mocanu (Huşi), A. Th. Nicolau, Sorin Niculescu, E. Oprişan (Bârlad), A. Panaitescu, Titus Parvulescu (cl. V Liceul Militar M-rea Dealului), I. Petrovici (Craiova), Th. Popa, Ov. Popea (Kişinău), A. Popeanu, I. T. Rizescu, Coriolan Rovinaru (Liceul Militar Tg.-Mureş), Edgar Russu (Liceul Internat Iaşi), M. Săvescu, Dili Schileru, C. Schönfeld, I. Silion (Câmpina), Mircea Simionescu (Iaşi), Şt. Solacoglu, W. Solomon, Gh. Stancu (Focşani), N. Stănescu, I. Stoenescu (Bucureşti), A. Sufleţel (Şc. Artilerie Timişoara), Al. Şcodrano, N. Tailer, I. Theodorescu (Ploeşti), N. Theodoru (Huşi), M. D. Vasilescu (Craiova).

3°. D-l TRAIAN DORDEA mai dă şi următoarele relaţii ale triunghiului în care $ka = mb + nc$:

$$(\alpha) \qquad k^3/h_a^3 = m^3/h_b^3 + n^3/h_c^3 + 3kmn/h_a h_b h_c,$$

$$(\beta) \qquad \left(\frac{m+n}{r}\right)^3 = \left(\frac{k+m}{r_b}\right)^3 + \left(\frac{k+n}{r_c}\right)^3 + 3\frac{(m+n)(k+m)(k+n)}{r\, r_a\, r_b\, r_c}.$$

Relaţiunea (α) a fost dată şi de D-l MIRCEA VASILIU.

4°. D-l B. M. BARBĂLATT dă următoarele relaţiuni:

$$(\gamma) \qquad k^3/h_a^3 = m^3/h_b^3 + n^3/h_c^3 + 3kmn/h_a h_b h_c = m^3/h_b^3 + n^3/h_c^3 + 3Rkmn/S^2,$$

$$(\delta) \qquad \frac{k^3}{\operatorname{cosec}^3 A} = \frac{m^3}{\operatorname{cosec}^3 B} + \frac{n^3}{\operatorname{cosec}^3 C} + \frac{3kmn}{\operatorname{cosec} A \cdot \operatorname{cosec} B \cdot \operatorname{cosec} C}$$

$$= \frac{3kmnS}{2R^2} + \frac{m^3}{\operatorname{cosec}^3 B}.$$

$$\frac{k^3(r_a - r)^3}{\operatorname{tg}^3 \tfrac{1}{2} A} = \frac{m^3(r_b - r)^3}{\operatorname{tg}^3 \tfrac{1}{2} B} + \frac{n^3(r_c - r)^3}{\operatorname{tg}^3 \tfrac{1}{2} C} + \frac{3(r_a - r)(r_b - r)(r_c - r)kmn}{\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} A \cdot \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} B \cdot \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} C}$$

$$= \frac{m^3(r_a - r)^3}{\operatorname{tg}^3 \tfrac{1}{2} B} + \frac{n^3(r_b - r)^3}{\operatorname{tg}^3 \tfrac{1}{2} C} + \frac{3p(r_a - r)(r_b - r)(r_c - r)kmn}{r}.$$

5°. Pentru triunghiul în care $na = b + c$, D-l I. ŞERBĂNESCU mai dă următoarele relaţii:

$$(\alpha) \quad \operatorname{cotg}^3 \tfrac{1}{2} B + \operatorname{cotg}^3 \tfrac{1}{2} C + 6(n-1) \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2} A \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2} B \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2} C = 8(n-1)^3 \operatorname{cotg}^3 \tfrac{1}{2} A.$$

$$(\beta) \qquad n^3/h_a^3 = 1/h_b^3 + 1/h_c^3 + 3n/h_a h_b h_c.$$

6°. Pentru cazul problemei 2933, când $2a = b + c$, D-nii: CORNELIU IONESCU, V. GHIŢESCU, E. OPRIŞAN, A. POPEANU şi I. RIZESCU, arată că avem şi relaţia:

$$8/h_a^3 = 1/h_b^3 + 1/h_c^3 + 6/h_a h_b h_c.$$

7°. Soluţiuni bune au trimes, în ultimul timp şi D-nii: ADAM MIRCEA (cu o generalizare), IONESCU-BREZUICA, I. LĂZĂRESCU şi M. RĂDULESCU.

GRIGORE ZAPAN.

PROBLEMA 2939. *Să se demonstreze că numai în triunghiul isoscel perpendicularele pe laturile triunghiului, în punctele unde acestea sunt întâlnite de bisectoarele interioare, sunt concurente.*

LOCOT. COL. GH. BUICLIU.

Soluţie dată de D-nii: C. I. GEORGESCU (Lc. Mihai Viteazul); W. SOLOMON (Lc. Matei Basarab, Bucureşti); D. HRISANIDE (Lc. din Constanţa); A. ŞCODRANO (Lc. Durostor, Silistra); I. STOE-

NESCU (Lc. Cantemir, București); T. POPOVICIU (Lc. Moise Nicoară, Arad); I. B. FLORESCU și D. SCHILERU (Lc. Carol I, Craiova).

Condițiunea, ca perpendicularele ridicate în punctele A', B', C' pe laturile BC, CA, AB ale unui triunghiu să fie concurente, este:

$$(1) \quad \overline{AB'}^2 + \overline{BC'}^2 + \overline{CA'}^2 - \overline{AC'}^2 - \overline{BA'}^2 - \overline{CB'}^2 = 0.$$

In adevăr pentruca cele 3 perpendiculare să fie concurente într'un punct I, atunci trebuie să avem neapărat relațiunile:

$$\overline{IA}^2 = \overline{AB'}^2 + \overline{IB'}^2 = \overline{AC'}^2 + \overline{IC'}^2$$
$$\overline{IB}^2 = \overline{BC'}^2 + \overline{IC'}^2 = \overline{BA'}^2 + \overline{IA'}^2$$
$$\overline{IC}^2 = \overline{CA'}^2 + \overline{IA'}^2 = \overline{CB'}^2 + \overline{IB'}^2.$$

Adunând ultimii doi membri ai acestor relațiuni, dăm peste (1). Când A', B', C' sunt picioarele bisectoarelor interioare ale triunghiului ABC, atunci:

$$AB' = bc/(a+c),\ BC' = ac/(a+b),\ CA' = ab/(b+c),\ AC' = bc/(a+b),$$
$$BA' = ac/(b+c),\ CB' = ab/(a+c).$$

Inlocuind în (1) și făcând calculele se găsește că „perpendicularele pe laturile unui triunghiu, în punctele unde acestea sunt întâlnite de bisectoarele interioare, sunt concurente", când între laturi avem relațiunea:

$$(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)^2 = 0,$$

deci când cel puțin 2 laturi sunt egale între ele.

Observațiuni. 1°. D-l E. OPRIȘANU (Lc. Bârlad) a dat o bună soluție analitică.

2°. O bună soluție diferită de precedenta a trimis d-l C. RĂUȚ (Lc. Mânăstirea Dealului).

3°. D-l W. SOLOMON și T. POPOVICIU sunt singurii care au demonstrat condițiunea (1). In celelalte soluțiuni această condițiune era citată ca ceva cunoscut. O parte din rezolvitori s-au sprijinit pe problema 254, *numai enunțată*, la pagina 395 în *Rouché et de Comberousse* ediția 7-a. Aceasta este o dublă eroare, întâi pentru că problema 254 citată, trebuie rezolvată înainte de a fi utilizată și al doilea pentru că ea este reciproca propoziționei care servește la rezolvarea problemei 2939.

4°. O propozițione analoagă se poate enunța pentru bisectoarele exterioare.

PROBLEMA 2951. *Să se găsiască numerele întregi* α *şi* β, *care să satisfacă relaţia*.

$$5^{\alpha} = 2^{\beta} + 1.$$

T. MAREŞ.

Soluţie dată de D-l TIBERIU POPOVICIU (elev cl. VII reală, lic. „Moise Nicoară" Arad). Dacă α şi β sunt pozitivi, relaţia dată se poate scrie: $5^{\alpha} - 1 = 2^{\beta}$.

1) α este par , $\alpha = 2m$.

In acest caz, $5^{2m} - 1 = 25^{m} - 1 = \mathcal{M}3$, ceeace nu se poate.

2) α este impar , $\alpha = 2m + 1$.

Atunci avem: $2^{\beta} = (5-1)(5^{\alpha-1} + 5^{\alpha-2} + \ldots\ldots + 5 + 1)$

$\therefore \quad 2^{\beta-2} = 5^{\alpha-1} + 5^{\alpha-2} + \ldots\ldots 5 + 1 = \mathcal{M}2 + \alpha.$

Cum însă α este impar, relaţia de mai sus nu este satisfăcută decât pentru:

$$\begin{cases} \beta - 2 = 0 \\ \alpha = 1 \end{cases} \quad \text{sau} \quad \begin{cases} \beta = 2 \\ \alpha = 1 \end{cases}$$

care constitue o soluţie a problemei.

Dacă α şi β sunt negative, sau una pozitivă şi alta negativă, problema nu este posibilă, căci în aceste cazuri ar rezultă din relaţia dată că o cantitate subunitară să fie egală cu alta supraunitară, ceeace nu e posibil.

Soluţiuni analoage, fără a examină ipoteza α şi β negative, au fost date şi de D-nii: I. B. FLORESCU (elev cl. VIII particulară), CONST. I. GEORGESCU (elev cl. VIII Lic. Mihai Viteazul), W. SOLOMON şi ALEX. TAUBER (elevi cl. VII Lic. „Laurian" Botoşani).

Soluţie dată de D-l N. GEORGESCU-ROEGEN (elev cl. VII Lic. M-rea Dealu).

Dacă $\beta \geqslant 3$, atunci din relaţia dată avem:

$$5^{\alpha} = \mathcal{M}2^{3} + 1 = \mathcal{M}8 + 1.$$

Cum însă $5^{2} = \mathcal{M}8 + 1$ şi $5^{1} \neq \mathcal{M}8 + 1$,

rezultă că va trebui să avem $\alpha = \mathcal{M}2$, astfel că relaţia dată devine:

$$2^{\beta} = 5^{2m} - 1 = 25^{m} - 1.$$

Insă $25^m - 1 = \mathscr{M}3$, pe când 2^β nu cuprinde factorul 3; urmează deci că nu putem avea $\beta \geqslant 3$, rămânând de examinat numai valorile $\beta = 1$ sau $\beta = 2$, cu $\alpha = 2$ şi $\alpha = 1$, care dau soluţia problemei.

Toate celelalte soluţiuni primite sunt, fie puţin riguroase, fie greşite.

PROBLEMA 2979. *Să se găsiască numerele* A *de trei cifre, ştiind că diferenţa dintre* A *şi suma cifrelor sale, este un patrat perfect.*

A. TAUBER.

Soluţie dată de D-şoara ELENA LĂZĂRESCU şi D-nii: A. ABLOV, ARON ABRAMOVICI, M. ADAM, I. S. ANTONIU, N. ARCADIAN, D. ATANASIU, M. B. BARBĂLATT, C. BĂRBULESCU, D. BLUMENFELD, N. BRĂTESCU, A. BUŞILĂ, I. CONSTANTINESCU, I. COŞEREANU, F. DOBRESCU-BĂBICI, TR. DORDEA, I. DRAGOMIR, M. FOCŞENEANU, C. E. GEORGESCU, C. I. GEORGESCU, FL. GEORGESCU, V. GHIŢESCU, EM. ILIESCU, CAROL IONESCU, I. IONIŢĂ, N. IOSIPESCU, J. T. LĂZĂRESCU, I. LAZAROVICI, G. MATEESCU, FR. MARCU, BOGDAN MARTINIAN, S. MEIROVICI, C. MEREUŢĂ, A. MICLESCU, C. MIHĂILESCU, FL. NEGRETZU, AL. PAMULA, A. G. PANAITESCU, A. I. PANAITESCU, M. PINCHIS, J. CR. POPOVICI, T. POPOVICIU, F. RABINOVICI, C. SCHÖNFELD, D. SCHILERU, Ş. SOLACOGLU, S. SOLACOLU, A. SOLOMON, W. SOLOMON, EM. ŞTEFĂNESCU, I. STOENESCU (Bucureşti), I. TEODORESCU, S. VASILACHE, V. C. VASILESCU, J. WEINSTEIN, L. WEISS.

Fie: $100\,a + 10\,b + c = A$, numărul căutat.

Conform enunţului avem:

$$100\,a + 10\,b + c - a - b - c = 9\,(11\,a + b) = n^2. \quad (1)$$

Se observă imediat că cifra c poate fi orice valoare dela zero la nouă.

De asemenea din relaţia (1) rezultă că $11\,a + b$ trebue să fie pătrat perfect şi cum cea mai mare valoare, ce poate avea expresiunea $11\,a + b$, este 108, atunci pătratele perfecte corespunzătoare sunt 4^2, 5^2, 6^2, 7^2, 8^2, 9^2, 10^2; adică $11\,a + b$ e egal cu numerele 16, 25, 36, 49, 64, 81 sau 100.

De oarece a şi b sunt numere întregi şi de o singură cifră, obţinem sistemele de valori:

$$a=1\ ,\ b=5\ ;\quad a=2\ ,\ b=3\ ;\quad a=3\ ,\ b=3\ ;\quad a=4\ ,\ b=5\ ;\quad a=5\ ,\ b=9\ ;\quad a=7\ ,\ b=4\ ;\quad a=9\ ,\ b=1\ .$$

Cum c poate fi orice cifră, rezultă următoarele 70 de numere ce corespund enunţului:

150, 151,.... 159; 230, 231,.... 239; 330,.... 339; 450,....459; 590,...599; 740,... 749; 910,....919.

Alte soluţii au dat D-nii: M. H. Brătescu, Şt. F. Lăzărescu, T. Solacolu, N. A. Stănescu şi M. Vasilescu.

Observaţii. Au rezolvat problema şi D-nii: Ov. Popea, V. Cazacincu, N. Solomon, N. Tailer, St. Măcrineanu, E. Ballan, S. Katz, Longin Ionescu, I. Sager, D. Bercovici, Em. Bercovici, Cr. Goilav, M. Vasiliu, M. G. Dumitrescu, M. M. Gogălniceanu, Ionescu-Brezuica, St. Georgescu-Gorjan, D. Măru, S. Weiss, Pincu Katz.

D-l I. S. Antoniu a studiat şi cazul când diferenţa din enunţ e puterea a patra a unei cifre.

D-l A. Şcodrano, a tratat cazul când $11a-b$ e pătrat perfect.

D-nii T. Popoviciu, B. Barbălatt, Fl. Georgescu şi D. Blumenfeld, au studiat cazul când diferenţa e un cub perfect.

D-nii D. Blumenfeld şi M. Adam au tratat cazul când A e de patru cifre.

D-nii D. Schileru, B. Barbălatt, M. Froim, Fl. Georgescu şi Ov. Popea au studiat problema când A are n cifre.

D-l Tr. Dordea a tratat şi problema pentru numerele de două cifre; iar pentru numerele de 4, 5,.... n cifre înlocueşte diferenţa din enunţ prin sumă.

D-l J. T. Lăzărescu, studiază cazul problemei pentru numerele de patru cifre şi adaugă că problema se poate estinde pentru numerele de 3, 4, 5... n cifre, astfel încât diferenţa din enunţ să fie n^3, sau n^4, n^5,.... n^n, n fiind întreg.

Maior G. I. L.

PROBLEMA 2982. *Fie* ABC *un triunghiu oarecare;* A', B', C' *mijloacele laturilor* BC, CA, AB; H *ortocentrul şi* ω *centrul cercului celor nouă puncte. Fie* A_1, B_1, C_1 *punctele de intersecţie ale perechilor de drepte* (Aω, HA'), (Bω, HB'), (Cω, HC').

Se cere să se demonstreze că triunghiurile ABC, $A_1B_1C_1$ *sunt homotetice; că au aceiaşi dreaptă a lui* Euler *şi să se determine raportul de homotetie.*

M. Grünbaum.

1. Soluție dată de D-nii: EMIL S. DRĂGĂNESCU (Huși) și B. M. BARBĂLATT (Elev cl. VI Liceul Codreanu, Bârlad).

Fie O centrul cercului circumscris triunghiului ABC și G centrul său de greutate. Se știe că punctele O, G, ω, H sunt coliniare (dreapta lui EULER) și că avem:

$$\overline{\omega O} = \overline{\omega H} = 3 . \overline{\omega G}.$$

Se știe apoi că triunghiurile ABC, HBC, HCA, HAB au același cerc al lui EULER*) așa că ω este centrul comun al cercului lui EULER al acestor patru triunghiuri. Cum A este ortocentrul triunghiului HBC, urmează că Aω este dreapta lui EULER a triunghiului HBC, iar HA' fiind mediană în acest triunghiu, rezultă că intersecția A_1 a acestor două drepte este centrul de greutate al triunghiului HBC.

Analog demonstrăm că B_1 și C_1 sunt centrele de greutate ale triunghiurilor HCA și HAB. Avem deci:

$$HA_1/HA' = HB_1/HB' = HC_1/HC' = 2/3.$$

Triunghiurile $A_1B_1C_1$ și A'B'C' sunt prin urmare homotetice, centrul de homotetie fiind H, iar raportul de homotetie 2:3. Dar triunghiurile ABC și A'B'C' sunt și ele homotetice, având ca centru de homotetie centrul lor de greutate comun G, iar ca raport de homotetie 2:1.

Se știe însă că dacă două figuri sunt homotetice cu o a treia, ele sunt homotetice între ele, iar cele trei centre de homotetie sunt în linie dreaptă**). Deci triunghiurile $A_1B_1C_1$ și ABC sunt homotetice, raportul lor de homotetie fiind $\frac{2}{3} : \frac{2}{1} = \frac{1}{3}$, iar centrul de homotetie fiind punctul care împarte segmentul GH în raportul 1/3, adică centrul ω al cercului lui EULER al triunghiului ABC.

Am demonstrat deci că centrul de homotetie ω al triunghiurilor $A_1B_1C_1$ și ABC se află pe dreapta lui EULER a triunghiului ABC. Se știe însă că în două sisteme homotetice, dacă o dreaptă care unește două puncte a primului sistem trece prin centrul de

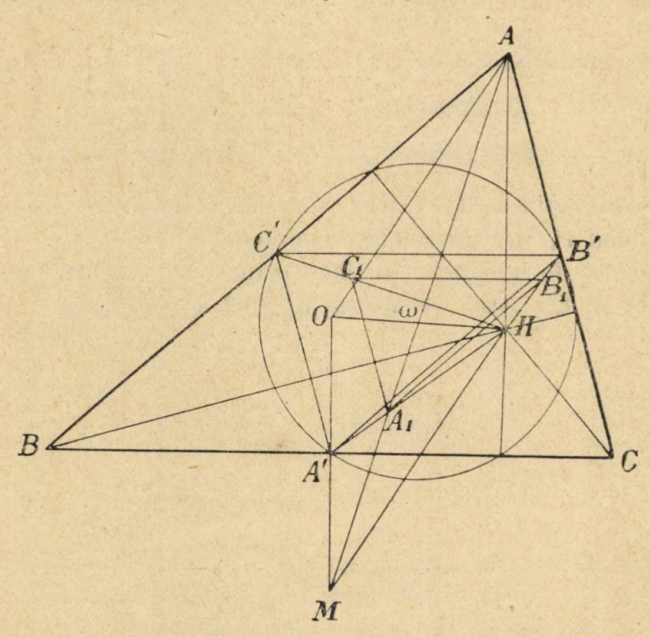
*) A se vedea: F. G. — M., *Exercices de Géométrie*, VI-e éd., Teorema lui W. HAMILTON, question 292 (k), p. 144 și question 725, p. 306.

**) ROUCHÉ et DE COMBEROUSSE, *Géométrie plane*, VI-e éd. § 363, p. 243, și § 365, p. 244.

homotetie, ea coincide cu omoloaga sa din celalt sistem *). Deci triunghiurile $A_1B_1C_1$ şi ABC au aceiaşi dreaptă a lui EULER.

2. Soluţie dată de D-nii: ION M. ŞERBĂNESCU (Elev cl. VIII, Liceul Mihai Viteazul), EUGEN I. BALAN (Elev particular, cl. VIII), ADRIAN A. BUŞILĂ (Elev cl. VII, Liceul Mihai Viteazul), TIBERIU POPOVICIU (Elev cl. VII, Liceul Moise Nicoară, Arad), MIHAIL I. FOCŞENEANU (Elev cl. VII, Liceul Mânăstirea Dealului), WILHELM I. SOLOMON (Elev cl. VI, Liceul Mateiu Basarab), PINCU KATZ (Elev cl. VIII, Liceul Comunităţei Israelite, Galaţi).

Fie M simetricul centrului O al cercului circumscris triunghiului ABC faţă de BC. Se ştie că $\overline{AH} = 2\,\overline{OA'}$; rezultă atunci că segmentele HA şi OM sunt egale şi cum ele sunt şi paralele figura HAOM este un paralelogram, iar centrul ω al cercului lui EULER al triunghiului ABC, este intersecţia diagonalelor HO şi AM.



In triunghiul HOM dreptele HA' şi Mω fiind mediane, avem $\omega A_1/\omega M = 1/3$ şi fiindcă $\omega M = \omega A$, avem $\omega A_1/\omega A = 1/3$.

Analog găsim că $\omega B_1/\omega B = \omega C_1/\omega C = 1/3$. Aşa dar ω este

*) *Ibidem*, § 357, p. 241.

centrul de homotetie al triunghiurilor $A_1 B_1 C_1$ şi ABC, iar raportul de omotetie este 1/3.

Cum centrul de homotetie ω este situat pe dreapta lui EULER OH, triunghiurile $A_1 B_1 C_1$, ABC au aceiaşi dreaptă a lui EULER.

3. Soluţie şi *generalizare* dată de D-nul CONSTANTIN I. GEORGESCU (Elev cl. VIII, Liceul Mihai Viteazul).

Fie P un punct al dreptei lui EULER OH aşà ca:

$$PH/PO = m/n.$$

Dreapta AP taie pe HA' în A_1 şi pe OA' în N.

Triunghiurile asemenea PHA, PON ne dau:

$$\frac{HA}{ON} = \frac{HP}{PO} = \frac{m}{n}, \quad \therefore \quad \frac{AA_1}{NA_1} = \frac{HA}{NA'} = \frac{2m}{2n-m}$$

$$\therefore \quad AA_1/AN = 2m/(m+2n) \qquad (1)$$

Dar $AP/PN = m:n$, $\therefore$ $AN/AP = (m+n)/m$. (2)

Din (1) şi (2) deducem:

$$AA_1/AP = 2(m+n)/(m+2n), \quad \therefore \quad PA_1/PA = m/(m+2n).$$

Triunghiurile $A_1 B_1 C_1$, ABC sunt deci homotetice, centrul de homotetie fiind P, iar raportul de homotetie $m:(m+2n)$.

Centrul de homotetie P fiind situat pe dreapta OH, triunghiurile $A_1 B_1 C_1$, ABC au aceiaşi dreaptă a lui EULER.

EXERCIŢII.

46. Se cer numerele de patru cifre care diferă cu un cub de suma cifrelor lor.

R. Pentru ca $(1000\,m^3 + 100\,s + 10\,z + u) - (m + s + z + u)$, sau $9\,(111\,m + 11\,s + z)$ să fie cub trebue ca

$$111\,m + 11\,s + z = 3\,n^3.$$

Pentru $m = 1$, $s = z = 0$ şi $m = z = s = 9$ avem limitele lui n^3, şi anume 37 şi 369. Deci $n = 4$, 5, 6 sau 7, care dau soluţiile $174u$, $339u$, $585u$, $928u$, în care $u = 0, 1, 2, \ldots 9$. Problema are 40 soluţii.

47. Să se afle patratul de patru cifre, aşà că numărul format de primele lui două cifre să fie de patru ori prima cifră a rădăcinii lui patrate,

iar numărul format de ultimele două cifre să fie egal cu de 5 ori ultima cifră a aceleiaşi rădăcini.

F. J. Marcu.

R. Avem:

$$1000\ m + 100\ s + 10\ z + u = (10\ p + q)^2.$$

$$10\ m + s = 4\ p\ ,\quad 10\ z + u = 5\ q.$$

Ultima arată că $n = 0$ sau $n = 5$. In primul caz şi $z = 0$, $q = 0$, în care caz prima relaţie devine $10\ m + s = p^2$; deci $p^2 = 4\ p$, $p = 4$ şi soluţia este **1600**. In al dollea caz $q = 5$, $z = 2$ şi din prima relaţie rămâne $10\ m + s = p\ (p + 1) = 4\ p$, deci $p = 3$. Soluţia este $35^2 = \mathbf{1225}$.

48. Să se arate că:

$$E = 9^{2n} - 10.9^n + 9 = 10.9.8.$$

A. Buşilă.

R. Expresia E se mai poate scrie:

$$E = 9\ (9^n - 1)\ (9^{n-1} - 1).$$

Fiecare din expresiile $(9^n - 1)$ $(9^{n-1} - 1)$ se divide cu 8; aceea care are puterea pară a lui 9 se divide şi cu 10.

49. Se consideră un triunghiu ABC inscris în cercul O. Perpendicularele din O pe AB şi AC taie cercul respectiv în C_1 şi B_1. Din O se duce o perpendiculară pe B_1C_1, care taie laturile AB şi AC în C' şi B'.

Să se arate că mijlocul dreptei B'C' cade totdeauna în interiorul cercului O.

O. Oränescu.

R. Observând că perpendiculara din O pe B_1C_1 este bisectoarea unghiului $B_1OC_1 = 180^0 - A$, se deduce că triunghiul AB'C' este isoscel. Dar tangenta la cercul O, în punctul unde B'C' taie cercul trecând dincolo de A, faţă de cerc şi unind A cu mijlocul lui B'C', se vede imediat că această din urmă dreaptă e coardă în cercul O, fiind perpendiculară pe B'C'.

50. In triunghiul ABC înscris în cercul O, se ia A_1, diametralul opus lui A şi se cere locul intersecţiei dreptelor AB şi CA_1, când A descrie cercul O.

Al. Brăileanu.

R. Triunghiul ACM fiind dreptunghiu, vom avea:

$$\sphericalangle CMA = 90^0 - A^0 = \text{const.}$$

deci A_1 descrie un cerc pe BC, capabil de unghiul de mai sus.

51. Fie A_2 simetricul vârfului A al unui triunghiu ABC în raport cu mijlocul A' al laturei BC; B_1, C_1 proiecţiile lui A_2 pe isoclinele BB_2, CC_2 faţă de celelalte două laturi; A_1 proiecţia lui A_2 pe latura BC. Punctele A_1, B_1, C_1 sunt colineare.

CONSTANTIN I. GEORGESCU.

R. Dacă M este intersecţia celor două isocline, se observă că patrulaterul $CMBA_2$ este inscriptibil. Punctele A_1, B_1, C_1 se găsesc pe dreapta lui SIMSON a punctului A_2 în raport cu triunghiul MBC.

52. Se consideră trapezul ABCD înscris într'un cerc cu raza dată. (AB, CD sunt laturile paralele). Din B şi C se scoboară perpendicularele BM, CN pe diagonalele AC, BD. Presupunând latura BC constantă, se cere locul punctului de intersecţie P al perpendicularelor BM şi CN, când celelalte elemente ale trapezului variază.

EUGEN I. BALAN.

R. Trapezul este isoscel. Unghiul BEC este constant. Deci şi suplimentul său MPN e constant. Locul punctului P este deci un segment de cerc, descris pe BC, capabil de suplimentul unghiului diagonalelor.

53. Să se afle pentru $n = \infty$ limita expresiunii:

$$y = \left(1 + \operatorname{tg} \frac{x}{2^n}\right)^{2^n}$$

A. POPEANU.

R. Putem scrie:

$$y = \left[\left(1 + \operatorname{tg} \frac{x}{2^n}\right)^{\operatorname{tg} \frac{x}{2^n}}\right]^{\frac{1}{\operatorname{tg} \frac{x}{2^n}} \cdot \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2^n}}{\frac{x}{2^n}}}$$

de unde

$$\lim_{n \to \infty} y = e^x .$$

54. Să se demonstreze identitatea:

$$[\Sigma (\cot A - \cot B)^2]^2 = 2 \Sigma (\cot A - \cot B)^4 .$$

I. DRAGOMIR.

R. Avem în vedere identitatea:

$$[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2]^2 = 2[(a-b)^4 + (b-c)^4 + (c-a)^4]$$

PROBLEME PROPUSE.

3041. Să se arate că expresiunea:

$$(n+1)^{(n-1)(n+2)} - n(n+1)^{n^2-2} - (n+1)^{n^2-3} - (n+1)^{n-1} + 1] \times (n+1)^{n+3} - n(n^2+n+1),$$

se divide cu n^6, numărul n fiind întreg.

E. Ştefănescu.

3042. Însemnându-se simbolic:

$$a = \left(\frac{n}{3}\right)^n \text{ şi } b = \left(\frac{n}{2}\right)^n,$$

să se arate că pentru $n > 5$ avem:

$$\left(\frac{a}{3}\right)^a < n!! < \left(\frac{b}{2}\right)^b.$$

Căp. I. Linteş.

3043. Să se construiască un triunghiu ABC, cunoscând distanţa dintre centrul O al cercului circumscris triunghiului şi ortocentrul H, raza R a cercului circumscris şi unul din unghiurile triunghiului. Discuţie.

D. Măru.

3044. Se dă un triunghiu automedian ABC ($2a^2 = b^2 + c^2$) şi fie K, D, D_1, D_2, D_3 respectiv punctul lui Lemoine, reciprocul său şi permutantele inverse ale lui D. Fie R punctul lui Steiner al triunghiului şi R_i ($i = 1, 2, \ldots 5$) permutantele directe şi inverse ale lui R. Fie T_i ($i = 1, 2, \ldots 5$) inversele punctelor R_i. Să se demonstreze că dreptele CK, BK, AD_1, CD_3, BD_2 trec respectiv prin punctele R_i ($i = 1, 2, \ldots 5$).

B. M. Barbălatt.

3045. Fie α, β, γ proiecţiile pe laturile BC, CA, AB ale centrului ω al cercului celor nouă puncte al triunghiului ABC. Să se determine relaţiile dintre elementele triunghiurilor ABC şi $\alpha\beta\gamma$. Să se construiască triunghiul ABC când se cunoaşte triunghiul $\alpha\beta\gamma$.

A. Clujanu.

3046. Se consideră un triunghiu ABC şi cercul său circumscris O. Dreapta AO taie a doua oară cercul în A'. Fie A_1 piciorul perpendicularei dusă din A' pe BC şi fie B_1 şi C_1 punctele analoage. Dreapta AA_1 taie dreapta B_1C_1 în D. Din D se duce o paralelă la AC, până taie pe CC_1 în M. Pe CC_1 se ia $C_1N=CM$ şi din N se duce o paralelă la AB, care taie pe BC în L. Se cere să se arate că:

1) Dreptele AA_1, BB_1, CC_1 sunt concurente;

2) AL este simediană în triunghiul ABC;

3) Când A_1A este bisectoarea unghiului $C_1A_1B_1$?

OCTAV ORĂNESCU.

3047. Să se rezolve sistemul:

$$\frac{x(y+z)}{x+y+z}=a,\quad \frac{y(z+x)}{x+y+z}=b,\quad \frac{z(x+y)}{x+y+z}=c.$$

E. ABASOHN.

3048. Să se calculeze suma:

$$\sum_{n=1}^{n} a^{n-1}\cos nx$$

şi să se afle limita pentru $n=\infty$, presupunând $|a|<1$.

C. I. GEORGESCU.

3049. Să se demonstreze relaţiunea:

$$(b+c)\,d_a+(c+a)\,d_b+(a+b)\,d_c=16R^2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

în care a, b, c, R, A, B, C sunt laturile, raza cercului circumscris şi unghiurile unui triunghiu, iar d_a, d_b, d_c segmentele din înălţimi, cuprinse între ortocentrul şi vârfurile triunghiului.

I. COŞEREANU.

3050. Pe o foaie de hârtie se desemnează un triunghiu ABC. Se îndoaie hârtia în toate modurile posibile aşa ca A să vină pe BC. Care este înfăşurata liniei de îndoitură?

I. IONESCU.

Dela apariția ultimului număr s'au primit spre publicare: articole (A), note (N), cereri (C), exerciții (E), probleme propuse (P), recreațiuni (R) și probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela D-nii:

Adam M. (2683, 728, 891, 3022, 29, E. N.); *Amărascu G.* (2972, 80); *Arcadian N.* (2429, 3011, 29); *Balan E.* (2856, 91, 95, 99, 906, 22, 71, 89, 3011, 12, 15, 22, 29); *Barbălatt M. B.* (2553, 75, 85, 98, 3011, 29, P.); *Bârsu T. Ion* (P.); *Bârglăzan N. Aurel* (3029); *Bercovici E.* (3021, 22, 29, 39, E.); *Blaha N.* (A.); *Blumenfeld D.* (3022, 29, E.); *Bocancea K.* (E.); *Bogdan Mart.* (2980, 3022, 29, E.); *Brătescu N.* (2972, 78); *Bușilă A.* (2340, 3036, 37); *Constantinescu I.* (2861, 974, 3029); *Coșereanu I.* (2999, 3002, 22, 26, 28, 36, 39, E. N. P. R.); *Dimitriu V.* (3027, 29); *Dobrescu-Băbici* (1948, 3022, 29, E.); *Drăgănescu E.* (3027); *Dragomir N. I.* (2933); *Dumitrescu G. M.* (3039); *Dumitrescu S. N.* (3022); *Florescu I.* (3034, N. P.); *Focșeneanu M.* (2994, 3018, 29, 37, P.); *Georgescu I. Const.* (2411, 2913, 22, 29, 39, 3011, 22, E. N. P. R.); *Georgescu Florian* (3029, E.); *Georgescu-Gorjan St.* (2887, 933); *Ghițescu Virgil* (2972, 74, 3015, 22, 28, 29); *Gorovei S.* (3022); *Guțu I. Al.* (3027, A.); *Huber I.* (P.); *Iliescu Dima* (3022); *Iliescu Em.* (2887, 974, 3022); *Iliescu P. Ioan* (3022, 29); *Ionescu-Brezuica I.* (2887, 972); *Ionescu Longin* (2938, 3015, 29, E.); *Jujescu G.* (E. N. P.); *Katz S.* (2674, 83); *Lăzăreanu G.* (3028); *Lăzărescu I.* (3015, 22, 39); *Lăzărescu Fl. St.* (3029, 39); *Măcrineanu St.* (3031, 39); *Marcus Froim* (2933); *Marin Ștefan* (3011, 29); *Mateescu G.* (3029, 39); *Mateescu I.* (2972); *Mereuță C.* (2972); *Mihăiescu D. Const.* (3028, 29, P.); *Mirescu A. P.* (2864); *Moisil Gr.* (2971, A. E.); *Nicolau H. C.* (P.); *Orănescu O.* (E. P.); *Panaitescu A.* (3022, R.); *Petreanu H.* (3015, 22, 28); *Pinchis M.* (2978); *Popa I. T.* (2887); *Popea G. O.* (2918, 72); *Popovici I.* (2972); *Popoviciu T.* (2585, 980, 3024, 26, 27, 29); *Rabinovici F.* (3022, 31); *Russu Ed.* (2971); *Samoilă D.* (3039, E.); *Sane S. Marcel* (3029, 39); *Schönfeld C.* (3029, 39, E.); *Școdrano Al.* (2918); *Șerbănescu I.* (2594, 3015, 29, 36, 39, P.); *Solomon D.* (2891); *Solomon W.* (2340, 887, 918, 78, 94, 3015, 22, 38, 39, N. R.); *Stavrat M.* (3015, 29, E.); *Ștefănescu E.* (2922, 80, 3015, 29, 39, E. P. R); *Stroescu G.* (3022); *Tauber Al.* 3039, N.); *Teodorescu St. I.* (2972, 3029); *Vasilescu M.* (2861); *Veber D.* (3028, 29); *Weiss L.* (2965, 77, 3029, 39); *Zaharia E.* (3015).

Problemele de geometrie rezolvate cât și cele de propus a căror soluție nu va fi însoțită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în considerațiune.

Soluțiunile primite în ultimul timp la problemele: 2035, 63, 91, 108, 17, 45, 87, 91, 278, 89, 95, 98, 383, 98, 411, 594, 600, 04, 10, 65, 82, 88, 705, 19, 73, 849, 74, 79, 95, 905, 06, 10, 13, 20, 29, 31, 32, 46, 55, 70, 83, 89, 90, 91, 92, 93, 3000, 04, 07, 10, 12, 17, 19 și 32 nu au fost încă examinate de redactorii cărora le-au fost repartizate.

Colecțiunea „GAZETEI MATEMATICE“

27 VOLUME

Colecțiunea întreagă . . . . . Lei 1000,—

Se vând și volume izolate, cu prețul de 50 lei, afară de volumele: I, X, XV, XIX, XX și XXI care se vând numai cu colecțiunea întreagă.

Biblioteca „GAZETEI MATEMATICE“

1. **I. Ionescu, G. Țițeica, A. G. Ioachimescu și V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Aritmetică, Geometrie, Algebră și Trigonometrie. (520 pag. cu 3381 probleme).* (Epuizată).

2. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de probleme de algebră* (teoria ecuațiilor), (82 pag. cu 462 probleme). (Epuizată).

3. **N. Abramescu,** *Curs de algebră superioară* pentru cl. VIII reală, *Ediția III revăzută și adăogită,* 1921. (Epuizată). Lei 30,—

4. **A. G. Ioachimescu și G. Țițeica,** *Culegere de probleme de mecanică și geometrie analitică* (222 pag. cu 825 probleme și o planșă) (Epuizată) . . . . . Lei 20,—

5. **Tr. Lalescu și Șt. N. Mirea,** *Culegere de probleme de geometrie descriptivă și cosmografie* . . . . . Lei 15,—

6. **Tr. Lalescu,** Tratat de Geometrie analitică,

Fascicola I (Epuizată) . . . . . Lei 10,—

Idem, Fascicola II Conice . . . . . Lei 20,—

Idem, Fascicola III Cuadrice . . . . . Lei 20,—

7. **Gh. Lazăr,** *Trigonometria drept liniară* (după cursul predat de Gh. Lazăr la colegiul Sf. Sava) . . . . . Lei 5,—

8. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de probleme de Algebră,* ediția II-a revăzută și adăogită, 400 pagini cuprinzând 1765 probleme . . . . . Lei 60,—

La aceste prețuri se vor adăogà taxele poștale pentru expediție.

Biblioteca Technică a „GAZETEI MATEMATICE“

(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

I. Ionescu, *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcțiune și a principiilor de calcul.* Volum legat, cuprinzând 128 de pagini și 15 tabele numerice practice, pentru proiectarea construcțiunilor de beton armat. Lei 12,—

Gazeta Matematică apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 50 lei anual, se plătește înainte și începe la 15 Septemvrie, ori când s'ar face achitarea lui în cursul anului și nu se face pe termene mai scurte de un an. Abonamentele, schimbările de adrese, reclamațiunile și cererile pentru cărți din biblioteca «Gazetei Matematice», se vor trimete D-lui: **I. D. Teodor,** Inginer Inspector General, Directorul General al Regiei Monopolurilor Statului (adresa: Fabrica de Chibrituri, București).

Schimburile de reviste, uvrage pentru recenzii și orice alte cereri, afară de cele privitoare la cassierie și expediție, se vor trimite D-lui Inginer Inspector General I. IONESCU, Str. Căluşei 23, Bucureşti.

Onor. Asociaţiunea pentru Cultura şi literatura poporului Român
din
Sibiu

ZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

ANUL XXVIII.

NUMĂRUL 9. — MAI 1923

SUMARUL

1. Rezultatul concursului „Gazetei matematice“ *G. Ţiţeica.*
2. Generalizarea teoremei lui Fermat în cascadă *G. Zapan.*
3. Note Matematice: 60 — 67.
4. Chestiuni de Examen.
5. Bibliografie.
6. Cereri: 101.
7. Probleme Rezolvate: 1453, 2040, 2335, 2429, 2594, 2705, 2712, 2903, 3004.
8. Exerciţii: 55 — 65.
9. Probleme propuse: 3051 — 3060.

ABONAMENTUL 50 LEI PE AN.

BUCUREŞTI
IMPRIMERIA FABRICILOR DE CHIBRITURI ŞI TIMBRE - FILARET
1923

SPRE ŞTIINŢA

Gazeta Matematică se publică de către **Societatea „Gazeta Matematică“** având sediul în Bucureşti, compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie de 3 membri, care pentru anul XXVIII se compune din D-nii **N. I. Georgescu,** Inginer-Şef, Director General al Serviciului Imbunătăţirilor Funciare, **Tr. Lalescu,** Doctor în Matematici, Profesor Universitar şi **I. D. Teodor,** Cassier, Inginer Inspector General, Profesor la Şcoala Politechnică, Directorul General al Regiei Monopolurilor Statului.

Manuscrisele destinate „Gazetei Matematice“ se vor trimite D-lui GEORGE BORNEANU, Inginer, sub-directorul Fabricilor de chibrituri şi timbre, Bucureşti.

Se pot trimite şi pe acelaş nume în Str. Sf. Constantin 31, Bucureşti.

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse şi exerciţiile se vor redija în conformitate cu instrucţiunile se se pot procură dela D-l Cassier *I. D. Teodor,* în schimbul sumei de 1 (un) leu ce se poate trimite prin poştă.

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evită confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare : numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie.

In vederea sporirii taxelor poştale, corespondenţii pot trimete de aci inainte manuscrisele scrise pe ambele pagini ale unei foi, fără a lăsă spaţii albe pe margini sau dedesubt, tăind foile în consecinţă.

Nu se admite însă a se tratà pe aceeaşi foaie mai multe chestiuni sau probleme.

Articolele, notele, problemele propuse, exerciţiile, recreaţiile ce se trimit pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICĂ“, trebue să fie originale, iar nu luate din cărţi sau reviste speciale de matematici.

Probleme nerezolvate : 171, 485, 581, 691, 886, 87, 914, 44, 1000, 08, 56, 58, 83, 92, 146, 62, 78, 80 214, 36, 70, 71, 87, 97, 99, 355, 64, 67, 77, 79, 84, 86, 98, 99, 412, 50, 82, 90, 553, 84, 87, 626, 37, 50, 76, 79, 80, 711, 29, 33, 35, 53, 64, 90, 835, 76, 82, 84, 905, 06, 14, 29, 44, 45, 49, 59, 73, 79, 87, 2003, 04, 16, 17, 32, 70, 74, 94, 111, 12, 26, 56, 70, 216, 300, 47, 53, 91, 92, 95, 408, 14, 20, 22, 28, 34, 39, 40, 43, 44, 48, 53, 56, 59, 61, 62, 66, 69, 71, 73, 77, 79, 81, 84, 87, 91, 97, 500, 01, 02, 03, 10, 11, 12, 24, 29, 32, 37, 39, 43, 44, 45, 46, 55, 56, 60, 69, 71, 77, 78, 80, 82, 87, 91, 93, 96, 97, 99, 602, 07, 08, 10, 13, 23, 35, 38, 41, 43, 44, 45, 47, 50, 55, 56, 58, 60, 65, 69, 71, 75, 84, 86, 92, 93, 94, 95, 96, 709, 12, 13, 17, 27, 35, 38, 43, 45, 47, 58, 64, 69, 78, 80, 89, 96, 809, 14, 16, 29, 51, 53, 57, 60, 65, 86, 88, 89, 98, 902, 09, 12, 15, 16, 26, 32, 36, 45, 53, 56, 59, 61, 83, 95, 3000, 05, 08, 10, 13, 19, 20, 25, 33, 40, 42, 45, 46, 47.

La redacţia revistei **„Gazeta Matematică“** *se primesc abonamente pentru* **„Revista de matematicas y fisicas elementales“** *din Buenos-Aires, Anul V (Mai 1923 — Aprilie 1924). Costul unui abonament anual este de 70 lei.*

Avem plăcerea a anunţà că dela 26 martie a. c. face parte din Societatea noastră şi D-l **Inginer Gr. Vasilescu.**

REZULTATUL
CONCURSULUI „GAZETEI MATEMATICE".

In mijlocul greutăţilor care apasă astăzi asupra tutulor, concursul *Gazetei Matematice* a fost, pentru cei cari l-au urmărit, o rază de speranţă în zile mai bune. Cu adevărată mulţumire, am constatat pregătirea temeinică a candidaţilor prezintaţi, precum şi dragostea cu care au venit toţi cei 25 de candidaţi, admişi să ia parte la concurs, ne lipsind niciunul şi luând parte toţi la toate probele, scrise şi orale, pânăla capăt.

Bucuria noastră a fost anul acesta şi mai mare, fiindcă pentru întâia oară, un frate de peste munţi, pregătit într'un liceu de peste munţi, s'a prezintat la concursul *Gazetei* şi s'a înfăţişat strălucit. Inceputul e fericit, dar nu ne mulţumim numai cu atât. Sunt atâtea licee bune, cu profesori destoinici, în Banat, în Ardeal, în Bucovina şi în Basarabia. Dorim ca la concursul din anul viitor să avem măcar câte unul din fiecare regiune. Corespondenţii noştri să dea sfoară în ţară şi să aducă la îndeplinire această dorinţă.

Atât din partea *Gazetei*, cât şi din partea candidaţilor, se cuvine să aducem mulţumiri recunoscătoare tutulor celor cari au dat sprijin pentru ţinerea concursului şi au uşurat greutăţile de transport, de găzduire şi de hrană, şi anume, D-lor: Inginer Inspector general G. Popescu, Secretarul general al Ministerului de Comunicaţii, D. Bungetzianu, profesor universitar, I. D. Teodor, Director General al R. M. S., G. Thierrin, G. Borneanu, Directorul Fabricii de Chibrituri şi G. Iliescu, inginer.

Probele concursului au fost urmărite de foarte mulţi membri ai Societăţii „Gazeta Matematică", dintre cari unii şi-au dat osteneala să pregătească chestiunile lucrărilor scrise, să examineze la oral, sau să supravegheze lucrările. Toţi a făcut-o cu plăcere şi cu interes pentru scopul înalt al concursului.

Candidaţii au ieşit, în general, foarte bine şi de aceea ne-am luat dreptul să fim mai severi. Aşà încât, cei pe cari îi înscriem în lista de mai la vale au, fără îndoială, valoare reală şi ca pregătire şi ca mod de înfăţişare limpede şi precisă a chestiunilor pe care le ştiu.

1. In rândul întâi, a ieşit şi prin probele scrise şi prin răs-

punsurile orale (mai ales cele de Geometrie Analitică) sigure şi precise, care au dovedit cunoaştere largă a materiei, stăpânire sigură a calculului şi maturitate de judecată matematică, D-l N. GEORGESCU-ROEGEN, elev în clasa VII la liceul militar dela *Mânăstirea Dealului* şi pregătit în particular pentru clasa VIII, la care s'a înscris la concurs. De altfel, acest candidat apăruse bine în evidenţă chiar de anul trecut.

2. In rândul al doilea vine D-l TIBERIU POPOVICIU, elev în clasa VII la liceul din *Arad*. Chiar fără să cunoască lucrările scrise, cei cari au asistat la probele orale, mai ales cea de Algebră, ale acestui candidat, şi-au dat seama imediat, din răspunsurile sigure şi cu judecată, că avem în faţă un element de frunte. Lucrările scrise au fost şi ele — mai ales cea de Algebră — la aceeaşi înălţime.

3. Vine la rând D-l I. ANTONIU, elev în clasa VII la *Mânăstirea Dealului*, cu o probă scrisă foarte bună, din toate punctele de vedere, de Mecanică, una foarte bună de Algebră şi cu răspunsuri bune la oral.

4. D-l EMIL ŞTEFĂNESCU, elev în clasa VII la liceul *Spiru Haret* din Capitală, şi-a păstrat locul de anul trecut; e capabil să se ridice mai sus, dar pierde la oral ce a câştigat la lucrările scrise.

5. D-l FLOREA NEGRETZU, elev în clasa VII la liceul *I. C. Brătianu* din Piteşti, e un candidat care promite; atât lucrările scrise, cât şi unele răspunsuri orale au fost mai mult decât bune.

6. In locul al şaselea, am clasificat pe D-l I. AL. STOENESCU, elev în clasa VII la liceul *Cantemir* din Capitală, cu lucrări scrise bune de Mecanică şi de Algebră şi cu răspunsuri orale potrivite.

7. D-l GR. C. MOISIL, elev în clasa VIII la liceul *Spiru Haret*, a trecut probele de Geometrie Analitică foarte bine, dar lucrarea scrisă de Algebră şi întru câtvà şi oralul la această materie i-au coborît clasificarea. Ştim că poate mai mult.

8. D-l A. POPEANU, elev în clasa VIII la liceul *Mircea-Cel-Bătrân* din Constanţa, a trecut probe bune scrise şi orale.

9. D-l B. BARBĂLATT, elev în clasa VI la liceul *Codreanu* din Bârlad, n'a ţinut anul acesta ceeace a promis anul trecut. Proba scrisă de Algebră a fost slabă, cea de Geometrie mai bună. La oral, se văd calităţi, dar şi oarecare lipsuri.

10. D-l W. SOLOMON, elev în clasa VI la liceul *Matei Basarab* din Capitală, a ieşit în general bine.

La această listă destul de lungă mai adăogăm încă două menţiuni. Menţionăm întâi pe D-l M. GRÜNBAUM, elev în clasa VII la liceul *Codreanu* din Bârlad, pentru lucrarea sa foarte bună de Algebră şi pe D-l EDGAR RUSU, elev în clasa VII la liceul *Internat* din Iaşi, pentru lucrarea deosebit de bună la Mecanică.

Ne dăm foarte bine seama că unii din candidaţi, chiar dintre cei cari nu figurează în această listă, puteau ieşi mai bine şi că numai întâmplarea a făcut să apară mai slabi decât erau. In orice caz, pentru cei cari au făcut lucrări scrise bune şi au dat răspunsuri sigure, n'a fost curată întâmplare, ci pregătire serioasă şi însuşiri alese.

Le dorim tuturor candidaţilor ce se vor prezintă anul viitor pregătire şi mai serioasă, însuşiri şi mai alese.

G. ŢIŢEICA.
Delegat pentru rapoarte.

GENERALIZAREA TEOREMEI LUI FERMAT IN CASCADA.

Definiţii. Notând cu x_1 numărul întregilor primi cu x_0 şi mai mici decât el, cu x_2 numărul întregilor primi cu x_1 şi mai mici decât el, etc., suntem conduşi astfel a defini, în genere, numărul x_n, pe care îl vom numì: *indicatorul de-al n-lea ordin al lui* x_0. Pentru cazul particular: $x_n = 1$, n ia denumirea de: *ordin maxim al indicatorilor numărului* x_0.

In cele ce urmează, voiu stabilì o teoremă, care constituie generalizarea *„în cascadă“* a teoremei lui FERMAT şi pe care o vom denumì:

Teorema cascadelor. Dacă $a_0, a_1, \ldots a_{n-1}, k,$ sunt numere întregi oarecare, x_n însemnând indicatorul de ordinul n al numărului x_0, avem relaţiunea:

$$a_0^{a_1^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{a_{n-1}^{kx_n}}}}}} \equiv a_0^{a_1^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{a_{n-1}}}}}} \pmod{x_0},$$

cu condiția ca numerele x_i și a_i să fie respectiv prime între ele.

In adevăr, după teorema lui FERMAT generalizată de EULER, avem :

$$a_{n-1}^{kx_n} \equiv \left(a_{n-1}^{x_n}\right)^k \equiv 1. \qquad (\text{mod. } x_{n-1})$$

Deci putem scrie :

$$a_{n-1}^{kx_n} = cx_{n-1} + 1.$$

Așà încât avem succesiv :

$$a_{n-2}^{a_{n-1}^{kx_n}} \equiv a_{n-2}^{cx_{n-1}+1} \equiv a_{n-2}^{cx_{n-1}} \cdot a_{n-2} \equiv a_{n-2}. \qquad (\text{mod. } x_{n-2})$$

$$a_{n-3}^{a_{n-2}^{a_{n-1}^{kx_n}}} \equiv a_{n-3}^{cx_{n-2}+a_{n-2}} \equiv a_{n-3}^{cx_{n-2}} \cdot a_{n-3}^{a_{n-2}} \equiv a_{n-3}^{a_{n-2}} \qquad (\text{mod. } x_{n-3})$$

. . . . . .

$$a_0^{a_1^{a_2^{\cdot^{\cdot^{a_{n-2}^{a_{n-1}^{kx_n}}}}}}} \equiv a_0^{cx_1+a_1} \equiv a_0^{cx_1} \cdot a_0^{a_1} \equiv a_0^{a_1} \cdot \qquad (\text{mod. } x_0)$$

c. c. t. d.

Observare. In enunțul teoremei, pentru simplificare, am impus condițiunea ca numerele x_i și a_i să fie respectiv prime între ele. Din demonstrația dată mai sus, reese însă că este suficientă condițiunea ca numerele x_i să nu aibă factori primi comuni la puteri superioare, respectiv cu ai numerelor :

$$a_i^{a_{i+1}^{\cdot^{\cdot^{a_{n-2}}}}}, \qquad (i = 1, 2, \ldots\ n-2)$$

iar numerele a_{n-1} și x_{n-1} să fie prime între ele.

In adevăr, pentru cazul când x_i este prim cu a_i , avem :

$$a_i^{a_{i+1}^{\cdot^{\cdot^{a_{n-2}}}}} \equiv a_i^{a_{i+1}} \cdot \qquad (\text{mod. } x_i)$$

Dar dacă x_i nu este prim cu a_i , putem pune :

$$x_i = p.d,$$

în care p să cuprindă toți factorii lui x_i primi cu a_i, iar d toți factorii comuni cu ai numărului a_i. Relațiunea de mai sus are loc pentru x_i, când are loc pe rând pentru p și d, căci p și d sunt numere prime între ele.

Pentru p, relațiunea are loc în virtutea teoremei de mai sus; iar dacă impunem condiția:

$$a_i^{a_{i+1}^{\cdot^{\cdot^{a_{n-2}}}}} \equiv 0, \pmod{d}$$

atunci relațiunea de mai sus are loc în genere pentru x_t, când acest număr nu are factori primi comuni la puteri superioare respectiv cu ai numărului:

$$a_i^{a_{i+1}^{\cdot^{\cdot^{a_{n-2}}}}} \qquad (i = 1, 2, \ldots n-2)$$

c. c. t. d.

Consecințe. 1°. Dacă $a_0, a_1, \ldots a_{n-1}, k$, sunt numere întregi oarecare, x_n însemnând indicatorul de ordinul n al numărului x_0, avem relațiunea:

$$a_0^{a_1^{\cdot^{\cdot^{a_{n-1}^{kx_n}-1}}-1}-1} \equiv 0, \pmod{x_0}$$

cu condiția ca numerele x_i și a_i să fie respectiv prime între ele.

Această identitate se demonstrează pornind dela formula teoremei de mai sus.

2°. Dacă n este ordinul maxim al indicatorilor numărului x_0 și $p \geqslant n$, avem relațiunea:

$$a_0^{a_1^{\cdot^{\cdot^{a_{n-2}}}}} \equiv a_0^{a_1^{\cdot^{\cdot^{a_p}}}}, \pmod{x_0}$$

cu condiția ca numerele x_i să fie respectiv prime cu a_i $(i = 1, 2, \ldots n-1)$.

In adevăr, n fiind ordinul maxim al indicatorilor numărului x_0, rezultă că: $x_n = 1$

și formula de mai sus apare ca o consecință a teoremei „cascadelor".

Aplicații. 1°. Să facem: $n = 2$. Teorema stabilită în articolul de față ne dă:

$$a_0 \overset{a_1^{kx_2}}{\equiv} a_0. \qquad (\text{mod. } x_0)$$

Și să punem încă: $x_2 = 2$, adică: $x_0 = 5, 7, 8, 9, 10, 14$, sau 18. Rezultă că:

$$(1) \qquad a_0 \overset{a_1^{2k}}{\equiv} a_0. \qquad (\text{mod. } x_0)$$

Ridicând această identitate la puterea a_1, găsim:

$$(2) \qquad a_0 \overset{a_1^{2k+1}}{\equiv} a_0^{a_1} \qquad (\text{mod. } x_0)$$

Relațiile (1) și (2) ne arată că restul diviziunei expresiunei:

$$E = a_0^{a_1^n}.$$

prin x_0, ($x_0 = 5, 7, 8, 9, 10, 14$ sau 18) este respectiv: a_0 sau $a_0^{a_1}$, după cum n este un număr par sau impar.

Această aplicațiune a teoremei „cascadelor", generalizează și rezolvă problemele 2819 și 2935, pentru ca să nu citâm decât pe cele mai recente, publicate în „*Gazeta Matematică*".

Problema 2819. Să se găsiască restul împărțirei expresiunei:

$$E = 5^{5^n}$$

prin 7, n fiind un număr întreg și pozitiv.

Facem:

$$a_0 = a_1 = 5 \quad , \quad x_0 = 7$$

și formulele (1) și (2) ne arată că resturile sunt respectiv 5 și 3, după cum n este un număr par sau impar.

Problema 2935. Se cere condiția pentru ca expresiunea:

$$E = 3^{3^n} + 7^{7^n}$$

să se dividă cu 5.

Formulele (1) și (2) ne arată că pentru numărul:

$$3^{3^n}$$

resturile sunt 3 şi 2, după cum n este par sau impar; iar pentru numărul:

$$7^{7^{n}}$$

avem resturile: 2 şi 3, după cum n este par sau impar. Rezultă dar că m şi n trebuiesc să fie de aceiaşi paritate.

Teorema lui FERMAT sub această formă ne permite să rezolvim o serie de alte probleme analoage.

Exemplu. Să se demonstreze că:

$$11^{11^{n}} \equiv 11, \qquad \text{(mod. 2520)}$$

când n este un număr par.

Avem: $2520 = 5.7.8.9$.

Vom arătă că expresiunea considerată este verificată pe rând de fiecare din factorii: 5, 7, 8, 9.

In adevăr, de oarece numărul 2 este indicatorul de-al doilea ordin al tuturor numerelor: 5, 7, 8, 9, se aplică asupra expresiunei din problemă formula (1) stabilită mai sus.

2°. Dacă facem: $n = 3$, $x_3 = 1$, teorema cascadelor ne dă:

$$a_0^{a_1^{a_2^{k}}} \equiv a_0^{a_1}, \qquad \text{(mod. } x_0\text{)}$$

în care x_0 poate fi unul din numerele 5, 7, 8, 9, 10, 14, 18.

Exemplu:

$$3^{3^{n}} \equiv 27, \qquad \text{(mod. 280)}$$

căci: $280 = 5.7.8$.

Observare. Prezentul articol, sub un alt titlu, a fost scris în preajma războiului 1916, dar manuscrisul s'a pierdut. Apariţia problemelor 2819 şi 2935 in „*Gazeta Matematică*“ m'a făcut să mi-l reamintesc şi să-l mai scriu odată.

GH. ZAPAN.

NOTE MATEMATICE.

60. *Alte zece trigonometrii diverse.* (Vezi nota 79 pag. 130).

11. **Circulară.** *A. Gomez Ruiz.* — Traité de trigonométrie plane, circulaire et hyperbolique et de trigonométrie sphérique et sphéroïdale. Mem. Ac. de Madrid. 1911.

12. **Generală.** *T. M. de Tilly.* — In opera sa: *Essai sur les* principes de la géométrie et de la mécanique. Cap. IV. 1878.

13. **Iperbolică.** Vezi No. 11.

14. **Loxondromică.** *I. A. Grunert.* — Loxondromische Trigonometrie. Lipsca. 1849.

15. **Nouă.** *Borchardt &. Perrot.*—New Trigonometry. 1905.

16. **Procentuală.** *T. C. Fergusson.* — Fergusson's percentage trigonometry reduced to simple arithmetic. London 1914.

17. **Sferoidală.** Vezi No. 2.

18. **Superioară.** *F. W. Neumann.* — Higher trigonometry. London 1892.

19. **Tânără.** *W. G. Borchardt & A. D. Perrot.* — A junior trigonometry. London 1914.

20. **Tutorială** *W. Briggs & G. A. Bryan.* — Tutorial trigonometry. 1905.

(Va urmà). I. IONESCU.

61. *Suma cuburilor primilor* n *termeni din şirul lui* FIBONACCI. Fie u_n termenul de rang n. Se ştie că (*Gazeta Matematică*, Anul XXI, pag. 125):

$$u_{n+m} = u_n u_m + u_{n-1} u_{m-1}$$

$$\therefore \quad u_{2n} = u_n^2 + u_{n-1}^2 \quad ; \quad u_{2n-1} = u_{n-1} u_n + u_{n-2} u_{n-1}.$$

$$\therefore \quad u_{3n-1} = u_{2n} u_{m-1} + u_{2n-1} u_{n-2} = u_n^2 u_{n-1} + u_{a-1}^3 + u_{n-2} u_{n-1} u_n + u_{n-2}^2 u_{n-1}.$$

$$\therefore \quad u_{3n-1} = u_{n-1}^3 + u_{n-1}(u_n^2 + u_{n-2}u_n + u_{n-2}^2).$$

Dar:

$$u_{n-1} = u_n - u_{n-2}$$

$$\therefore \quad u_{n-1}(u_n^2 + u_{n-2}u_n + u_{n-2}^2) = u_n^3 - u_{n-2}^3,$$

$$\therefore \quad u_{3n-1} = u_n^3 + u_{n-1}^3 - u_{n-2}^3.$$

Făcând succesiv $n = 1, 2, 3, \ldots n$ şi făcând suma relaţiilor obţinute, găsim:

$$u_{n-1}^3 + u_1^3 + u_2^3 + u_3^3 + \cdots + u_{n-1}^3 + u_n^3 = u_2 + u_5 + \cdots + u_{3n-1}.$$

Insă (*Culegere de probleme*, Aritmetică):

$$u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{3n-1} = u_{3n+1} - 1$$

şi

$$u_2 = u_1 + u_0, \quad u_5 = u_3 + u_4, \quad u_{3n-1} = u_{3n-2} + u_{3n-3}$$

$$\therefore \quad 2(u_2 + u_5 + \cdots + u_{3n-1}) = u_{3n+1} - 1.$$

Rezultă dar că avem:

$$u_1^3 + u_2^3 + u_3^3 + \cdots + u_n^3 = \frac{u_{3n+1} - 1}{2} - u_{n-1}^3.$$

I. B. Florescu.

62. *Fracţii sau frângeri.* S'a întrebuinţat, pe vremuri, cuvântul *frângeri* cu înţelesul de *fracţii*. L-am găsit în I. Ghica (vol. IV ediţia Minerva din 1915), la capitolul „*Insemnare asupra învăţăniei publice*". In sub titlul „*Şcoalele normale pentru învăţătorii de pe la sate*", I. Ghica propune obiectele care trebuie să se predeà la aceste şcoli. Despre Aritmetică el scrie, „*Această învăţătură înpărţită în doi ani, va cuprinde numerile întregi,* frângerile *şi proporţiile cu regulele de tovărăşie*".

Ar fi interesant de ştiut dacă cuvântul frângeri a ocupat loc şi în vre-un program oficial.

Locot. Col. Gh. Buicliu.

63. *O generalizare.* In „Gazeta Matematică" Vol. XXVII pag. 290, D-l N. Georgescu-Roegen dă o generalizare problemei 2819; raţionamentul poate fi simplificat, iar generalizarea susceptibilă de a fi extinsă încă, în felul următor:

Fie A un număr prim cu p; k și q numere oarecare. Avem:

$$(1) \qquad A^{(p-k-1)^{2q}} \equiv A^{M(p-1)+k^{2q}} \equiv A^{k^{2q}} \pmod{p}$$

și ridicând identitatea la puterea $(p-k-1)$, obținem încă:

$$(2) \qquad A^{(p-k-1)^{2q+1}} \equiv A^{(p-k-1)k^{2q}}. \pmod{p}$$

Din (1) și (2), se deduce că restul diviziunei expresiei:

$$E = A^{(p-k-1)^n}$$

prin p este respectiv:

$$A^{k^n} \qquad \text{sau} \qquad A^{(p-k-1)k^{n-1}}$$

după cum n este par sau impar.

Pentru $k=1$, obținem generalizarea D-lui Georgescu-Roegen.

Notă. Chestiunea se poate încă generaliză, considerând un număr oarecare x în loc de numărul prim p, urmând o cale analoagă cu generalizarea problemei 2935 dată tot de D-l N. Georgescu-Roegen.

Gh. Zapan.

64. *Asupra problemei 2657.* (*G. M.* vol. XXVII, p. 363). Iată o soluție simplă a acestei probleme:

Se știe că dintr'un punct dat al unei conice, se poate duce numai cu rigla tangenta la conică.

Luăm un punct a_1 pe cercul mic și ducem tangenta în a_1 la acest cerc. Prelungim tangenta până taie cercul mare în A_2 și A_3. Unim punctul a_1 cu centrul O și obținem, prelungind pe a_1 O într'o direcție convenabilă, un punct A_1 pe cercul mare. Triunghiul $A_1 A_2 A_3$ e echilateral și punctele a_1, a_2, a_3, unde laturile lui ating cercul mic, sunt vârfurile altui triunghiu echilateral. Pentru a obține poligoane de 3.2^n laturi, vom împărți laturile triunghiului $A_1 A_2 A_3$ și $a_1 a_2 a_3$ în câte două părți egale, ca la probl. 2679, p. 151, vol. XXVI; vom uni centrul cu mijloacele laturilor și prelungind aceste drepte până taie cercul corespunzător, vom avea mijloacele arcelor respective.

Soluția este, după cum vedem, mult mai simplă ca aceea din „Gazeta Matematică", vol. XXVII, p. 363.

B. M. Barbălatt.
Liceul Bârlad.

65. *Asupra unui loc geometric.* In cele ce urmează vom da câteva aplicațiuni interesante ale unui loc geometric cunoscut: *Locul geometric al focarelor parabolelor tangente la trei drepte date în plan, este cercul circumscris triunghiului format de cele trei drepte.*

Teorema se evidențiază ușor cu ajutorul unor considerațiuni de unghiuri și a câtorvă proprietăți ale parabolei. Plecând dela această teoremă și ținând seamă de proprietățile elementare ale parabolei, dăm, pe o cale nouă, peste câtevă proprietăți cunoscute.

1) Se știe că: *locul geometric al proecțiunilor focarului unei parabole pe tangentele sale, este tangenta sa la vârf;* însă am văzut că focarul parabolei, tangentă la trei drepte date, este situat pe cercul circumscris triunghiului format de dreptele date. Prin urmare, proecțiunile oricărui punct de pe cercul circumscris unui triunghiu pe laturile acestuia sunt colineare. Am regăsit astfel teorema lui SIMPSON.

Tot astfel, ținând seamă că *locul geometric al simetricelor focarului unei parabole în raport cu tangentele sale este directoarea parabolei,* obținem o altă proprietate cunoscută: *simetricele unui punct oarecare de pe cercul circumscris unui triunghiu, în raport cu laturile acestuia, sunt colineare.*

Se știe că această dreaptă trece prin ortocentrul triunghiului; de unde o nouă proprietate: *Directoarele parabolelor tangente la trei drepte date în plan, trec printr'un punct fix* (ortocentrul triunghiului format de cele trei drepte).

2) Să considerăm patru drepte date în plan; există o singură parabolă tangentă la aceste drepte, căci patru tangente, echivalând cu patru condițiuni simple, determină univoc poziția unei parabole.

Focarul acestei parabole trebuind să fie situat pe fiecare din cercurile circumscrise celor patru triunghiuri formate de dreptele date, aceste cercuri vor trece printr'un acelaș punct. Am regăsit astfel, proprietatea care face obiectul problemei 47, IV din *Culegere de Probleme,* Geometrie.

3) Am văzut mai sus că directoarele parabolelor tangente la trei drepte date trec prin ortocentrul triunghiului format de dreptele date. In cazul a patru drepte, parabola fiind determinată univoc, urmează că ortocentrele celor patru triunghiuri, formate de drepte, sunt colineare. Am regăsit teorema lui AUBERT: *Ortocen-*

trele celor patru triunghiuri formate de patru drepte în acelaş plan, sunt colineare, teoremă care mai face obiectul unei note în *Gazeta Matematică*, vol. XIV, pag. 13.

GH. D. POPESCU.
Liceul Internat, Iaşi.

66. *Stabilirea unei identităţi algebrice cu ajutorul unui sistem de ecuaţiuni lineare.*

Să considerăm sistemul de n ecuaţii lineare, cu n necunoscute:

$$(1)\quad \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_m + \ldots + x_m = 0 \\ a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + \ldots + a_m x_m + \ldots + a_n x_n = 0 \\ a_1^2 x_1 + a_2^2 x_2 + a_3^2 x_3 + \ldots + a_m^2 x_n + \ldots + a_n^2 x_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_1^{n-1} x_1 + a_2^{n-1} x_2 + a_3^{n-1} x_3 + \ldots + a_m^{n-1} x_m + \ldots + a_n^{n-1} x_n = 1 \end{cases}$$

unde $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sunt necunoscute, iar $a_1, a_2, \ldots, a_n$, cunoscute.

Insemnăm cu Δ determinantul sistemului (format cu coeficienţii necunoscutelor), care este un determinant al lui VANDERMONDE de ordinul n şi cu Δ_m numărătorul necunoscutei x_m. Desvoltarea lui Δ se poate obţine, chiar observând sistemul propus A. Ea este:

$$\begin{aligned} \Delta = {} & (a_2 - a_1) \times \\ & (a_3 - a_1) \times (a_3 - a_2) \times \\ & (a_4 - a_1) \times (a_4 - a_2) \times (a_4 - a_3) \times \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & (a_m - a_1) \times (a_m - a_2) \times (a_m - a_3) \times \ldots \times (a_m - a_{m-1}) \times \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & (a_{n-1} - a_1) \times (a_{n-1} - a_2) \times (a_{n-1} - a_3) \times \ldots \times (a_{n-1} - a_{n-2}) \times \\ & (a_n - a_1) \times (a_n - a_2) \times (a_n - a_3) \times \ldots\ldots \times (a_n - a_{n-1}). \end{aligned}$$

Desvoltarea lui Δ_1 se obţine înlocuind în determinantul sistemului, elementele primei coloane, prin termenii liberi din membrii al doilea, ai sistemului (1). Aceştia fiind toţi nuli, afară de ultimul, care este egal cu unitatea, desvoltarea lui Δ este desvoltarea determinantului minor corespunzător lui 1, care este şi el un determinant al lui VANDERMONDE de ordinul $n-1$. Desvoltarea lui este:

$$(-1)^0.\Delta_1 = (a_3 - a_2)\times$$
$$(a_4 - a_2)\times(a_4 - a_3)\times$$
$$(a_5 - a_2)\times(a_5 - a_3)\times(a_5 - a_4)\times$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(a_n - a_2)\times(a_n - a_3)\times(a_n - a_4)\times\ldots\ldots\times(a_n - a_{n-1}).$$

In mod analog, obţinem:

$$(-1)^1.\Delta_2 = (a_3 - a_1)\times$$
$$(a_4 - a_1)\times(a_4 - a_3)\times$$
$$(a_5 - a_1)\times(a_5 - a_3)\times(a_5 - a_4)\times$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(a_n - a_1)\times(a_n - a_3)\times(a_n - a_4)\times\ldots\ldots\times(a_n - a_{n-1}).$$
$$(-1)^2.\Delta_3 = (a_2 - a_1)\times$$
$$(a_4 - a_1)\times(a_4 - a_2)\times$$
$$(a_5 - a_1)\times(a_5 - a_2)\times(a_5 - a_4)\times$$
$$(a_6 - a_1)\times(a_6 - a_2)\times(a_6 - a_4)\times(a_6 - a_5)\times$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(a_n - a_1)\times(a_n - a_2)\times(a_n - a_3)\times(a_n - a_4)\times\ldots.$$
$$\ldots.\times(a_n - a_{n-1}).$$

In general pentru x_m calculăm pe Δ_m, înlocuind în determinantul sistemului elementele coloanei a m – a prin termenii liberi corespunzători şi schimbând semnul de $m - 1$ ori, pentru aducerea lor în prima coloană. Deci:

$$(-1)^{m-1}.\Delta_m = (a_2 - a_1)\times$$
$$(a_3 - a_1)\times(a_3 - a_2)\times$$
$$(a_4 - a_1)\times(a_4 - a_2)\times(a_4 - a_3)\times$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(a_{m-1} - a_1)\times(a_{m-1} - a_2)\times\ldots\ldots\times(a_{m-1} - a_{m-2})\times$$
$$(a_{m+1} - a_1)\times(a_{m+1} - a_2)\times\ldots\ldots\times(a_{m+1} - a_{m-1})\times$$
$$(a_{m+2} - a_1)\times(a_{m+2} - a_2)\times\ldots\ldots\times(a_{m+2} - a_{m-1})$$
$$\times(a_{m+2} - a_{m+1})\times$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(a_n - a_1)\times(a_n - a_2)\times\ldots\times(a_n - a_{m-1})\times(a_n - a_{m+1})$$
$$\times(a_n - a_{m+2})\times\ldots\times(a_n - a_{n-1}).$$

Deoarece: $x_m = \Delta_m / \Delta$,

se observă că factorii din Δ_m se simplifică, rămânând în numitorul Δ numai factorii care conțin pe a_m. Deci, numitorul lui x_m, devine:

$$(-1)^{m-1}.(a_m - a_1) \times (a_m - a_2) \times \ldots \times (a_m - a_{m-1}) \times (a_{m+1} - a_m) \times (a_{m+2} - a_m) \times \ldots \times (a_n - a_m),$$

sau schimbând semnul primilor $m-1$ factori și înmulțind cu $(-1)^{m-1}$, pentru a nu schimbă valoarea, numitorul de mai sus devine:

$$(-1)^{2(m-1)}.(a_1 - a_m) \times (a_2 - a_m) \times \ldots \times (a_{m-1} - a_m) \times (a_{m+1} - a_m) \times (a_{m+2} - a_m) \times \ldots \times (a_n - a_m)$$ sau în definitiv:

$$(a_1 - a_m) \times (a_2 - a_m) \times (a_3 - a_m) \times \ldots \times (a_{n-1} - a_m) \times (a_n - a_m).$$

$$\therefore \quad x_m = \frac{1}{(a_1 - a_m) \times (a_2 - a_m) \times \ldots \times (a_n - a_m)}.$$

Intr'un mod absolut analog, se deduce:

$$x_1 = \frac{1}{(a_2 - a_1) \times (a_3 - a_1) \times \ldots \times (a_n - a_1)};$$

$$x_2 = \frac{1}{(a_1 - a_2) \times (a_3 - a_2) \times \ldots \times (a_n - a_2)};$$

$$x_3 = \frac{1}{(a_1 - a_3) \times (a_2 - a_3) \times (a_4 - a_3) \times \ldots \times (a_n - a_3)};$$

$$x_n = \frac{1}{(a_1 - a_n) \times (a_2 - a_n) \times \ldots \times (a_{n-1} - a_n)}.$$

Deci, sistemul propus este complet rezolvat. Acum să stabilim o identitate algebrică, ținând seamă de valorile găsite ale rădăcinilor și de forma ecuațiunilor din sistemul propus A.

Pentru aceasta, înlocuim în sistemul propus rădăcinile prin valorile găsite, adunăm ecuațiunile membru cu membru, dăm factori comuni pe coloană și obținem:

$$(1 + a_1 + a_1^2 + \ldots + a_1^{n-1}) \times x_1 + (1 + a_2 + a_2^2 + \ldots + a_2^{n-1}) \times x_2 + \ldots$$

$$\ldots + (1 + a_m + a_m^2 + \ldots + a_m^{n-1}) + \ldots + (1 + a_n + a_n^2 + \ldots + a_n^{n-1}) = 1, \text{ sau}$$

$$\frac{a_1^n-1}{a_1-1}\cdot x_1+\frac{a_2^n-1}{a_2-1}\cdot x_2+\ldots+\frac{a_m^n-1}{a_m-1}\cdot x_m+\ldots+\frac{a_n^n-1}{a_n-1}\cdot x_m=1,$$

sau făcând înlocuirile spuse:

$$\frac{a_1^n-1}{(a_1-1)\times(a_2-a_1)\times(a_3-a_1)\times\ldots\times(a_n-a_1)}$$

$$+\frac{a_2^n-1}{(a_2-1)\times(a_1-a_2)\times(a_3-a_2)\times(a_4-a_2)\times\ldots\times(a_n-a_2)}+\ldots$$

$$\ldots+\frac{a_m^n-1}{(a_m-1)\times(a_1-a_m)\times(a_2-a_m)\times\ldots\times(a_{m-1}-a_m)\times(a_{m+1}-a_m)\times\ldots\times(a_n-a_m)}+\ldots$$

$$\ldots+\frac{a_n^n-1}{(a_n-1)\times(a_1-a_n)\times(a_2-a_n)\times\ldots\times(a_{n-2}-a_n)\times(a_{n-1}-a_n)}=1,$$

sau mai prescurtat:

$$\sum_{m=1}^{m=n}\frac{a_m^n-1}{(a_m-1)\times(a_1-a_m)\times(a_2-a_m)\times\ldots\times(a_n-a_m)}=1.$$

Aplicaţie. Punând $n=3$, identitatea stabilită devine:

$$\sum_{m=1}^{m=3}\frac{a_m^3-1}{(a_m-1)\times(a_1-a_m)\times(a_2-a_m)\times(a^3-a_m)}=1, \text{ sau}$$

$$\frac{a_1^3-1}{(a_1-1)\times(a_2-a_1)\times(a_3-a_1)}+\frac{a_2^3-1}{(a_2-1)\times(a_1-a_2)\times(a_3-a_2)}+$$

$$+\frac{a_3^3-1}{(a_3-1)\times(a_1-a_3)\times(a_2-a_3)}=1,$$

adică identitatea propusă de D-l I. Lintes în R. M. T., p. 170.

Acelaş lucru obţinem dacă, printr'un raţionament analog, porniam dela sistemul de ecuaţii:

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ a_1x+a_2y+a_3z=0 \\ a_1^2x+a_2^2y+a_3^2z=1. \end{cases}$$

C. E. Georgescu-Cantemir.

67. *Asupra unei serii.* Fie seria

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1.2\ldots n}{(a+1)\ldots(a+n)}, \qquad (a>0).$$

Aplicând criteriul lui D'ALEMBERT, avem

$$(1) \qquad \frac{u_{u+2}}{u_n} = \frac{n+1}{a+n+1} \quad , \quad \lim_{n=\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1,$$

adică nelămurire.

Aplic regula lui RABE şi DUHAMEL, seria fiind cu termeni pozitivi şi raportul u_{n+1}/u_n tinzând spre unitate, rămânând mai mic decât 1. Avem:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{1+a/(n+1)},$$

iar seria e convergentă dacă:

$$\lim_{n=\infty} \frac{n\,a}{n+1} > 1 \quad , \quad a > 1;$$

seria e divergentă pentru $a < 1$, iar pentru $a = 1$ seria de mai sus, devenind seria armonică, este divergentă.

Voiu da acum două moduri de sumare a acestei serii.

1°. Termenul general u_n se poate scrie

$$\frac{1.2\ldots n}{(a+1)\ldots(a+n)} = \frac{1}{a-1}\left[\frac{1.2\ldots n}{(a+1)\ldots(a+n-1)} - \frac{1.2\ldots(n+1)}{(a+1)\ldots(a+n)}\right]$$

De unde:

$$\frac{1}{a+1} = \frac{1}{a-1}\left[1 - \frac{1.2}{a+1}\right]$$

$$\frac{1}{(a+1)(a+2)} = \frac{1}{a-1}\left[\frac{1.2}{a+1} - \frac{1.2.3}{(a+1)(a+2)}\right],$$

$$\frac{1.2.3}{(a+1)(a+2)(a+3)} = \frac{1}{a-1}\left[\frac{1.2.3}{(a+1)(a+2)} - \frac{1.2.3.4}{(a+1)(a+2)(a+3)}\right],$$

. . . . . .

$$\frac{1.2\ldots n}{(a+1)(a+2)\ldots(a+n)} = \frac{1}{a-1}\left[\frac{1.2\ldots n}{(a+1)\ldots(a+n-1)} - \frac{1.2\ldots(n+1)}{(a+1)\ldots(a+n)}\right]$$

. . . . . .

Adunând membru cu membru, rezultă

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1.2\ldots n}{(a+1)\ldots(a+n)} = \frac{1}{a-1}.$$

2^0. Conform relaţiei (1) avem

$$(a-1)u_{n+1}=(n+1)u_n-(n+2)u_{n+1}.$$

De unde:

$$(a-1)u_1=(a-1)u_1,$$
$$(a-1)u_2=2u_1-3u_2,$$
$$(a-1)u_3=3u_2-4u_3,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$(a-1)u_{n+1}=(n+1)u_n-(n+2)u_{n+1},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Adunând membru cu membru aceste egalităţi rezultă

$$(a-1)\sum_{i=1}^{\infty}u_i=(a-1)u_1+2u_1=(a+1)u_1.$$

Dar $$u_1=\frac{1}{a+1},$$

aşà că

$$\sum_{i=1}^{\infty}u_i=\frac{1}{a-1}.$$

A. Tit. Nicolau.
Student, Bucureşti.

CHESTIUNI DE EXAMEN.

CONCURSUL „GAZETEI MATEMATICE“
DIN ANUL 1923.

PROBELE SCRISE.

(12 Aprilie 1923).

A. PROBE TEORETICE.

(Timpul acordat: $3\,^1/_2$ ore).

Clasa VI-a.

Algebra. Se dau numerele:

$$k_r^s=s\,k_{r-1}^s+k_{r-1}^{s-1}\quad\left(\begin{matrix}k_r^s=0 & <^{s=0}_{s>r}\\ k_r^r=1\end{matrix}\right).$$

Să se calculeze determinanţii:

$$\begin{vmatrix} k_2^1 & k_2^2 & 0 & 0 & 0 \\ k_3^1 & k_3^2 & k_3^3 & 0 & 0 \\ k_4^1 & k_4^2 & k_4^3 & k_4^4 & 0 \\ k_5^1 & k_5^2 & k_5^3 & k_5^4 & k_5^5 \\ k_6^1 & k_6^2 & k_6^3 & k_6^4 & k_6^5 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} k_3^2 & k_3^3 & 0 & 0 \\ k_4^2 & k_4^3 & k_4^4 & 0 \\ k_5^2 & k_5^3 & k_5^4 & k_5^5 \\ k_6^2 & k_6^3 & k_6^4 & k_6^5 \end{vmatrix}.$$

Să se generalizeze.

Geometria. Se dau două triunghiuri ABC şi A'B'C', aşezate în două planuri deosebite P şi P'. Se presupune că planurile duse prin A, B, C perpendicular pe B'C', C'A' şi A'B' se taie după o aceeaşi dreaptă Δ.

1°. Să se demonstreze că triunghiul $A_1B_1C_1$, proiecţia triunghiului ABC pe planul P', este ortologic cu A'B'C'.

2°. Să se arate că orice triunghiu ABC, care se bucură, faţă de A'B'C', de proprietatea presupusă, se poate obţine cu ajutorul unui triunghiu ortologic oarecare al lui A'B'C'.

3°. Reciproc, planurile duse prin A', B', C', perpendicular pe BC, CA şi AB, se taie după o aceeaşi dreaptă Δ'.

Trigonometria. 1. Cunoscând tang a, să se calculeze tang $\frac{1}{2}a$.

Aplicaţie. Cunoscând $\operatorname{tang} 150^0 = -1/\sqrt{3}$, să se calculeze tang 75°.

2. Cunoscând tang $\frac{1}{2}a$, să se calculeze sin a, cos a, tang a.

3. Să se rezolve un triunghiu, cunoscând două laturi şi unghiul cuprins. (Se vor lua ca date a, b, C şi se vor determină c, A, B).

4. *Problema hărţei.* Trei puncte A, C, B fiind situate pe un teren plan şi orizontal şi raportate pe o hartă, să se determine punctul P de unde distanţele AC şi CB au fost văzute sub unghiuri care au fost măsurate şi se cunosc.

Notă. A fost obligatoriu a se trată două chestiuni şi anume: una din primele două chestiuni şi una din ultimele două.

Clasa VII-a.

Algebra. Fie:

$$S_n = \sum_{p=3}^{n} \operatorname{tg} \frac{\pi}{p}, \quad S'_n = \sum_{p=3}^{n} \sin \frac{\pi}{p}.$$

Să se arate că dacă n tinde către infinit, S_n şi S'_n tind către infinit, dar $S_n - S'_n$ tinde către o limită finită. Cum trebue să fie α, pentruca aceaşi proprietate să subsiste pentru sumele:

$$S_n = \sum_{p=3}^{n} \operatorname{tg}^{\alpha} \frac{\pi}{p} \quad \text{şi} \quad S'_n = \sum_{p=3}^{n} \sin^{\alpha} \frac{\pi}{p} \; ?$$

Mecanica. O macara cu 2 scripete e atârnată într'un punct A şi susţine o greutate P. De capătul C al funiei, în sens vertical, trage în jos un om cu 30 kg.

Macaraua are o singură funie, care cu un capăt este fixată de osia scripetelui superior şi e trecută de 2 ori pe fiecare din cele două scripete.

Să se găsiască greutatea P, ce poate ridică omul şi reacţiunea pe cârligul din A.

Nu se ţine seama de frecări.

Clasa VIII-a.

Algebra. Se dă ecuaţia de gradul al patrulea $f(x)$, care are toate rădăcinile reale. Să se studieze variaţia rădăcinilor ecuaţiei:

$$f(x) + kf'(x) = 0,$$

când k variază dela $-\infty$ la $+\infty$.

Să se generalizeze.

Geometria analitică. I. Se dă o parabolă şi din focarul ei F, se duc două raze vectoare FM, FM' perpendiculare, ce întâlnesc parabola dată în M şi M'.

Să se găsiască locul punctului P de intersecţie al tangentelor în M şi M' la parabolă, când razele vectoare se învârtesc în jurul lui F.

II. Fie M punctul de intersecţie al unei iperbole cu o secantă oarecare. Fie P, Q punctele în care această secantă taie asimptotele iperbolei considerate. Să se arate că produsul MP.MQ este egal cu patratul semidiametrului paralel cu secanta. Se cere o demonstraţie utilizând axele rectangulare.

B. PROBE PRACTICE.

(Timpul acordat: $3\,^1/_2$ ore).

Clasa VI-a.

Algebra. Fie $I(x)$ un număr întreg mai mic sau cel mult egal cu x; să se găsiască ce fel de funcţiune reprezintă expresiunea:

$$y = x^3 + I(x)$$

şi să se construiască curba reprezentativă, când x variază în mod continuu dela 0 la 10.

Trigonometria. 1. Să se calculeze, prin logaritmi, unghiul x dat de formula:

$$\cos x = \cos 81^0 10' - \cos 77^0 30'$$

şi să se dea toate valorile lui x, cuprinse între 0^0 şi 360^0, care satisfac formulei.

2. Să se calculeze prin logaritmi unghiul z, dat de formula:

$$\operatorname{tang}^3 3z = \frac{1 - \cos 575^\circ 40' 20''}{1 + \sin 709^\circ 10' 30''}$$

şi să se dea toate valorile lui z, cuprinse între 0° şi 180°, care satisfac formulei.

Clasa VII-a.

Algebra. Să se calculeze:

$$\lim_{n=\infty} \left(\frac{1 - \sin \pi/n}{1 + \sin \pi/n}\right)^n.$$

Care va fi natura seriei al cărui termen general este:

$$u_p = \left[\sum_{n=2}^{n=\infty} \left(\frac{1 - \sin \pi/n}{1 + \sin \pi/n}\right)^n\right]^p ?$$

Geometria Descriptivă. Se dă dreapta AB [A(20, 15, 0); B(60, 0, 40)] şi se cere să se găsiască:

1) unghiul făcut de dreapta AB cu planul de profil care trece prin A;
2) unghiul făcut de dreapta AB, cu planul bisector al diedrului al 2-lea.
(Se va anexă o legendă explicativă a construcţiilor şi notaţiilor).

Mecanica. Un stâlp susţine opt fire de telegraf, de 2 mm. diametru şi care trag, în sens orizontal, de stâlp cu câte 60 kg. Stâlpul este la un colţ de stradă, unde axele străzilor fac între ele un unghiu de 150°. Firele sunt fixate pe stâlp la o înălţime medie de 7 m. Pentru ca stâlpul să nu se rupă, se sprijineşte cu o propteă de lemn, care face cu verticala un unghiu de 20°. Să se găsiască compresiunea care se produce în propteă.

Clasa VIII-a,

Algebra. Se dă funcţiunea:

$$f(t) = t^4 + x t^3 + \left(\frac{x^2}{4} + \frac{2h}{x} + 2\right) t^2 + y t + 1$$

şi se cere, ştiind că x şi y sunt coordonatele unui punct din plan, să se afle porţiunile planului pentru care $f(t)$ are două minime egale.

Discuţie când h variază.

Presupunând $h = 3/2$, să se calculeze coordonatele punctelor din plan, pentru care valorile lui t, corespunzătoare celor două minime ale lui $f(t)$, sunt aceleaşi.

Geometria Analitică. Se dă într'un plan un sistem de axe rectangulare (Ox, Oy) şi punctele A(1,1), B(1, — 1), $C\left(-\frac{1}{5}, \frac{7}{5}\right)$ şi se cere:

1°. Ecuaţia cercului circumscris triunghiului ABC.

2°. Ecuaţia cercului celor nouă puncte, relativ la acest triunghiu.

3°. Ecuaţia axului radical al acestor două cercuri şi coordonatele punctelor de intersecţie.

4°. Să se verifice că cele patru puncte, H, O_g, G, O, relative la triunghiul de mai sus, sunt colineare şi formează o diviziune armonică.

Au fost păstrate notaţiunile obişnuite.

BIBLIOGRAFIE.

Bulletin de la Section scientifique de l'Académie roumaine Anul VIII. No. 5—6. 1922—1923. Bucureşti.

Bulletin of the American mathematical Society. Vol. XXVIII. No. 8. Noemvrie 1922. New-York. A 29-a adunare de vară a Societăţii, de R. Richardson. O proprietate a unor funcţiuni a căror desfăşurare sturmiană nu se termină, de G. Kellogg. Asupra demonstraţiei teoremei de existenţă pentru un tip de probleme de valoare la limită, de H Davis. Notă asupra rădăcinilor unei ecuaţii, de K. Williams. Teoreia completă a existenţei postulatelor lui Harwitz, pentru grupurile şi câmpuriie abeliene, de B. Bernstein. Asupra memoriului lui Kummer din 1857 relativ la ultima teoremă a lui Fermat, de H. Vandiver. Funcţiunile reale ale lui Hahn, de D. Jackson.

Idem. No. 9. Decemvrie 1922. Condiţiunea ca un tensor să fie un ochiu de vectori, de L. Eisenhardt. O nouă generalizare a neegalităţilor statistice ale lui Tschebicheff, de B. Camp. Dacă teorema asupra integralelor multiple, de P. Franklin, Plimbările lui Kirkman, de F. N. Cole. Imposibilitatea de a face o descompunere în factori unică în aritmetica hipercomplexă, de L. Dickson. O revizuire a funcţiunilor bernoulliane şi euleriane de E. Bell. Existenţa curbelor cu anumite singularităţi tip de J. Coolidge. O generalizare a congruenţelor normale de cercuri, de J. Walsh.

Mathésis Vol XXXVII. Anul 1923. No. 3 Martie 1923. Bruxelles. Bibliografia triunghiului şi a tetraedului, de J. Neuberg. Asupra bicornului, de R. Deaux. Calcul infinitesimal la Simon Stevin, de H. Bosmans. Note de algebră elementară, de Ad. M.

Idem. No. 4 Aprilie 1923. Bibliografia triunghiului şi tetraedului de J. Neuberg. Asupra hipocicloidei lui Steiner, de Ch. Servais. Generalizarea construcţiunii lui Cornu relativă la caustice de R. Goormaghtigh. Note de algebră elementară de Ad. M.

Revista de Matematicas y fisicas elementales. Anul VI. Fevruarie 1923. No. 10. Buenos-Aires. (Număr de vacanţă numai cu probleme).

Journal de mathématiques élémentaires. Anul 47. No. 1—13. 1 Octombrie 1922 — 15 Martie 1923. No. 1 — 12 Publicat. de H. Vuibert. Paris. Teoremă relativă la patrulater, de G. Fonténé (No. 3). Asupra compunerii similitudinelor în plan, de G. Fonténé (No. 9).

Buletinul Asociaţiei de matematici pure şi aplicate. Anul II No. 8 Aprilie 1923. Bucureşti — Les séries trigonométriques, par Tr. Lalésco. O reprezentare specială a dreptelor echirezultante, de G. Nichifor.

Revista matematică din Timişoara. Anul III No. 1. Martie 1923. Timişoara. Funcţiuni pseudo-omogene, de V. Alaci.

Gazeta matematicelor *elementare, financiare şi speciale.* Organ de cultură şi emulaţie şcolară. Anul I No. 1. 1 Aprilie 1923. Constanţa. Abonamentul 15 lei trimestrial, numărul 8 lei. Administrator Prof. C. Cornăţeanu, directorul Liceului „Mircea cel Bătrân" din Constanţa.

Rostul Gazetei noastre, de „Comitetul". Noi directive în şcoală, de B. Constantinescu, avocat. Din chestiunile de Cosmografie de classa VIII-a, de N. Zagoicea. Din chestiunile de aritmetică comercială, de N. Zagoicea. Concursul interşcolar local pe clase, la matematici, din 25 Martie. Concurs de desemn. Probleme propuse. Distracţii matematice.

N. Abramescu. *Sule serie di polinomi di una variabile complessa. Le serie di* Darboux. Extras din *Annali di matematica pura ed aplicata,* Milano 1922.

N. Abramescu. *Sur l'autogénération des courbes.* Extras din *Comptes rendus des sciences de l'Académie des sciences,* 5 Martie 1923 Paris.

Lt. I. Lintes. *O metodă pentru regularea tragerii prin observare unilaterală,* (extras din *Revista Artilerii).* 1923. Timişoara.

Micu Grünbaum. *Teoreme de geometrie.* Aplicaţii la transformarea cosogonală. No. 4. Biblioteca Societăţii *„Matematica Bârlădeană"* 1923. Tipografia *A. Haber.* Bârlad.

American mathematical Society. List of officers and members. Decemvrie 1922 New-York.

CERERI.

101. In care foaie periodică, tipărită sau litografiată, din România, au fost puse pentru prima oară şi chestiuni de matematici?

F. Georgescu.

PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 1453. *Mai multe numere au cel mai mic comun multiplu al lor 8945, iar divizând acesta prin acele numere, găsim câturi în progresiune aritmetică. Care sunt acele numere?*

A. RĂȘCANU.

Soluție dată de D-l E. GRIGORESCU.

Numărul 8945 este 5×1789, și cum 1789 este prim, reese că singurii divizori ai lui 8945 sunt 1, 5, 1789 și 8945. Niciunul din ei nu este semi-sumă a altor două și prin urmare problema este imposibilă. Reese dar că trebuie să fi fost o eroare de tipar la tipărirea numărului 8945.

Chestiunea fiind de a vedeà cum se rezolvă problema, voiu înlocuì numărul 8945, prin $945 = 3^3 . 5 . 7$ și voiu studià problema în acest caz.

Numerele căutate și câturile împărțirii lui 945 prin ele nu au alți factori primi decât pe 3, 5 și 7. Câturile fiind prime între ele, căci altfel numerele nu ar mai aveà pe 945 cel mai mic comun múltiplu al lor, reese că unul din câturi este neapărat 1, 5, 7 sau 35. Câturile sunt de altfel divizori ai lui 945, deci unele din numerele: 1, 3, 5, 7, 9, 15, 21, 27, 35, 45, 63, 105, 189, 135, 315, 945.

Ori câți termeni ar aveà progresiunea, din trei consecutivi, unul este semi-suma celorlalți doi. Mai știm că unul din termeni este neapărat 1, 5, 7 sau 35.

Să examinăm pe rând. Dacă luăm pe 1, el este primul termen al progresiunii. Adunăm lui 1 pe toate celelalte numere și vedem dacă suma este dublul unui divizor.

Găsim că $1 + 5 = 2 . 3$; $1 + 9 = 2 . 5$.

Dacă luăm pe 5, găsim: $3 + 7 = 2 . 5$; $5 + 9 = 2 . 7$.

Dacă luăm pe 7, găsim: $7 + 63 = 2 . 35$, care nu este admisibil, căci 7, 35, 63 nu sunt prime între ele, având pe 7 factor comun.

Dacă luăm pe 35, nu găsim nicio soluție.

Deci singurele câturi posibile în condițiunile problemei sunt: 1, 3, 5, 7, 9.

Ele formează progresiune aritmetică de cinci termeni cu raţia 2. Dintr'însa am mai puteà scoate progresiile de patru termeni 1.3.5.7 şi 3.5.7.9, sau progresiile de trei termeni 1.3.5 ; 3.5.7 ; 5.7.9 ; 1.5.9; deci în total 7 soluţii. Numerele căutate, corespunzătoare căturilor 1, 3, 5, 7, 9 sunt 945, 315, 189, 135, 105. De acì rees următoarele soluţiuni:

105.135.189 ; 135.189.315 ; 189.315.945 ; 105.189.945; 105.136.189.315 ; 135.189.315.945 ; 105.135.189.315.945.

PROBLEMA 2040. *Să se aranjeze în ordinea mărimilor relative rădăcinile următoarelor patru ecuaţii, fără a le rezolvà:*

(1) $6x^2-7x-3=0$, (3) $9z^2-12z+4=0$,
(2) $-2y^2-7y+15=0$, (4) $6v^2-13v+6=0$.

V. Grigorescu.

Fie $x'\leqslant x''$, $y'\leqslant y''$, $z'\leqslant z''$, $v'\leqslant v''$ rădăcinile acestor patru ecuaţii. Realizanţii acestor ecuaţii sunt:

$7^2+4.3.6>0$; $7^2+4.2.15>0$; $12^2-4.4.9=0$; $13^2-4.6.6>0$.

Deci toate rădăcinile sunt reale şi avem că $z'=z''$. Aceste rădăcini sunt pozitive, căci din ecuaţia (3) se vede că suma lor este pozitivă. Privind ecuaţia (1) şi (2) vedem că ele au o rădăcină pozitivă şi alta negativă. Deci $x'<0$, $y'<0$, şi $x''>0$, $y''>0$. Ecuaţia (4) are rădăcinile pozitive, deci $v'>0$, $v''>0$.

Să vedem dacă ecuaţiile au rădăcini comune. Eliminantul ecuaţiilor (1) şi (2) este $(6.15-3.2)^2-(-6.7-7.2)(-7.15-3.7)=0$. Deci aceste ecuaţii au o rădăcină comună. Pentru $x=1$, ecuaţia (1) devine (-4); deci $1<x''$, iar pentru $y=1$, ecuaţia (2) devine $(+6)$, deci $1<y''$. Făcând în (1) $x=-1$, găsim $(+10)$ şi în (2) pe $y=-1$, găsim $(+20)$. Deci $x'>-1$ şi $y'<-1$. Reese că x' şi y' nu pot fi comuni şi că avem $y'<x'<x''=y''$.

Semisuma rădăcinilor ecuaţiei (3) fiind $6/9<1$, reese că $z'=z''<x''$ şi că deci rădăcinile primelor trei ecuaţii se aranjează astfel $y'<x'<z'=z''<x''=y''$. Rămâne a aranjà în acest şir şi rădăcinile ecuaţiei (4). Aceste rădăcini sunt inverse una alteia, căci produsul rădăcinilor este 1.

Să vedem dacă această ecuație are rădăcină comună cu ecuația (1). Eliminantul ecuațiilor (1) și (4) este $(6.6+3.6)^2 - (-6.13+7.6)(-7.6-3.13) = 0$. Deci ele au o rădăcină comună, și anume nu putem avea decât $x'' = v''$, căci $x' < 0$ și $v' > 0$, $v'' > 0$, iar $v' < 1$ și $v'' > 1$, ca și x''. Rămâne numai a vedeà cum stă v' față de z'. Să vedem dacă au o rădăcină comună.

Eliminantul ecuațiilor (3) și (4) este $(9.6-4.6)^2 - (-9.13+12.6)(-12.6+4.13) = 0$. Deci ele au o rădăcină comună și cum semisuma rădăcinilor egale ale ecuației (3) este mai mică decât 1 și $v' < 0$ $v'' < 1$, reese că $z' = z'' = v'$.

Deci aranjarea tuturor rădăcinilor este:

$$y' < x'' < z' = z'' = v' < x'' = y'' = v''.$$

I. I.

Au rezolvat bine această chestiune, însă pe căi mai lungi, sau servindu-se de faptul că $z' = z'' = 1{,}5$ D-nii: C. Brumărescu, I. Păsărică, L. Teodoriu, F. Vasilescu, C. Vișoianu, S. Voronca și G. Zamfirescu.

PROBLEMA 2335. *Se unesc mijloacele laturilor unui poligon aritmetic progresiv de* n *laturi, înscris într'un cerc de rază R.*

1. Să se calculeze perimetrul și suprafața acestui poligon.

2. Către ce tinde perimetrul și suprafața calculată, când n *crește către infinit ?*

V. Alaci.

Impărțim cercul O în $\frac{1}{2} n[2a+(n-1)r]$ părți egale și fie $A_1 A_2 \ldots A_n A_1$ un *poligon aritmetic progresiv înscris*, ale cărui laturi $A_1 A_2$, $A_2 A_3 \ldots A_{n-1} A_n$, $A_n A_1$ subîntind respectiv a, $a+r$, $a+2r, \ldots a+(n-1)r$ diviziuni, mărimea unei diviziuni fiind:

$$\frac{4\pi}{n[2a+(n-1)r]}.$$

Fie încă $B_1, B_2, \ldots B_n$ respectiv mijloacele laturilor poligonului înscris.

Considerăm laturile consecutive $A_k A_{k+1}$, $A_{k+1} A_{k+2}$, care

subîntind respectiv $a+(k-1)r$, $a+kr$ diviziuni şi fie $B_k B_{k+1}=l_k$, latura care uneşte mijloacele lor.

Observăm că putem scrie:

$$(1)\quad l_k=\tfrac{1}{2}A_k A_{k+2}=A_k M=R\sin\frac{2[2a+(2k-1)r]\pi}{n[2a+(n-1)r]},$$

M fiind mijlocul lui $A_k A_{k+2}$ şi $A_k M$ fiind o catetă a triunghiului dreptunghic $A_k OM$. Expresiunea (1) ne procură numai primele $n-1$ laturi ale poligonului nostru pentru $k=1, 2,\ldots. n-1$; ultima latură $A_n A$, trebue calculată aparte şi observăm că:

$$(2)\qquad l_n=R\sin\frac{2[2a+(n-1)r]\pi}{n[2a+(n-1)r]}=R\sin\frac{2\pi}{n}.$$

1. Dacă însemnăm acum cu P_n perimetrul poligonului cerut, avem:

$$P_n=R\sin\frac{2\pi}{n}+R\sum_{k=1}^{n-1}\sin\frac{2[2a+(2k-1)r]\pi}{n[2a+(n-1)r]}.$$

In membrul al 2-lea, trebue efectuată suma sinusurilor a $n-1$ arce în progresie aritmetică cu raţia $\dfrac{4r\pi}{n[2a+(n-1)r]}$ şi utilizând o formulă cunoscută, (Complément de trigonométrie par F. G. M. p. 43), avem:

$$P_n=R\sin\frac{2\pi}{n}+R\,\frac{\sin\dfrac{2\pi}{n}\cdot\sin\dfrac{2(n-1)r\pi}{n[2a+(n-1)r]}}{\sin\dfrac{2r\pi}{n[2a+(n-1)r]}},$$

sau

$$(3)\quad P_n=\frac{2R\sin\dfrac{2\pi}{n}\sin\dfrac{r\pi}{2a+(n-1)r}\cos\dfrac{(n-2)r\pi}{n[2a+(n-1)r]}}{\sin\dfrac{2r\pi}{n[2a+(n-1)r]}}.$$

2. Trecem acum la aflarea suprafeţei poligonului $B_1 B_2\ldots. B_n B_1$.

Notând aria $(B_k OB_{k+1})=s_k$, observăm că:

$$(4)\qquad s_k=\tfrac{1}{2}l_k\times ON,$$

unde,

$$(5)\quad ON = R\cos\frac{B_k O B_{k+1}}{2} = R\cos\frac{[2a+(2k-1)r]\pi}{n[2a+(n-1)r]}.$$

Expresia lui s_k, ținând seamă de (1) și (5), devine:

$$(6)\quad s_k = \tfrac{1}{2} R^2 \sin\frac{2[2a+(2k-1)r]\pi}{n[2a+(n-1)r]}\cos\frac{[2a+(2k-1)r]\pi}{n[2a+(n-1)r]}.$$

Expresiunea (6) ne procură numai ariile primelor $n-1$ triunghuri $s_1, s_2, \ldots s_{n-1}$, pentru $k = 1, 2, \ldots n-1$; aria s_n a ultimului triunghiu $B_n O B$, trebue calculată aparte și observăm că ea este:

$$(7)\quad s_n = \frac{l_n \times l_n}{2} = \frac{R^2}{2}\sin\frac{2\pi}{n}\cos\frac{\pi}{n},$$

l_n fiind înălțimea triunghiului.

Dacă însemnăm cu S_n aria poligonului cerut, ținând seamă de relațiile (6) și (7), avem:

$$(8)\quad S_n = \frac{R^2}{2}\sin\frac{2\pi}{n}\cos\frac{\pi}{n} + \frac{R^2}{2}\sum_{k=1}^{n-1}\sin\frac{2[2a+(2k-1)r]}{n[2a+(n-1)r]}\cos\frac{[2a+(2k-1)r]\pi}{n[2a+(n-1)r]}.$$

Dar,

$$\sum_{k=1}^{n-1}\sin\frac{2[2a+(2k-1)r]\pi}{n[2a+(n-1)r]}\cos\frac{[2a+(2k-1)r]\pi}{n[2a+(n-1)r]} = \tfrac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}\sin\frac{3[2a+(2k-1)r]\pi}{n[2a+(n-1)r]} + \tfrac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}\sin\frac{[2a+(2k-1)r]\pi}{n[2a+(n-1)r]}.$$

In membrul al 2-lea, sunt două sume de sinusuri a $n-1$ arce în progresie aritmetică, cu rațiile respectiv

$$\frac{6r\pi}{n[2a+(n-1)r]} \quad \text{și} \quad \frac{2r\pi}{n[2a+(n-1)r]}.$$

Utilizând formula de însumare de care ne-am mai servit și înlocuind direct în (8), putem scrie:

$$(9)\quad S_n = \frac{R^2}{4}\left[2\sin\frac{2\pi}{n}\cos\frac{\pi}{n} + \frac{\sin\frac{3\pi}{n}\sin\frac{3(n-1)r\pi}{n[2a+(n-1)r]}}{\sin\frac{3r\pi}{n[2a+(n-1)r]}} + \frac{\sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{(n-1)r\pi}{n[2a+(n-1)r]}}{\sin\frac{r\pi}{n[2a+(n-1)r]}}\right].$$

Formulele (3) şi (9) ne dau expresiunile perimetrului şi suprafeţei poligonului $B_1 B_2 \ldots B_n B_1$ cerut.

3. Rămâne să calculăm către ce tind perimetrul şi suprafaţa poligonului cerut, când numărul laturilor tinde către ∞.

Dacă în (3), facem $n = \infty$, avem:

$$\lim_{n=\infty} P_n = 2R \lim_{n=\infty} \frac{\sin\frac{2\pi}{n}\sin\frac{r\pi}{2a+(n-1)r}}{\sin\frac{2r\pi}{n[2a+(n-1)r]}} \lim_{n=\infty} \cos\frac{(n-2)r\pi}{n[2a+(n-1)r]}$$

$$= 2R \lim_{n=\infty} \frac{\sin\frac{2\pi}{n}\sin\frac{r\pi}{2a+(n-1)r}}{\sin\frac{2r\pi}{n[2a+(n-1)r]}}.$$

Pentru $n = \infty$, fiecare sinus tinde către zero, astfel că împărţind şi înmulţind fiecare sinus cu arcul corespunzător şi observând că limita rapoartelor tinde către 1, rămâne:

$$\lim_{n=\infty} P_n = 2R \lim_{n=\infty} \frac{\frac{2\pi}{n}\cdot\frac{r\pi}{2a+(n-1)r}}{\frac{2r\pi}{n[2a+(n-1)r]}} = 2\pi R.$$

Dacă în (9), facem $n = \infty$, lăsăm la o parte primul termen care dispare şi procedăm cu limita raporturilor sinusurilor ca mai sus, putem scrie:

$$\lim_{n=\infty} S_n = \frac{R^2}{4} \lim_{n=\infty} \left[\frac{3\pi}{n\,n[2a+(n-1)r]} \cdot \frac{3(n-1)r\pi}{3r\pi} + \frac{\pi}{n\,n[2a+(n-1r)]} \cdot \frac{(n-1)r\pi}{r\pi} \right] = \pi R^2.$$

$$n[2a+(n-1)r] \qquad n[2a+(n-1)r]$$

Vedem astfel că perimetrul şi suprafafa poligonului cerut tind la limită către lungimea şi suprafaţa cercului în care a fost inscris.

S'au primit soluţiuni parţiale şi particulare dela D-nii: R. Augustin, M. Davidescu şi L. Hahn.

PRÒBLEMA 2429. *Pentru numerele pânăla 1000 să se găsiască perechile de numere consecutive aşà ca fiecare din ele să fie produsul a trei numere prime diferite.*

I. Ionescu.

Numerele căutate sunt de forma pqr, în care p,q,r sunt numere prime. Asemenea numere au $(1+1)\,(1+1)\,(1+1) = 8$ divizori. Căutăm dar în o tabelă, care dă divizorii numerelor întregi, două numere consecutive cu câte 8 divizori şi găsim următoarele 26 perechi de asemenea numere.

104; 135; 189; 230; 231; 285; 296; 344; 374; 375; 429; 434; 609;
105; 136; 190; 231; 232; 286; 297; 345; 375; 376; 430; 435; 610;

632; 645; 663; 664; 741; 776; 782; 805; 874; 902; 903; 969; 986;
633; 646; 664; 665; 742: 777; 783; 806; 875; 903; 904; 970; 987;

Insă mai au 8 divizori şi numerele de forma pq^3; deci din acestea vom scoate pe cele ce au ca divizor un cub şi avem cuburile mai mici ca $1000 : 2 = 500$, deci pe cele divizibile cu $8 = 2^3$; $27 = 3^3$; $125 = 5^3$; $343 = 7^3$. Perechile corespunzătoare unor asemenea numere le suprimăm. Avem însă că 104; 136; 232; 296; 344; 376; 632; 664; 776; 904 sunt $\equiv 8$; numerele 189; 783 sunt $\equiv 27$; iar numerele 375; 875 sunt $\equiv 125$. Rămân dar ca soluţiuni ale problemei numerele:

230=2.5.23; 285=3.5.19; 429=3.11.13; 434=2.7.31; 609=3.7.29; 645=3.5.43;
231=3.7.11; 286=2.11.13; 430=2.5.43; 435=3.5.29; 610=2.5.61; 646=2.17.19;
741=3.13.19; 805=5.7.23; 902=2.11.41; 969=3.17.19; 986=2.17.29,
742=2.7.53; 806=2.13.31; 903=3.7.43; 970=2.5.97; 987=3.7.47.

Problema admite dar 11 soluțiuni.

Calea urmată aci a fost dată de D-l P. KATZ (Liceul Comunității Israelite din Galați). D-sa a pierdut însă soluțiile 434, 435 și 741, 742 și nu a dat descompunerile dela urmă.

I. I.

PROBLEMA 2594. *Punctele* A', B', C' *împart laturile* AB, BC, CA *ale unui triunghiu în acelaș raport. Punctele* A_1, B_1, C_1 *împart segmentele* AA', BB' CC' *în acelaș raport, diferit de primul. Să se arate că triunghiurile* ABC, $A_1B_1C_1$ *au acelaș centru de greutate.*

L. HAMBURGER.

Soluție dată de D-nul ION M. ȘERBĂNESCU (Elev în cl. VIII reală, Liceul Mihai Viteazul).

Vom determină rapoartele $A_1A : A_1B$, $B_1B : B_1C$, $C_1C : C_1A$ în care punctele A_1, B_1, C_1 împart laturile AB, BC, CA ale triunghiului ABC.

După enunțul problemei, avem:

$$\frac{A'A}{A'B} = \frac{B'B}{B'C} = \frac{C'C}{C'A} = \alpha \text{ și } \frac{A_1A}{A_1A'} = \frac{B_1B}{B_1B'} = \frac{C_1C}{C_1C} = \beta,$$

$$\therefore \quad A'A = \alpha . A'B \quad \text{și} \quad A'A_1 = A_1A : \beta.$$

Dar $\quad A'A = A'A_1 + A_1A$ și $A'B = A_1B - A_1A'$.

Deci $\quad A'A_1 + A_1A = \alpha (A_1B - A_1A')$

$$\therefore \quad A_1A/\beta + A_1A = \alpha (A_1B - A_1A/\beta)$$

$$\therefore \quad A_1A/A_1B = \alpha\beta/(\alpha + \beta + 1).$$

Analog obținem:

$$B_1B/B_1C = C_1C/C_1A = \alpha\beta/(\alpha + \beta + 1).$$

Punctele A_1, B_1, C_1 împart deci laturile AB, BC, CA ale triunghiului ABC în acelaș raport și în acelaș sens. După teorema lui

PAPPUS triunghiul $A_1B_1C_1$ are prin urmare acelaş centru de greutate cu triunghiul ABC*).

Observaţie. După cum se vede din demonstraţia precedentă, restricţiunea din enunţ ca raportul α să fie diferit de β nu este necesară. *Triunghiurile* ABC, A'B'C', $A_1B_1C_1$ *au acelaş centru de greutate şi în cazul când rapoartele* α *şi* β *sunt egale.* Trebue numai, ca şi în enunţul problemei, împărţirea laturilor şi segmentelor să se facă mergând pe perimetrul triunghiului ABC în acelaş sens.

V. CRISTESCU.

PROBLEMA 2705. *Ce numere întregi trebuesc date lui* p *şi* q *pentru ca expresia:*

$$3p^2 - 12pq + 7q^2,$$

să aibă cea mai mică valoare absolută posibilă?

P. SERGESCU.

PROBLEMA 2903. *Se consideră expresiunea.*

$$3p^2 - 12pq + 7q^2,$$

unde p *şi* q *sunt numere întregi. Să se afle ce valori trebuesc date lui* p *şi* q *pentru ca această expresiune să obţină cea mai mică valoare absolută posibilă. Care e acea valoare?*

Aceiaşi chestiune pentru expresiunea:

$$15p^2 - 8pq + 2q^2.$$

P. SERGESCU.

Problemele acestea fac parte din analiza nedeterminată, sau analiza diofantică, după numele celui dintâi matematician care s'a ocupat de astfel de chestiuni. Domeniul analizei nedeterminate e compus din o mulţime de probleme foarte interesante, dar destul de greu de rezolvat. Intre matematicianii celebri, cari au reuşit să dea unele soluţiuni generale, trebue să amintim în primul rând pe FERMAT, EULER şi LAGRANGE. Acesta din urmă a tratat complet problema găsirei valorii absolute minime pe care o ia expresiunea $Ap^2 + 2Bpq + Cq^2$, unde p şi q sunt numere întregi variabile.

*) A se vedeà: **F. G.—M.**, *Exercices de Géométrie*, VI-e édition, question 1201, p. 513.

Soluția lui LAGRANGE se bazează pe aproximarea unui număr irațional printr'o fracție continuă. Ar fi de foarte mare folos pentru cititori să studieze admirabilele note ale lui LAGRANGE. Ele se găsesc ca supliment la Vol. I din opera completă a lui Euler (algebra), sau în vol. VII din opera completă a lui LAGRANGE (pag. 65 s. q. q). Procedeul general din memoriul citat poate fi însă simplificat în diferite cazuri particulare. Dintre aceste cazuri particulare fac parte expresiunile date în enunț. Ele aparțin la două categorii diferite prin faptul că:

$$3p^2 - 12pq + 7q^2 = 3(p - 2q)^2 - 5q^2$$

se poate scrie sub forma unei *diferențe de patrate*, pe când:

$$2q^2 - 8pq + 15p^2 = 2(q - 2p)^2 + 7p^2,$$

e o sumă de patrate. Cazul al doilea e mai ușor de tratat și are un număr finit de soluțiuni, pe când cazul întâi are o *infinitate* de soluțiuni.

Numerele întregi p și q fiind diferite de 0, expresiunea:

$$2(q - 2p)^2 + 7p^2,$$

va avea cea mai mică valoare, când $(q - 2p)$ și p au cele mai mici valori posibile; adică:

$$p = \pm 1 \qquad \therefore \qquad q - 2p = 0.$$

Deci soluțiile sunt $p = \pm 1$, $q = \pm 2$ (unde semnele se corespund). Cea mai mică valoare absolută posibilă pe care o poate lua expresia:

$$15p^2 - 8pq + 2q^2,$$

este 7 pentru $p = \pm 1, q = \pm 2$.

Pentru a studia expresiunea:

$$3p^2 - 12pq + 7q^2,$$

vom pune: $p - 2q = s$ și atunci s e și el întreg, iar expresia devine:

$$P = 3s^2 - 5q^2.$$

Câteva observări preliminare pot da indicațiuni asupra valorii absolute minime a acestei expresii, când q și s sunt întregi. In adevăr, presupunând succesiv că s e $\mathscr{M}$ 5, $\mathscr{M}$ 5 ± 1, $\mathscr{M} 5 \pm 2$, se deduce că $P = \mathscr{M}$ 5 ± 2. Deci valoarea minimă căutată

ar puteà fi 2, sau 7, etc. De îndată ce avem aceste indicaţiuni, am puteà rezolvà problema în chipul următor: Să rezolvăm în întregi una din ecuaţiile:

$$3s^2 - 5q^2 = \pm 2.$$

Studiul rezolvărei în numere întregi a ecuaţiei $x^2 - Ay^2 = B$ (la care se poate reduce ecuaţia de mai sus) a fost făcut de EULER în. Algebra citată. Concluzia lui e că dacă ecuaţia admite o soluţie, ea are o infinitate de soluţii. LAGRANGE (loc. cit.) a reluat chestiunea dând un procedeu de a calculà o infinitate de soluţii. De fapt, dacă ecuaţia are o soluţie, ea admite o dublă infinitate de soluţii, pe care le-am pus în evidenţă şi am arătat cum se pot calculà, într'un memoriu încă nepublicat. Metoda lui LAGRANGE conduce la rezultatul că ecuaţia:

$$3s^2 - 5q^2 = -2$$

are o infinitate de soluţii, căci ea are soluţia evidentă $q = s = 1$. Deci valoarea absolută minimă a lui P este 2, iar valorile corespunzătoare ale lui p şi q se pot găsì fără nici o dificultate teoretică, urmând metoda indicată de LAGRANGE (loc. cit.) pentru rezolvarea ecuaţiei $x^2 - Ay^2 = B$.

In soluţia de faţă, vom găsì numerele s şi q căutând direct minimul lui P, când s şi q sunt întregi, care are loc în acelaş timp cu acela al expresiei:

$$s^2 - \frac{15}{9}q^2 = \left(s - \frac{\sqrt{15}}{3}q\right)\left(s + \frac{\sqrt{15}}{3}q\right).$$

Sistemul de numere s_0, q_0 poate da o soluţie probabilă, dacă pentru toate sistemele de numere întregi s şi q, respectiv mai mici decât s_0 şi q_0, expresiunea considerată are o valoare absolută superioară celei corespunzătoare lui s_0 şi q_0. Atunci, pentruca să găsim numerele s_0 şi q_0, observăm că factorul $s + (\sqrt{15}/3)q$ creşte în acelaş timp cu fiecare din câtimile s şi q. Prin urmare, pentruca sistemul s_0, q_0 să dea un minimum al valorei absolute a lui P, trebue ca pentru toate sistemele de valori întregi:

să avem: $s \leqslant s_0$, $q \leqslant q_0$,

$$\left| s - \frac{\sqrt{15}}{3}q \right| \geqslant \left| s_0 - \frac{\sqrt{15}}{3}q_0 \right|$$

$$\left| \frac{s}{q} - \frac{\sqrt{15}}{3} \right| \geqslant \left| \frac{s_0}{q_0} - \frac{\sqrt{15}}{3} \right|.$$

Dar această din urmă inegalitate arată, prin definiția fracțiilor continue, că s_0/q_0 trebue să fie una din *redusele* desvoltărei lui $\sqrt{15}/3$ în fracție continuă. Dar această desvoltare este calculată după teoria generală a fracțiilor continue:

$$\frac{\sqrt{15}}{3} = 1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2 + \cdots}}}}}}$$

Redusele succesive se calculează pe cale recurentă. Insemnând redusa de ordinul n cu s_n / q_n și primul numitor următor cu μ_n, avem:

$$s_{n+1} = \mu_n s_n + s_{n-1} \quad , \quad q_{n+1} = \mu_n q_n + q_{n-1}.$$

Aplicând la cazul nostru, obținem tabloul următor, care poate fi continuat nesfârșit după legea de recurență enunțată:

$\pm s$	$\pm q$	μ
1	0	1
1	1	3
4	3	2
9	7	3
31	24	2
71	55	3
244	189	2
559	433	3 etc.

Introducând aceste valori ale lui s și q în expresia lui P, se obțin *alternativ* valorile $+3$ și -2. Rezultă că minimul valorii absolute a lui P este **2**, iar sistemele de numere întregi s *și* q, care dau acest minimum, sunt cele din liniile de rang par.

Revenind acum la variabila p, observăm că avem:

$$p = s + 2q.$$

Deci, mărginindu-ne la sistemele pozitive de soluții, obținem rezultatul că cea mai mică valoare absolută pe care o ia expresia propusă, când p și q sunt pozitivi, este 2, iar această valoare ($P = -2$) e atinsă pentru o *infinitate* de sisteme de soluții și anume:

s	-1	$+1$	-9	$+9$	-71	$+71$	-559	$+559$....
p	1	3	5	23	39	181	307	1425....
q	1	1	7	7	55	55	433	433....

Notă. — Niciuna din soluţiile trimise de corespondenţi n'a fost completă; cei mai mulţi s'au mărginit la primele două sisteme de soluţii, fără să observe că problema are o infinitate de soluţii. Menţionăm încercările de rezolvare ale D-lor: I. C. Georgescu (cl. VII liceul din Craiova), Fl. Negretzu (cl. VI liceul din Piteşti) şi W. Solomon (cl. V liceul Matei Basarab). D-l I. T. Bârsu (cl. VIII liceul din Constanţa) a dat cinci sisteme de soluţiuni.

PROBLEMA 2712. *Coardele determinate de conicele unui fascicol punctual pe o conică fixă, trecând prin două din punctele comune acestora, trec printr'un acelaş punct fix. Să se enunţe proprietatea corelativă.*

C. H. Nicolau.

Punctele de intersecţie ale tangentelor comune conicelor unui fascicol tangenţial şi unei conice fixe, tangentă la două din dreptele tangente acestora, sunt colineare.

T. A. Tănăsescu.

PROBLEMA 3004. *Razele* OA *şi* O'A' *a două cercuri fixe fac între ele un unghiu constant. Din un punct fix* M *de pe* OO' *se duc paralele la* OA *şi* O'A', *care întâlnesc dreptele* O'A *şi* OA', *respectiv în* N *şi* N'. *Să se demonstreze că al patrulea vârf al paralelogramului* MNN'M' *se găseşte pe* AA' *şi să se găsiască locul geometric al punctelor* N, N' *şi* M'.

Locot. Col. Gh. Buicliu.

Soluţie dată de d-nii: C. I. Georgescu (Lc. Mihai Viteazul, Bucureşti); I. Coşereanu (Şc. Politechnică, Timişoara); A. Tauber (Lc. Laurian, Botoşani); I. St. Teodorescu (Lc. Ploeşti); A. Popeanu, M. Adam (Lc. Constanţa); S. Lăzărescu, C. Mihăescu (Lc. I. Maiorescu, Giurgiu); T. Popoviciu (Lc. Moise Nicoară, Arad); D. Măru (Lc. Alexandri, Galaţi); I. Constantinescu, M. Focşeneanu (Lc. militar, Mânăstirea Dealului); M. Grünbaum, B. Barbălat (Lc. Bârlad); P. Katz (Lc. Comunităţii Israelite, Galaţi); E. Balan şi A. Buşilă.

Fie M' punctul unde paralela din N' la MN taie pe AA'. Din asemănarea triunghiurilor ce se formează prin aceste construcţii, se deduce imediat:

$$M'A'/M'A = N'A'/N'O = MO'/MO = NO'/NA,$$

care arată că NM' e paralelă cu MN' şi că deci figura MN M'N' este paralelogram.

Triunghiurile MO'N, OO'A şi MON', O'OA' dau

$$MN = \frac{MO'}{OO'} \cdot OA = Ct. \text{ şi } MN' = \frac{MO}{OO'} \cdot OA' = Ct.$$

Deci N şi N' descriu două cercuri cu centrul în M.

Ultimele 2 relaţiuni împreună cu faptul că unghiul razelor OA, O'A' este constant, arată că paralelogramul MNM'N' are laturile şi unghiurile constante. Prin urmare şi diagonala MM' este constantă şi deci M' descrie tot un cerc constant.

Observaţiuni. 1°. Paralelogramul MNM'N' având toate elementele constante, toate punctele lui descriu cercuri cu centrul în M.

A. Buşilă.

2°. Punctul M' se află pe AA' ori care ar fi unghiul razelor OA, O' A'; de asemenea, locurile lui N şi N' sunt independente de acest unghiu.

T. Popoviciu.

3°. Paralela din N' la MN şi paralela din N la MN' taie pe AA' respectiv în M' şi M''. Majoritatea corespondenţilor au demonstrat că: M'A/M'A' = M''A/M''A' şi au conchis că punctele M' şi M'' *se confundă*, ceeace nu este adevărat. Relaţiunea aceasta arată că punctele M', M'' se confundă, **sau** că punctele A, M', A', M'' formează o diviziune armonică.

G. B.

EXERCIŢII.

55. Care sunt ultimele două cifre care termină un cub?

M. Adam.

R. Din:

$$(10z + u)^3 = 1000z^3 + 3.10^2 z^2 u + u^2(30z + u),$$

reese că numai ultimul termen dă ultimele cifre ale cuburilor. Dând valori lui z şi u găsim: 00, 01, 03, 04, 07, 08, 11, 12, 13, 16, 17, 19, 21, 23, 24, 25, 27, 28, 29, 31, 32, 33, 36, 37, 39, 41, 43, 44, 47, 48, 49, 51, 52, 53, 56, 57, 59, 61, 63, 64, 67, 68, 69, 71, 72, 73, 75, 76, 77, 79, 81, 83, 84, 87, 88, 89, 91, 92, 93, 96, 97, 99.

56. Se cer patratele perfecte de patru cifre, în care prima cifră întrece cu 1 produsul celei de a doua cu a patra, iar a treia întrece cu 1 pe a patra.

I. Dragomir.

R. Dintre grupele de două cifre care pot termină un patrat, corespund enunţului numai 01, 56, 89, deci patratele sunt de formele $ms01$, $ms56$, $ms89$. La primele, $m = s + 1$ şi numerele devin $11 \times s91$, deci $s91 = M11$,

$s = 8$ şi avem $9801 = 99^2$. La al doilea, $m = 6s + 1$ şi nu putem lua decât $s = 0$ şi $s = 1$, care ne dau numerele 1056 şi 7156, care nu sunt patrate. La al treilea $m = 9s + 1$ şi nu putem lua decât $s = 0$, de unde numărul $1089 = 33^2$.

57. Se dă un triunghiu ABC şi un fascicol de conice tangente în B şi C la AB şi AC.

Polarele baricentrului triunghiului ABC, faţă de conicele fascicolului, sunt paralele cu BC.

Gr. Moisil.

R. Luând triunghiul de referinţă ABC, ecuaţia baricentrică a fascicolului considerat, este : $\alpha^2 - \lambda\beta\gamma = 0$, iar ecuaţia polarei lui G : $2\alpha - \lambda\beta - \lambda\gamma = 0$, care taie pe BC în punctul (0, 1, — 1) dela infinit.

58. Se dă un trapez ABCD, dreptunghic în A şi D. Prin I, mijlocul lui BC, se duce o perpendiculară pe BC, care taie pe AD în O. Pe OI, se ia $OM = OB = OC$, iar din M, se lasă perpendiculara MN pe AD. Să se arate că $AI = MN = ID$.

D. V. Ionescu.

R. Se observă că triunghiurile OAI, OMN se pot înscrie într'un acelaş cerc de diametrul OB. Unghiurile AOI, MON fiind suplimentare, rezultă că segmentele AI, MN sunt egale.

59. O cutie paralelipipedică, care conţine o cantitate oarecare de lichid, se roteşte în jurul uneia din muchiile orizontale. Să se arată că suprafaţa de separaţie sufere o mişcare de rotaţie, în jurul unui ax, care trece prin centrul său de greutate, atâta timp cât această suprafaţă nu atinge fundul cutiei.

Const. E. Georgescu.

R. In timpul rotaţiei forma volumului lichidului se schimbă, capacitatea sa rămânând aceiaşi. Considerăm volumul lichidului când suprafaţa de separaţie este într'un plan orizontal şi un alt moment, când are o poziţie diferită. Intersecţia acestor două poziţiuni este la nivelul lichidului, iar din egalitatea volumelor se deduce uşor că această intersecţie trece prin baricentrul suprafeţei de separaţiune şi e paralelă cu axa de rotaţie.

60. Să se rezolve ecuaţia :

$$x^3 + 3x^2 - 13x - 15 = 1536.$$

V. Ghiţescu.

R. Putem scrie :

$$(x - 3)(x + 1)(x + 5) = 8.12.16.$$

Rezultă $x_1 = 11$. Celelalte rădăcini sunt date de ecuaţia :

$$x^2 + 14x + 141 = 0.$$

61. Să se determine α şi β astfel ca :

$$\Sigma x^3(y + z) + \alpha \Sigma x^2(y + z)^2 + \beta xyz \Sigma x,$$

să fie divizibil prin $(y + z)(z + x)(x + y)$ şi să se scrie câtul.

Th. Angheluţă.

R. Făcând în expresia dată $y + z = 0$, rezultă că:

$$2(\alpha - 1)y^4 + (2 - \beta)x^2y^2 = 0,$$

de unde $\alpha = 1$; $\beta = 2$.

Polinomul dat fiind omogen şi simetric, câtul este de forma $k(x+y+z)$. Făcând $x = y = z$, găsim $k = 1$.

62. Dacă se pune:

$$A_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots \pm \frac{1}{n},$$

să se afle suma seriei:

$$A_1 - \frac{1}{2}A_2 + \frac{1}{3}A_3 - \cdots \pm \frac{1}{n}A_n \cdots$$

MIRON NICULESCU.

R. Formula stabilită în exerciţiul precedent, ne dă imediat:

$$\sum_1^\infty (-1)^{n-1}\frac{A_n}{n} = \frac{1}{2}\sum_1^\infty \frac{1}{n^2} + \frac{1}{2}(\lg 2)^2 = \frac{1}{12}\pi + \frac{1}{2}(\lg 2)^2.$$

63. Se pune:

$$S_i = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_i$$

suma seriei $\sum_0^\infty u_n$ fiind s, să se stabiliască formula:

$$2\sum_0^\infty S_i\, u_i = s^2 + \sum_0^\infty u_i^2$$

MIRON NICULESCU.

R. Avem succesiv:

$$\sum_0^n u_i S_i = u_0 u_0 + (u_0 + u_1)u_1 + \cdots + (u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n)u_n$$

$$= u_0^2 + u_1^2 + \cdots + u_n^2 + u_0(S_n - S_0) + u_1(S_n - S_1) + \cdots + u_{n-1}(S_n - S_{n-})$$

$$= \sum_0^n u_i^2 + S_n S_{n-1} - \sum_0^{n-1} S_i\, u_i$$

$$= \sum_0^n u_i^2 + S_n^2 - \sum_0 u_i S_i$$

trecând la limită, obţinem relaţia propusă.

64. Să se demonstreze relaţiunea

$$\frac{a^2}{r_a(r_b + r_c)} + \frac{b^2}{r_b(r_c + r_a)} + \frac{c^2}{r_c(r_a + r_b)} = 2,$$

a, b, c, r_a, r_b, r_c fiind elementele obişnuite ale unui triunghiu.

ADRIAN A. BUŞILĂ.

R. Cu ajutorul relațiunilor cunoscute

$$S = (p-a)\,r_a = (p-b)\,r_b = (p-c)\,r_c\,,$$

primul membru se poate scrie succesiv:

$$\sum \frac{a^2}{\frac{S^2}{p-a}\left[\frac{1}{p-b}+\frac{1}{p-c}\right]} = \sum \frac{a^2}{\frac{S^2\,a}{(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}} = \frac{a+b+c}{p} = 2.$$

65. Să se demonstreze relațiunea

$$\sum a\left(\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\right)\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \frac{2R}{r}\,,$$

dintre elementele obișnuite ale unui triunghiu.

Teodor I. Popa.

R. Cu ajutorul formulelor $2S = ah_a = bh_b = ch_c$, primul membru devine:

$$\frac{1}{2S}\sum a\,(b+c)\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \frac{1}{2S}\sum ab\left(\operatorname{tg}\frac{A}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}\right).$$

Ne servim apoi de formulele:

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \frac{r_a}{p}\,,\quad \operatorname{tg}\frac{B}{2} = \frac{r_b}{p}\,,\quad \operatorname{tg}\frac{C}{2} = \frac{r_c}{p}\,,$$

$$S = pr = (p-a)\,r_a = (p-b)\,r_b = (p-c)\,r_c\,.$$

PROBLEME PROPUSE.

3051. Știind că $A > B$ și că $A = 2^{\alpha}$ iar $B = 17^{\beta}$, să se găsiască valorile lui α și β, astfel încât să avem: $\varphi(A) < \varphi(B)$, $\varphi(I)$ fiind indicatorul lui I.

In ce caz avem și $\sigma(A) < \sigma(B)$, $\sigma(I)$ fiind suma numerelor prime cu I și inferioare lui. Căpitan I. Linteș.

3052. Fie M un număr oarecare de m cifre. Se desparte M în grupe de câte $2n$ cifre, dela dreapta spre stânga și fie M_1, suma acestor grupe. Se desparte de asemenea și M_1 în grupe de câte $2n$ cifre și fie M_2 suma acestor noui grupe. Se repetă mereu această operațiune, până se capătă un număr M_i, de cel mult $2n$ cifre.

Să se demonstreze congruența:

$$M \equiv M_i \pmod{(10^n+1)},$$

unde: $n \leqslant \frac{1}{2}m.$

Locot. Gr. Zapan.

3053. Fie ABC un triunghiu înscris în cercul O; A' şi A'' punctele unde bisectoarele unghiului A taie cercul O. Se notează cu P' şi O' proecţiile lui A' pe AB şi AC şi cu P'' şi O'' proecţiile lui A'' pe AB şi AC. Prin P' şi Q' se duc paralele la AA' care taie pe BC în B_1 şi C_1, iar prin P'' şi Q'' se duc paralele la AA'' care taie pe BC în B_2 şi C_2. Să se arate că $BC = B_1C_1 = B_2C_2$.

D. V. Ionescu.

3054. Fie α, β, γ, punctele de intersecţie ale unei drepte Δ cu laturile unui triunghiu ABC, înscris în cercul O, iar A', B', C' punctele unde dreptele $M\alpha$, $M\beta$, $M\gamma$ întâlnesc cercul O (M fiind un punct pe cercul O). Să se arate că perpendicularele ridicate în A', B', C', respectiv pe perechile de drepte (A'M, A'A), (B'M, B'B) şi (C'M, C'C), întâlnesc laturile BC, CA, AB ale triunghiului ABC în şase puncte situate pe două drepte. Pe unde trece una din aceste două drepte? T. Mareş.

3055. Care este drumul cel mai scurt dela un punct la altul, atingând o sferă dată? I. Ionescu.

3056. Să se probeze că ecuaţiile:

$$x^3+3(m+1)x^2+(4m+1)x+m=0,$$

$$x^4+2(2m+3)x^3+5(2m+1)x^2+(6m+1)x+m=0,$$

au toate rădăcinile reale, oricare ar fi m real.

Th. Angheluţă.

3057. Să se rezolve ecuaţia:

$$x^y - y^x = 1,$$

x şi y fiind numere prime. A. Niculescu.

3058. Să se demonstreze identitatea:

$$\Sigma \cos^2 a \sin(b-c) \sin b \sin c + \sin(a-b) \sin(b-c) \sin(c-a) = 0.$$

Emil Ştefănescu.

3059. Să se rezolve sistemul:

$$\operatorname{cosec} x \sec y - \operatorname{cosec} y = 0$$
$$\operatorname{cosec} y \sec x - \operatorname{cosec} x = 0$$

L. Teodoriu.

3060. Să se găsiască înfăşurătoarea polarelor trilineare ale potenţialelor unui punct, în raport cu un triunghiu ABC.

M. Ghermănescu.

Dela apariția ultimului număr s'au primit spre publicare: articole (A), note (N), cereri (C), exerciții (E), probleme propuse (P), recreațiuni (R) și probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela D-nii:

Abramovici A. (3039, A. E.); *Adam M.* (2861, 87, 91, 972, 3015, 21, 28, 39, 43, 49, 50, E. R.); *Antoniu I.* (2861); *Arcadian N.* (2683, 752, 972, 3001 22, 39, E.); *Aron L.* (3026, 29); *Bălan E.* (2773, 3049, P.); *Barbălatt M. B.* (3015, 39, 49); *Blaha N.* (N.); *Blumenfeld D.* (2887, 3039, 49, E.); *Bogdan M.* (2340, 850); *Brătescu M.* (3015, 29); *Bușilă A.* (2260, 3049, E.); *Caragheorghe P.* (E.); *Coșereanu I.* (2701, 978, 3029, 35, 36, P.); *Dobrescu B.* (2838); *Doncescu A.* (3039); *Dordea Tr.* (2340, 3011, C. E. P. R.); *Dragomir I.* (2980); *Epure St.* (3039, 49); *Florescu I.* (2980, 92, 3032); *Focșeneanu M.* (2841, 3004, 07, E. P.); *Froim M.* (2683); *Georgescu I. C.* (2377, 799, 841, 913, 3034, 44, E. P.); *Gheorghiu C.* (3049); *Ghițescu V.* (3011, 37, 41, 49, E.); *Guțu A.* (3007); *Huber I.* (3036, P.); *Iliescu E.* (2861); *Iliescu I.* (3049); *Ionescu L.* (2838, 49, 3049); *Iordache I.* (2972); *Katz P.* (3021, 22, 29, 32, 39); *Katz S.* (3023); *Lăzărescu I.* (2972); *Lăzărescu St.* (2972, 3015, 28, E. P.); *Lazarovici I.* (3029, 39); *Marcus F.* (3022, 39, E. R.); *Marin St.* (3039); *Măru D.* (3004, 15, 22, 28, 29); *Menciu C.* (3022); *Miclescu A.* (3029); *Mihăescu C.* (2972, 3028, 39); *Mihăilescu C.* (3043); *Mirescu P.* (3023, 29, 39, E.); *Moisil Gr.* (3007); *Niculescu Al.* (3043, 44, 50, N. P.); *Oprișanu E.* (3029, 39, 49); *Orănescu O.* (P.); *Petreanu H.* (3023); *Pinchis M.* (2972); *Popa T.* (3039); *Popea O.* (3015, 28, 29, 39, P.); *Popescu D. G.* (3034); *Popoviciu T.* (2838, 3034, 36, 39, A. P.); *Rusu E.* (2972, 3029, 39, 49, P.); *Samoilă D.* (2887, E.); *Sane M.* (3029, 39, 49); *Schönfeld C.* (2887); *Șerbănescu I.* (2989, 3037, 44, 49); *Solacolu S.* (3022, 28); *Solomon D.* (2933, E. P.); *Solomon W.* (2604, 992, 3015, 28, 32, 38); *Stavrat M.* (3049, E.); *Ștefănescu E.* (2795, 2849, 3022, 32, 36, 48, 49, E. N. P); *Stroescu G.* (2856, 3021, E.); *Tauber A.* (3032); *Teodorescu I.* (3007, 50); *Vasilescu I.* (2972); *Vlad O.* (E.); *Weiss L.* (3049, E.).

Problemele de geometrie rezolvate cât și cele de propus a căror soluție nu va fi însoțită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în considerațiune.

Soluțiunile primite în ultimul timp la problemele: 1948, 2091, 145, 87, 278, 95, 98, 318, 40, 54, 59, 77, 94, 98, 610, 40, 51, 61, 65, 82, 83, 88, 719, 28, 66, 73, 99, 838, 56, 60, 61, 72, 79, 87, 88, 91, 95, 905, 06, 10, 13, 20, 29, 31, 32, 46, 55, 60, 65, 72, 83, 86, 90, 91, 93, 3000, 10, 12, 14, 17, 19, 31, 40 și 47 nu au fost încă examinate de redactorii cărora le-au fost repartizate.

Colecțiunea „GAZETEI MATEMATICE“

27 VOLUME

Colecțiunea întreagă . . . . . Lei 1000,—

Se vând și volume izolate, cu prețul de 50 lei, afară de volumele: I, X, XV, XIX, XX și XXI care se vând numai cu colecțiunea întreagă.

Biblioteca „GAZETEI MATEMATICE“

1. **I. Ionescu, G. Țițeica, A. G. Ioachimescu și V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Aritmetică, Geometrie, Algebră și Trigonometrie. (520 pag. cu 3381 probleme).* (Epuizată).

2. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de probleme de algebră* (teoria ecuațiilor), (82 pag. cu 462 probleme). (Epuizată).

3. **N. Abramescu,** *Curs de algebră superioară* pentru cl. VIII reală, *Ediția III revăzută și adăogită,* 1921. (Epuizată). Lei 30,—

4. **A. G. Ioachimescu și G. Țițeica,** *Culegere de probleme de mecanică și geometrie analitică* (222 pag. cu 825 probleme și o planșă) (Epuizată) . . . . . Lei 20,—

5. **Tr. Lalescu și Șt. N. Mirea,** *Culegere de probleme de geometrie descriptivă și cosmografie* . . . . . Lei 15,—

6. **Tr. Lalescu,** Tratat de Geometrie analitică,

Fascicola I (Epuizată) . . . . . Lei 10,—

Idem, Fascicola II Conice . . . . . Lei 20,—

Idem, Fascicola III Cuadrice . . . . . Lei 20,—

7. **Gh. Lazăr,** *Trigonometria drept liniară* (după cursul predat de Gh. Lazăr la colegiul Sf. Sava) . . . . . Lei 5,—

8. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de probleme de Algebră,* ediția II-a revăzută și adăogită, 400 pagini cuprinzând 1765 probleme . . . . . Lei 60,—

La aceste prețuri se vor adăogà taxele poștale pentru expediție.

Biblioteca Technică a „GAZETEI MATEMATICE“

(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

I. Ionescu, *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcțiune și a principiilor de calcul.* Volum legat, cuprinzând 128 de pagini și 15 tabele numerice practice, pentru proiectarea construcțiunilor de beton armat. Lei 12,—

Gazeta Matematică apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 50 lei anual, se plătește înainte și începe la 15 Septemvrie, ori când s'ar face achitarea lui în cursul anului și nu se face pe termene mai scurte de un an. Abonamentele, schimbările de adrese, reclamațiunile și cererile pentru cărți din biblioteca «Gazetei Matematice», se vor trimete D-lui: **I. D. Teodor,** Inginer Inspector General, Directorul General al Regiei Monopolurilor Statului (adresa: Fabrica de Chibrituri, București).

Schimburile de reviste, uvrage pentru recenzii și orice alte cereri, afară de cele privitoare la cassierie și expediție, se vor trimite D-lui Inginer Inspector General I. IONESCU, Str. Căluşei 23, București.

Mur Asociațiunea pentru cultura și literatura poporului Român din Sibiu

ZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

ANUL XXVIII.

NUMĂRUL 10 — IUNIE 1923

SUMARUL

1. Asupra unei clase de ecuații algebrice cu toate rădăcinile reale . . . . . *Th. Angheluță.*
2. O problemă cu indicatori . . . . . *Căpitan I. Linteș.*
3. Note Matematice: 68 — 79.
4. Chestiuni de Examen.
5. Bibliografie.
6. Cereri.
7. Probleme Rezolvate: 1907, 2532, 2690, 2992, 2998, 3001, 3002, 3028, 3029.
8. Exerciții: 66 — 75.
9. Probleme propuse: 3061 — 3070.

ABONAMENTUL 50 LEI PE AN.

BUCUREȘTI
IMPRIMERIA FABRICILOR DE CHIBRITURI ȘI TIMBRE - FILARET
1923

SPRE ŞTIINŢA

Gazeta Matematică se publică de către **Societatea „Gazeta Matematică“** având sediul în Bucureşti, compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie de 3 membri, care pentru anul XXVIII se compune din D-nii **N. I. Georgescu,** Inginer-Şef, Director General al Serviciului Imbunătăţirilor Funciare, **Tr. Lalescu,** Doctor în Matematici, Profesor Universitar şi **I. D. Teodor,** Cassier, Inginer Inspector General, Profesor la Şcoala Politechnică, Directorul General al Regiei Monopolurilor Statului.

Manuscrisele destinate „Gazetei Matematice“ se vor trimite D-lui GEORGE BORNEANU, Inginer, sub-directorul Fabricilor de chibrituri şi timbre, Bucureşti.

Se pot trimite şi pe acelaş nume în Str. Sf. Constantin 31, Bucureşti.

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse şi exerciţiile se vor redijà în conformitate cu instrucţiunile se se pot procurà dela D-l Cassier *I. D. Teodor,* în schimbul sumei de 1 (un) leu ce se poate trimite prin poştă.

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evità confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie.

In vederea sporirii taxelor poştale, corespondenţii pot trimete de aci inainte manuscrisele scrise pe ambele pagini ale unei foi, fără a lăsà spaţii albe pe margini sau dedesubt, tăind foile în consecinţă.

Nu se admite însă a se tratà pe aceeaşi foaie mai multe chestiuni sau probleme.

Articolele, notele, problemele propuse, exerciţiile, recreaţiile ce se trimit pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICĂ“, trebue să fie originale, iar nu luate din cărţi sau reviste speciale de matematici.

Probleme nerezolvate: 171, 485, 581, 691, 886, 87, 914, 44, 1000, 08, 56, 58, 83, 92, 146, 62, 78, 80 214, 36, 70, 71, 87, 97, 99, 355, 64, 67, 77, 79, 84, 86, 98, 99, 412, 50, 82, 90, 553, 84, 87, 626, 37, 50, 76, 79, 80, 711, 29, 33, 35, 53, 64, 90, 835, 76, 82, 84, 905, 06, 14, 29, 44, 45, 49, 59, 73, 79, 87, 2003, 04, 16, 17, 32, 70, 74, 94, 111, 12, 26, 56, 70, 216, 300, 47, 53, 91, 92, 95, 408, 14, 20, 22, 28, 34, 39, 40, 43, 44, 48, 53, 56, 59, 61, 62, 66, 69, 71, 73, 77, 79, 81, 84, 87, 91, 97, 500, 01, 02, 03, 10, 11, 12, 24, 29, 37, 39, 43, 44, 45, 46, 55, 56, 60, 69, 71, 77. 78, 80, 82, 87, 91, 93, 96, 97, 99, 602, 07, 08, 10, 13, 23, 35, 38, 41, 43, 44, 45, 47, 50, 55, 56, 58, 60, 65, 69, 71, 75, 84, 86, 92, 93, 94, 95, 96, 709, 12, 13, 17, 27, 35, 38, 43, 45, 47, 58, 64, 69, 78, 80, 89, 96, 809, 14, 16, 29, 51, 53, 57, 60, 65, 86, 88, 89, 902, 09, 12, 15, 16, 26, 36, 45, 53, 56, 61, 83, 95, 3000, 05, 08, 10, 13, 19, 20, 25, 33, 40, 42, 45, 46, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 60.

La redacţia revistei **„Gazeta Matematică“** *se primesc abonamente pentru* **„Revista de matematicas y fisicas elementales“** *din Buenos-Aires, Anul V (Mai 1923 — Aprilie 1924). Costul unui abonament anual este de 70 lei.*

„ţin în acelaş mod, aplicându-se, cu mici variante, aceleaşi norme, masa „comună se ţine regulat în fiecare an şi de fiecare dată se respectă aceleaşi „obiceiuri... Tot în tradiţie este şi cuvântarea morală.

„Altădată, când ţineam această cuvântare, recurgeam la artificii, de „pildă, făceam să vorbească un spirit din antichitate... astăzi îmi permit a „ataca direct chestiunea, căci toată lumea, până şi copiii sunt pătrunşi de „simţul realităţii.

„In fiecare din noi este o energie potenţială, constituită din darurile „moştenite dela părinţii şi strămoşii noştri şi avem datoria a ne folosi de „ea. Este banal poate, dar trebue s'o spunem: aceste energii potenţiale „trebuiesc folosite în sens patriotic. Avem o ţară mândră, ale cărei bogăţii „nici nu le cunoaştem în deajuns; avem un neam ales, cu cele mai frumoase „însuşiri moştenite; avem deci posibilitatea a ridică treapta noastră de cul-„tură. Energia noastră potenţială trebue transformată în energia actuală, spre „a ridică neamul nostru în rândul neamurilor mari!..."

Cuvântările D-lor Profesori A. Ioachimescu şi G. Ţiţeica au mişcat adânc tinerimea; de aceea, imediat după D-l G. Ţiţeica, rosteşte dintre co-respondenţi, cuvântarea sa, D-l Georgescu-Roegen: „Cu aceleaşi sentimente „de plăcere şi bucurie şi cu aceeaşi emoţiune ca şi generaţiile trecute ne „aflăm astăzi în faţa D-v. Mai ales, cei ce ne prezentăm ultima oară simţim „regretul de a nu mai avea plăcerea concursului. Pentru mulţumirea celor „ce au muncit dezinteresat, promitem solemn că vom urmă, fără abatere, „calea care ni s'a indicat". Aplauzele colegilor săi, dovedesc că D-l Georgescu exprimă într'adevăr simţimântele lor.

Apoi, în capul mesei se ridică D-l Profesor Ion Ionescu, care pare ca are multe de spus. Intr'adevăr, D-sa începe cu regretul că aritmetica, regina matematicilor, după cum se exprimă Gauss, a rămas şi anul acesta fără admiratori Trecând apoi în domeniul misticismului matematic, D-l I. Ionescu constată că numărul 28, care este un „număr perfect" în aritmetică, este perfect şi pentru „Gazeta Matematică". „Intr'adevăr, spune „D-sa, „Gazeta Matematică" a apărut în anul al XXVIII-lea în condiţiuni „excelente, pe o hârtie de prima calitate şi a produs admiraţia matematicia-„nilor străini, cari au fost surprinşi de iuţeala cu care „Gazeta Matematică" „s'a refăcut după războiu".

D-l I. Ionescu se întreabă care sunt necunoscutele acestei enigme şi ne desvălue secretul succesului:

1) D-l I. D. Teodor a luat „Gazeta Matematică" din mâinile specula-torilor de... tipografi. La urarea de sănătate pe care i-o face oratorul, se asociază cu entuziasm toţi cei prezenţi şi D-l I. D. Teodor este îndelung aplaudat.

2) D-nii G. Borneanu şi G. Iliescu, directorul şi subdirectorul fabricii de chibrituri se ocupă cu stăruinţă de compunerea numerelor Gazetei, de redactare, convocări, tipărire, alcătuirea tablei de materii; ori, toate aceste lucrări care, cerând o atenţie şi o continuitate deosebită, se făceau cu mari dificultăţi, mai înainte, de diferite persoane, astăzi se execută în cele mai bune condiţiuni. De aceea, se cuvine să le adresăm toate mulţumirile noastre, mai cu seamă că tot D-lor au pregătit, după războiu, mesele comune ale „Gazetei Matematice".

3) Mai închinăm şi în sănătatea D-lui Gh. Popescu care în calitate de secretar general al Ministerului Comunicaţiilor a înlesnit călătoria gratuită a concurenţilor pe căile ferate până la Bucureşti.

4) In sfârşit, mai închinăm şi în sănătatea D-lui G. Thierrin care a oferit locuinţă pentru corespondenţi.

După D-l I. Ionescu, ia din nou cuvântul D-l A. Ioachimescu pentru a aduce câtevà precizări. La început, concursurile se ţineau scrise, în provincie şi numai în urma propunerii D-lui G. Ţiţeica se înfiinţează şi examenul oral. In acest scop, partea cea mai dificilă, care erà găzduirea elevilor a fost rezolvată de D-nul G. Thierrin, care de 17 ani primeşte la Institutul D-sale pe concurenţi. „Ii urăm sănătate D-lui Thierrin, încheie D-l A. Ioachimescu, ca să „poată să mai găzduiască încă 30 ani deacum înainte pe viitorii corespondenţi"...

D-l Profesor T. Lalescu mărturiseşte că a sacrificat din preocupările sale ştiinţifice spre a puteà să lucreze pentru unitatea naţională. In acest scop, D-sa, ca bănăţean, a imitat opera ştiinţifică a „Gazetei Matematice", creând „Gazeta Matematică" din Timişoara, spre a ridica nivelul matematic al elevilor din liceele Transilvaniei la nivelul celor din regat.

„Am astăzi mulţumirea sufletească, încheie D-l T. Lalescu, că acel care „a debutat la Gazeta din Timişoara a venit la *alma mater* şi doresc ca prin „acţiunea şi nivelul său ştiinţific, revista noastră bănăţeană să se apropie „cât mai mult de acea din Bucureşti!"

Dar nu numai cei prezenţi vorbesc. Mai sunt departe de noi membri ai Gazetei, cari ar fi avut dorinţa să participe la concursul din acest an, dar împrejurările i-au împiedicat. Astfel D-l V. Cristescu ne citeşte o scrisoare în acest sens din partea D-lui Colonel C. Felix, care urează viaţă lungă „Gazetei Matematice" precum şi o telegramă din Paris, din partea D-lui Profesor P. Sergescu, cu conţinutul:

„*Vivent fondateurs, colaborateurs Gazeta Matematica!*"

Nu este exclus ca peste câţivà ani membrii Societăţii noastre să participe la serbarea tradiţionaiă cu discursuri ţinute prin... telefonia fără fir.

Cuvântările se încheie prin toastul D-lui Inginer Gh. Popescu care închină în sănătatea D-lui Ion Ionescu şi cu toastul ultra-modern al D-lui O. Onicescu care închină pentru triunghiul einsteinian cu ... patru laturi, din fruntea Gazetei Matematice!

Nici de data aceasta n'au lipsit producţiunile artistice: D-l B. Barbălatt zice din vioară arii vioaie naţionale cu acompaniarea orchestrei, D-l Gr. Moisil recitează câtevà monoloage şi cuplete spirituale, iar corul corespondenţilor condus de D-l Profesor G. Dumitrescu cântă câtevà arii patriotice şi naţionale.

Totuşi nivelul artistic este cevà mai scăzut decât cel matematic şi mai scăzut decât pe vremuri, ceeace este un păcat, căci arta înnobilează sufletul şi cultivarea ei, cel puţin cu titlul de diletant, este semnul unor superioare necesităţi sufleteşti. Ea contribue la formarea acelei personalităţi, despre care vorbeam la începutul acestei dări de seamă, căci punctul de vedere estetic primează asupra tuturor celorlalte.

După discursuri, cântece şi monoloage, urmează pe la miezul nopţii dansurile. După o horă potolită, de mai multe ori concentrică, sau spirală, urmează o sârbă vioaie şi cei vârstnici par a juca cu mai mult foc decât chiar tineretul.

La ora 2 pleacă rânduri-rânduri membrii şi corespondenţii „Gazetei Matematice", purtând fiecare dorinţa de a se regăsi împreună şi mai târziu, tot într'o sală frumos împodobită, poate în „Casa proprie", la serbarea tradiţională a Concursurilor, cu membri cât mai mulţi şi cu corespondenţi cât mai bine pregătiţi.

Cristea Mateescu.

ASUPRA UNEI CLASE DE ECUAŢII ALGEBRICE CU TOATE RADACINILE REALE.

Să considerăm următorii determinanţi, a căror lege de formaţiune este clară:

$$(1)\quad \Delta_n = \begin{vmatrix} 1+k\alpha & -\alpha & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1+k\alpha & -\alpha & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & -\alpha \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1+k\alpha \end{vmatrix}$$

$$(2)\quad D_n = \begin{vmatrix} 1+k\alpha & -\alpha & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1+k\alpha & -\alpha & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & -\alpha \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix}$$

Se observă că determinantul (2) diferă de (1) numai prin ultimul element din linia ultimă.

Făcând diferenţa între (1) şi (2) avem:

$$\Delta_n = D_n + k\alpha\,\Delta_{n-1}$$

$$\therefore \quad (3) \qquad D_n = \Delta_n - k\alpha\,\Delta_{n-1}.$$

Pe de altă parte, desvoltând pe Δ_n după ultima coloană, se obţine:

$$(4) \qquad \Delta_n = (1+k\alpha)\,\Delta_{n-1} + \alpha\,D_{n-1}.$$

Scriind relaţia (3) pentru $n-1$ şi înlocuind pe D_{n-1} în (4) prin valoarea lui, obţinem:

$$(5) \qquad \Delta_n = [1+(1+k)\alpha]\,\Delta_{n-1} - k\alpha^2\,\Delta_{n-2}.$$

Luând $\Delta_0 = 1$ şi $\Delta_1 = 1+k\alpha$, relaţiunea (5) este adevărată şi pentru $n = 2$.

Se obţine astfel următorul şir de polinoame:

$$(6) \qquad \Delta_n, \Delta_{n-1}, \dots, \Delta_2, \Delta_1, \Delta_0,$$

ce satisfac următoarelor proprietăţi ale unui şir STURM:

1°. Ultimul păstrează un semn invariabil.

2°. Două polinoame consecutive nu se pot anulà pentru aceiaşi valoare a lui α, căci admiţând contrarul, pentru Δ_i şi Δ_{i-1} avem după (5):

$$(5') \qquad \Delta_i = [1+(k+1)\alpha]\Delta_{i-1} - k\alpha^2\Delta_{i-2}$$

şi rezultă că Δ_{i-2} să se anuleze pentru aceiaşi valoare a lui α, căci Δ_h, pentru $\alpha = 0$, este egal cu unitatea, oricare ar fi h.

3°. Presupunând $k > 0$, pentru o rădăcină a lui Δ_{i-1}, polinoamele care îl cuprind, adică Δ_i şi Δ_{i-2} sunt de semne contrare.

Nu putem şti deocamdată ce se petrece cu raportul Δ_{n-1}/Δ_n, când α trece prin o rădăcină a lui Δ_n. Pentru a puteà trage concluzii asupra naturei rădăcinilor lui Δ_n, se observă că Δ_1 are pe k drept coeficient al termenului de gradul întâi. Se deduce din aproape în aproape că Δ_n are pe k^n drept coeficient al termenuiui de gradul n, care este cel mai înalt.

Dacă şi şirul (6) se substitue $(-\infty, 0)$, se observă că se pierd n variaţiuni, deci Δ_n are toate rădăcinile negative, iar Δ_{n-1} joacă rol de derivată faţă de Δ_n, rădăcinile lui Δ_{n-1} separând pe ale lui Δ_n.

Să ne ocupăm acum de determinantul (2).

Din relaţiunile (3) şi (4) se deduce:

$$\Delta_{n-1} = D_n - \alpha D_{n-1} \qquad \text{şi} \qquad \Delta_n = D_{n+1} - \alpha D_n.$$

Acestea nu sunt altcevà decât desvoltarea lui D_n după elementele ultimei coloane. Inlocuind în (3) pe Δ_n şi Δ_{n-1} prin aceste din urmă valori să găseşte:

$$D_{n+1} = [1+(k+1)\alpha]D_n - k\alpha^2 D_{n-1}.$$

Deci D_n satisface aceeaşi relaţie de recurenţă ca şi Δ_n. Dacă se ia $D_1 = 1$, atunci şirul:

$$D_n, D_{n-1}, \ldots, D_2, D_1$$

se bucură de cele 3 proprietăţi ale şirului (6). Aici să observă că D_n este de gradul $n-1$ şi coeficientul termenului celui mai înalt este $(1+k)^n$. Deci D_n are toate rădăcinile negative, D_{n-1} separând rădăcinile lui D_n.

Dacă în relaţiunea (3), înlocuim pe Δ_{n-1} in funcţie de D_n şi D_{n-1} avem relaţiunea de recurenţă:

$$\Delta_n = (1+k\alpha)D_n - k\alpha^2 D_{n-1}.$$

Deci D_n separă rădăcinile lui Δ_n.

Să considerăm acum conbinaţiunea lineară

$$\mathfrak{D}_n = \Delta_n + m D_n ,$$

evident că $\mathfrak{D}_n$ satisface aceeaşi relaţiune de recurenţă şi este de gradul n, coeficientul lui α^n fiind k^n.

Se vede deci că m fiind orice număr real, iar k pozitiv: $\Delta_n + m D_n$, are toate rădăcinile reale. Dacă $m = -1$,

$$\mathfrak{D}_n = \Delta_n - D_n = k\alpha\, \Delta_{n-1} .$$

Mai general, orice ecuaţie ce satisface relaţiunea de recucurenţă (5), are rădăcinile reale, rămânând în cantităţi reale. Este uşor a construi astfel de ecuaţii [1]).

TH. ANGHELUŢĂ.

O PROBLEMĂ CU INDICATORI.

Iată enunţul problemei ce voesc a studiă:

„Fiind date două numere A *şi* B, *întregi şi pozitive, când vom aveà simultan neegalităţile:*

$$A > B,$$

$$\varphi(A) < \varphi(B),$$

unde $\varphi(A)$ *şi* $\varphi(B)$ *sunt indicatorii numerelor date?*

Am afirmat mai sus că „voesc a studiă", de oarece problema de mai sus pe care mi-am propus-o, n'am putut s'o rezolv complet, ci numai am găsit anumite condiţii, pe care ar trebui să le îndeplinească numerele A şi B, care condiţiuni, găsindu-le interesante, le-am publicat mai jos.

Condiţiunea I. *Dacă numerele* A *şi* B *sunt prime absolute, atunci ele nu satisfac simultan neegalităţile problemei.*

[1]) Datoresc D-lui Profesor G. ŢIŢEICA observaţia că D_n separă rădăcinile lui Δ_n şi că $\mathfrak{D}_n$ are rădăcinile reale.

In cazul particular $k = 1$, se obţine pentru D_n un polinom ce se întâlneşte într'o problemă a D-lui Ing. I. IONESCU (*G. M.* an. 1910 problema 1490).

In adevăr, se vede lesne că dacă A şi B sunt prime absolute, atunci:

$$\varphi(A) = A - 1 \quad \text{şi} \quad \varphi(B) = B - 1;$$

deci ar trebui să avem simultan:

$$A > B,$$

$$A - 1 < B - 1,$$

ceeace nu se poate.

Condiţiunea II. *Dacă numerele* A *şi* B *sunt de formele:*

$$A = A'.K \quad \text{şi} \quad B = B'.K,$$

unde A' *şi* B' *sunt numere prime absolute, care nu divid pe* K, *atunci iarăşi neegalităţile problemei nu sunt simultan satisfăcute.*

In acest caz:

$$\varphi(A) = \varphi(A').\ \varphi(K) = (A' - 1)\,\varphi(K),$$

$$\varphi(B) = \varphi(B').\ \varphi(K) = (B' - 1)\,\varphi(K),$$

deci ar trebui să avem simultan:

$$A > B \quad \text{adică} \quad A' > B',$$

$$\varphi(A) < \varphi(B) \quad \text{„} \quad A' - 1 < B' - 1,$$

deci, iarăşi, nu se poate.

Condiţiunea III. *Dacă* n *şi* p *reprezintă numărul factorilor primi ai lui* A *şi* B, *atunci neegalităţile problemei nu pot avea loc simultan când* $n < p$.

Insemnând simbolic cu Πn produsul:

$$\Pi n = n_1.\, n_2.\, n_3 \ldots . n_k \ldots .,$$

observăm că:

$$\varphi(A) = A.\prod_1^n \frac{a_i - 1}{a_i}$$

şi

$$\varphi(B) = B.\prod_1^p \frac{b_i - 1}{b_i},$$

unde a_i şi b_i sunt factorii primi ai lui A şi B.

Dar, conform problemei, ar trebui să avem:

$$A > B,$$

$$A.\prod_{1}^{n}\frac{a_i-1}{a_i} < B.\prod_{1}^{p}\frac{b_i-1}{b_i}.$$

Cum în ultima neegalitate $A > B$, ar trebui să avem:

1) $$\prod_{1}^{n}\frac{a_i-1}{a_i} < \prod_{1}^{p}\frac{b_i-1}{b_i}.$$

Dar n fiind mai mic ca p — căci așà am presupus — urmează că factorii primi ai lui A să fie mai mari decât ai lui B, pentruca să avem mereu $A > B$; însă știm că o fracțiune de forma: $(n-1)/n$ variază între $\frac{1}{2}$ și 1, când n crește dela 2 la $+\infty$, deci pentru a aveà neegalitatea 1), ar trebuì ca factorii a_i să fie mai mici sau cel puțin egali cu b_i, ceeace nu se poate căci $A > B$.

Condițiunea IV. *Neegalitățile problemei pot fi satisfăcute simultan când:*

$$B < A < (n+1)\,B,$$

n fiind numărul factoriior primi ai lui A *și, bine înțeles, când* A *și* B *respectă condițiunile I, II și III.*

Intrebuințând notațiunele dela *cond. III* și ținând seamă că ar trebuì să avem:

$$\varphi(A) < \varphi(B),$$

adică:

$$A.\prod_{1}^{n}\frac{a_i-1}{a_i} < B.\prod_{1}^{p}\frac{b_i-1}{b_i},$$

mai putem scrie:

$$\frac{A}{B} < \prod_{1}^{n}\frac{a_i}{a_i-1}.\prod_{1}^{p}\frac{b_i-1}{b_i}.$$

Insemnând $a_i = \alpha_i + 1$, scriem:

$$\prod_{1}^{n}\frac{a_i}{a_i-1} = \frac{\alpha_1+1}{\alpha_1}.\frac{\alpha_2+1}{\alpha_2}.\ldots.\frac{\alpha_n+1}{\alpha_n}$$

$$= (1+1/\alpha_1)\,(1+1/\alpha_2)\ldots.(1+1/\alpha_n).$$

Dacă acum, S_i ar reprezentă suma cantităţilor $1/\alpha_1$, $1/\alpha_2$,....$1/\alpha_n$, luate *i* câte *i*, atunci avem:

$$(1+1/\alpha_1)\,(1+1/\alpha_2)\ldots.(1+1/\alpha_n)=1+S_1+S_2+\cdots+S_n.$$

Ori $S_i<1$, deci valoarea maximă a produsului va fi mai mică decât $(1+n)$ şi atunci conchidem că:

$$1<\prod_1^n \frac{a_i}{a_i-1}<n+1.$$

Avem apoi:

$$\frac{1}{2}<\frac{b_i-1}{b_i}<1,$$

aşă precum am stabilit la *cond. III.* Deci:

$$\frac{1}{2^p}<\prod_1^p \frac{b_i-1}{b_i}<1.$$

Atunci desigur că:

$$\frac{1}{2^p}<\prod_1^n \frac{a_i}{a_i-1}\cdot\prod_1^p \frac{b_i-1}{b_i}<n+1,$$

deci: $$A/B<n+1.$$

Insă cum $A>B$, avem $A/B>1$, deci:

$$1<A/B<(n+1),$$

sau:

$$B<A<(n+1)B$$

c. c. t. d.

In rezumat:

Pentru ca neegalităţile problemei, ce mi-am propus, să fie satisfăcute, ar trebui ca:

1. *Numărul factorilor lui* A *să fie mai mare sau egal cu ai lui* B.

2. *Numerele* A *şi* B *să nu fie de forma* A'.K *şi* B'.K, *unde* A' *şi* B' *să fie prime absolute (în acest caz intrând şi cond. I).*

3. *Numerele* A *şi* B *să satisfacă condiţia:*

$$B<A<(n+1)\,B,$$

unde n este numărul de factori ai lui A.

Exemplu:

$$A = 72 = 2^3 . 3^2 \qquad \text{deci } A > B$$
$$B = 68 = 2^2 . 17$$
$$\varphi(A) = 24 \qquad \text{deci } \varphi(A) < \varphi(B)$$
$$\varphi(B) = 32$$

Condițiuni probabil că mai sunt. Dacă D-nii corespondenți, cari se ocupă cu această ramură a matematicelor, vor mai găsi asemenea condițiuni, bucuroși le vom publică.

CĂPITAN I. LINTEȘ.

NOTE MATEMATICE.

68. *Alte zece aritmetici diverse.* (Vezi nota 38 pag. 247).

51. **Figurată.** Vezi *l'Intermédiaire des mathématiciens* anul VII pag. 191.
52. **Financiară.** *J. César & P. Biemont.* — Traité d'arithmétique financière. Paris. 1912.
53. **Ilustrată.** *Cham.* — L'arithmétique illustrée.
54. **Memorativă.** *W. Blackley.* — Arithmetica memorativa. Cambridge 1550.
55. **Lineară.** *L. Pouchet.* — Arithmétique linéaire 1795.
56. **Populară.** Ca la No. 51. Vol. VI pag. 247.
57. **Poziție** (de) *Ed. Lucas.* — *L'arithmétique de position;* in *Récréations mathématiques* (Vol. I pag. 257).
58. **Pregătitoare.** *C. Pendlebury.* — A preparatory arithmétic. Londra 1912.
59. **Uzinei.** *F. Castle.* — Workshop arithmetic. Londra 1915.
60. **Vulgară.** *J. Bolhvidi.* — Arithmeticae vulgaris. Rostock 1613.

(Va urmà) I. IONESCU.

69. *Asupra problemei 2621.* Soluția dată de D-l N. Alexe acestei probleme, în Vol. XXVII pag. 95, nu este completă, căci în afară de numerele în care cifrele sunt proporționale, mai sunt și altele.

Din relația:

$$\frac{100\,a+10\,b+c}{100\,a'+10\,b'+c'}=\frac{a+b+c}{a'+b'+c'},$$

scoatem:

$$100\,a+10\,b+c=k\,(a+b+c),$$
$$100\,a'+10\,b'+c'=k\,(a'+b'+c').$$

Ecuațiile fiind de aceiași formă, putem rezolvà numai prima. Am găsit astfel următoarele soluții, luând pe cele cu cifrele proporționale o singură dată:

k=13.	117, 156, 195.
k=16.	144, 192.
k=19.	**114, 133,** 152, 171, 190, 209, 247, 285.
k=25.	150, 225, 375.
k=28.	**112, 140,** 252, 308, 364, 392, 588.
k=31.	372, 465, 558.
k=37.	**111,** 370, 407, 481, 518, 592, 629.
k=43.	516, 645, 774.
k=46.	**230, 322, 414,** 506, 552, 736, 782, 874, 966.
k=55.	**110,** 605, 715, 825, 935.
k=64.	**320,** 512, 704, 832,
k=73.	511, 730, 803.
k=82.	**410,** 902.

Cu modul acesta și generalizarea dată în Nota Matematică No. 24, Anul XXVII pag. 278, nu generalizează complet problema. Astfel avem:

$$\frac{1417}{1853}=\frac{1+4+1+7}{1+8+5+3},$$

fără ca cifrele să fie proporționale.

M. Vasiliu.
(Bârlad)

In soluțiunea problemei 2621 s'au pierdut soluții, deoarece k s'a presupus întreg, pe când el poate fi și fracționar. O asemenea

scăpare din vedere a făcut-o și D-l M. VASILIU, căci k ar puteà fi și fracționar. Trebuie pus:

$$\frac{100\,a+10\,b+c}{100\,a'+10\,b'+c'}=\frac{a+b+c}{a'+b'+c'}=\frac{m}{n},$$

cu m și n prime între ele, și luat:

$$\begin{cases} 100\,a+10\,b+c=\alpha\,m\ ; \\ 100\,a'+10\,b'+c'=\alpha\,n\ ; \end{cases} \qquad \begin{cases} a+b+c=\beta\,m. \\ a'+b'+c'=\beta\,n. \end{cases}$$

Așà avem soluția:

$$\frac{172}{258}=\frac{1+7+2}{2+5+8}=\frac{10}{15},$$

fără ca cifrele să fie proporționale și fără ca 172 să se dividă cu 10 și 258 cu 15. Chestiunea mai rămâne dar de studiat. Vom publicà o notă care ni se va trimite cu soluția completă.

I. I.

70. *Asupra problemei 2662.* Această problemă, rezolvată în „*Gazeta Matematică*“ vol. XXV pag. 235, se poate generalizà astfel: *Să se găsiască numerele* N *astfel ca:* $N=I(N)+\sqrt[q]{N}$, I(N) fiind indicatorul lui N. (In problemă, $q=2$)

Observând că N va fi de forma: $N=a^{\alpha q}\,.\,b^{\beta q}\,.\,c^{\gamma q}\,\ldots\ldots=M^q$,

și ținând seamă că: $I(N)=N\times\frac{a-1}{a}\times\frac{b-1}{b}\times\frac{c-1}{c}\ldots\ldots$,

deducem, urmând soluția dată: $M^{q-1}=a$, $\quad\therefore\quad N=\sqrt[q]{a^{q-1}}$, de unde reese ușor $q=2$. Problema admite deci ca soluții numai patratele numerelor prime.

A. TAUBER.

71. *Asupra problemei 2962.* In numărul 4 din Decembrie 1922, la pag. 152 — 155, a fost rezolvată o problemă propusă de D-l V. CRISTESCU, asupra unor proprietăți geometrice în legătură cu două drepte isogonale. Soluțiunea originală a D-lui B. M. BARBĂLATT de a utilizà în această chestiune dreapta lui SIMSON, a dat prilejul D-lui V. CRISTESCU să facă o observațiune interesantă și anume că:

Segmentul QR al dreptei lui Simson corespunzătoare unui punct P şi cuprins între două picioare de perpendiculare Q şi R de pe laturile AB şi AC este egal cu suma proectantelor BB' şi CC' pe isogonala lui AP faţă de unghiul BAC. Cu alte cuvinte:

$$QR = BB' + CC'.$$

Această proprietate este o consecinţă a unei alte proprietăţi mai precise şi care este următoarea:

Se ştie că isogonalele a trei drepte, care unesc vârfurile unui triunghiu ABC cu un punct P de pe cercul ABC, sunt paralele între ele. Proprietatea pe care voesc să o amintesc este că *distanţele mutuale dintre aceste isogonale sunt egale cu segmentele* QR, SR *şi* QS *de pe dreapta lui Simson a punctului* P, *cuprinse între picioarele proectantelor* PQ, PR *şi* PS.

De pildă, distanţa între isogonalele AA_1 şi BB_1 este egală cu segmentul QS de pe laturile CA şi CB.

Această proprietate se demonstrează imediat şi e, de altfel, cunoscută. Ţinând seama că suma algebrică a celor trei distanţe este nulă, proprietatea observată de D-l V. Cristescu este de fapt echivalentă cu aceasta, BB'+CC' fiind distanţa, în cazul figurei (pag. 153), dintre isogonalele din B şi C. In cazul general, dacă proprietatea este enunţată sub forma dată de D-l V. Cristescu, trebue însă să menţionăm că este totdeauna vorba de suma algebrică, această sumă putând fi, pentru unele cazuri de figură, o diferenţă aritmetică. In cazul figurei (pag. 153), avem în mod mai precis: QS=BB' şi SR=CC', de unde, prin adunare QR=BB'+CC'.

O demonstraţie geometrică simplă a egalităţii QS = BB' este următoarea: Dreptele PQ şi BB', perpendiculare respectiv pe AC şi AD (vezi fig. pag. 153), fac între ele un unghiu egal cu CAD şi deci şi cu egalul său PAD (dreptele AD şi AP isogonale); deci aceste drepte se întâlnesc pe cercul circumscris ABC într'un punct K.

Patrulaterul inscriptibil ABQK ne dă $\sphericalangle AQB' = \sphericalangle B'KA$. Insă acesta din urmă e egal cu $\sphericalangle ACB$, având aceeaşi măsură în cercul ABC, deci $\sphericalangle AQB' = \sphericalangle ACB$.

Dreptele BB' şi CB sunt paralele şi figura BB'QS este un paralelogram.

Tr. Lalescu.

72. *Asupra notei 42.* Nota precedentă, redactată de mai mult timp, nu fusese dată publicării când am cetit nota D-lui V. CRISTESCU privitoare la teorema lui HAARST asupra proprietății dreptelor lui SIMSON a picioarelor simedianelor.

E interesant de observat că această frumoasă proprietate este o consecință imediată a teoremei enunțate în nota precedentă. Într'adevăr, isogonalele dreptelor ce unesc piciorul M al unei simediane AM cu vârfurile triunghiului sunt: mediana AM și paralelele cu aceasta duse prin vârfurile B și C. Dar distanțele dintre aceste isogonale sunt evident egale, de unde rezultă deci proprietatea enunțată de HAARST și care poate fi astfel larg generalizată.

TR. LALESCU.

73. *Asupra problemei 2389.* (*G. M.* Vol. XXI p. 434 și u, vol. XXII p. 14 și 39, Notele 3 și 9, Vol. XXVIII, p. 287 Nota 52). In această problemă, se cereà a se arătà, pe cale geometrică, că un triunghiu ABC este echilateral dacă avem:

$$AH/BC = BH/CA = CH/AB, \qquad (1)$$

H fiind ortocentrul triunghiului.

Iată încă o soluție bazată numai pe considerațiuni geometrice.

Fie A', B', C' picioarele înălțimilor ce pleacă din vârfurile A, B, C și R raza cercului circumscris triunghiului. Se știe că cercurile circumscrise triunghiurilor BHC, CHA, AHB sunt egale cu cercul circumscris*). Aplicând atunci acestor triunghiuri o proprietate cunoscută de geometrie**), avem:

$$BH.BC = 2R.BC'; \quad CH.BC = 2R.CB',$$
$$CH.CA = 2R.CA'; \quad AH.CA = 2R.AC',$$
$$AH.AB = 2R.AB'; \quad BH.AB = 2R.BA'.$$

Din comparația acestor egalități cu relația dată (1), deducem că trebue să avem:

$$BC' = AC'; \quad CB' = AB'; \quad CA' = BA'.$$

*) *F. G.* — M. *Exercices de Géometrie.* VI-e éd., Théorème de CARNOT, question 667, p. 286.

**) ROUCHÉ et DE COMBEROUSSE, Géométrie plane, VI-e éd., p. 146, Scolie 239.

Laturile AB, BC, CA sunt deci egale două câte două, fiindcă sunt egal depărtate de picioarele înălțimilor, de unde conchidem că triunghiul este echilateral.

N. BLAHA.
Inginer Electrician
Botoşani.

74. *Asupra triunghiului automedian.* La datele bibliografice asupra triunghiului automedian date la pag. 241, trebue a se adăugà și următoarea:

J. DÉPRÉZ, *Sur les triangles automédians, Mathesis* année 1903, p. 196, 226 et 245.

Printre numeroasele proprietăți stabilite acolo de D-nul J. DÉPRÉZ, figurează la Nr. 25 și cea găsită de mine sub Nr. 8, la pag. 243, că axa ortică și dreapta lui EULER a triunghiului se întretaie pe latura BC.

V. CRISTESCU.

75. *O rectificare.* In articolul „*Proprietăți ale cercului înscris într'un triunghiu*", publicat în *Gazeta Matematică* Vol XXII, p. 272 și 273, se vor înlocui cuvintele „cercul lui Brocard" prin cuvintele „*primul cerc al lui* LEMOINE", punctele M, N și analoagele lor M_1, N_1 și M_2, N_2 de pe laturile triunghiului A'B'C' aparținând primului cerc al lui LEMOINE al triunghiului A'B'C'.

N. BLAHA.
Inginer Electrician
Botoşani.

76. *Generalizarea teoremei lui Ptolomeu. Intr'un patrulater inscriptibil, produsul diagonalelor este egal cu suma produselor laturilor opuse.*

I. Fie A_0, A_1, A_2, ..., A_{n-2}, A_{n-1} vârfurile unui poligon de n laturi, înscris în cercul O.

Notez: $A_k A_{k+1} = a_{k+1}$ $(k = 0, 1, 2, \ldots . n-2)$,

$A_{n-1} A_0 = a_n$; $A_0 A_i = d_i$.

Avem relațiunea

$$(1) \qquad \frac{A_1 A_{n-1}}{a_1 a_n} = \frac{a_2}{d_1 d_2} + \frac{a_3}{d_2 d_3} + \ldots\ldots + \frac{a_{n-1}}{d_{n-2} d_{n-1}} .$$

Voiu demonstrà relațiunea (1) prin inversiune.

Iau A_0 ca pol și o putere de inversiune μ^2. După cum se știe, cercul se transformă într'o dreaptă Δ; omoloagele punctelor A_1, $A_2, \ldots . A_{n-2}, A_{n-1}$, vor fi punctele $A'_1, A'_2, \ldots . A'_{n-2}, A'_{n-1}$ de pe dreapta Δ. Scriind relația evidentă:

$$\overline{A'_1 A'_{n-1}} = \overline{A'_1 A'_2} + \overline{A'_2 A'_3} + \ldots\ldots + \overline{A'_{n-3} A'_{n-2}} + \overline{A'_{n-2} A_{n-1}}$$

și ținând seamă că $\overline{A'_i A'_{i+1}} = \dfrac{\mu^2 . \overline{A_i A_{i+1}}}{\overline{A_0 A_i} \times \overline{A_0 A_{i+1}}}$, găsim:

$$\frac{\overline{A_1 A_{n-1}}}{\overline{A_0 A_1} \times \overline{A_0 A_{n-1}}} = \frac{\overline{A_1 A_2}}{\overline{A_0 A_1} \times \overline{A_0 A_2}} + \frac{\overline{A_2 A_3}}{\overline{A_0 A_2} \times \overline{A_0 A_3}} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{\overline{A_{n-2} A_{n-1}}}{\overline{A_0 A_{n-2}} \times \overline{A_0 A_{n-1}}},$$

sau

$$\frac{A_1 A_{n-1}}{a_1 a_n} = \frac{a_2}{d_1 d_2} + \frac{a_3}{d_2 d_3} + \ldots\ldots + \frac{a_{n-1}}{d_{n-2} d_{n-1}},$$

care este tocmai relațiunea, care trebuià stabilită.

După cum vedem, am urmat acì calea cunoscută ce se întrebuințează în cazul particular al patrulaterului. Chestiunea este destul de simplă, totuși n'am văzut această generalizare în Geometriile mai cunoscute.

Că relația lui Ptolomeu este un caz particular al relației (1), se vede ușor. In adevăr, avem $n = 4$, deci (1) devine

$$\frac{A_1 A_3}{a_1 a_4} = \frac{a_2}{d_1 d_2} + \frac{a_3}{d_2 d_3} .$$

Insă, $d_1 = a_1$, $d_3 = a_4$, deci

$$\frac{A_1 A_3}{a_1 a_4} = \frac{a_2}{a_1 d_2} + \frac{a_3}{d_2 a_4}, \qquad d_2 . A_1 A_3 = a_1 a_3 + a_2 a_4,$$

care e tocmai relația lui Ptolomeu.

II. Păstrând notațiile precedente, din relația (1) mai rezultă

cu uşurinţă propoziţiunea: Latura unui poligon regulat este rădăcina reală a ecuaţiei

$$2d_2\left(\frac{1}{d_2 d_3}+\frac{1}{d_3 d_4}+\ldots+\frac{1}{d_{p-1}d_p}\right)x^3+2x^2-d_2^2=0,\ (n=2p),$$

sau a ecuaţiei

$$2d_2\left(\frac{1}{d_2 d_3}+\frac{1}{d_3 d_4}+\ldots+\frac{1}{d_{p-1}d_p}+\frac{1}{4d_p^2}\right)x^3+2x^2-d_2^2=0,$$

$$(n=2p+1).$$

In adevăr, pentru $n=2p$, este destul a se observà că avem

$$d_{p+k}=d_{p-k}$$

şi că în cazul $n=2p+1$, $d_{p+k+1}=d_{p-k}$,

pentru ca relaţia (1) să ne conducă imediat la rezultatul enunţat. (Ecuaţiile admit o rădăcină reală şi pozitivă în virtutea teoremei lui DESCARTES).

GH. I. DUMITRESCU.

77. *Despre formula creşterilor finite.*

In *Nota* No. 40 din *G. M.* XXVIII pag. 248, D-l M. GHERMĂNESCU dă un înţeles greşit articolului meu „*Despre formula creşterilor finite*", publicat în *G. M.* XXVIII pag. 162 — 166. De aceea, mă cred dator să dau următoarele lămuriri.

In nota D-sale, D-l GHERMĂNESCU spune că „într'o problemă propusă în *Cours d'analyse* par E. GOURSAT, se dă ca limită *superioară* a lui θ, pentru o funcţiune continuă, deci şi pentru un polinom, valoarea $\theta<1/(n+1)$".

Ţin să lămuresc că în exerciţiul D-lui GOURSAT (care este indicat şi în LAURENT, *Traité d'Analyse*, t. I, p. 96, şi e tratat complet în MAUPIN, *Questions d'Algèbre*, 1895, p. 153) nu este vorba de valoarea lui θ din *formula creştelor finite,* ci de *limita* către care tinde θ din restul formulei lui TAYLOR, *când h tinde către zero:*

Dacă derivata ultimă din formula lui TAYLOR este de ordin n, avem, pentru $h=0$,

$$\lim\theta=1/(n+1).$$

Deci nu se afirmă nicăieri că $\theta<1/(n+1)$. De altfel, o va-

loare particulară n nu poate aveà nici un sens în formula creşterilor finite pentru o funcţie oarecare.

Valoare lui θ depinde în general de x şi h.

In articolul meu, am considerat un polinom $P(x)$ de grad n şi am arătat că:

1°. In formula lui TAYLOR cu derivate până la ordinul $n-1$, avem întotdeauna $\theta = 1/n$, oricare ar fi h şi x.

2°. In formula creşterilor finite, dacă şirul

$$P''(x),\ P'''(x),\ldots,\ P^{(n)}(x)$$

are numai permanenţe şi h e pozitiv, sau are numai variaţii şi h e negativ, avem

$$\tfrac{1}{2} < \theta < 1/\sqrt[n-1]{n}.$$

Acest rezultat se aplică, de exemplu, la orice polinom cu toţi coeficienţii pozitivi, oricare ar fi x şi h pozitivi.

D-l M. GHERMĂNESCU crede de asemenea că *Nota* D-lui LERNER din *G. M.* XVII, p. 16 — 17, a fi o generalizare a cazului limită al D-lui GOURSAT.

Dar D-l LERNER consideră cazul când valoarea lui x anulează simultan toate derivatele lui $f(x)$ de ordin $n+1, n+2,\ldots, n+p-1$. Este vorba deci de o valoare cu totul particulară a lui x, care în general nici nu există.

Se zice că pentru $p = 1$ avem cazul D-lui GOURSAT. Evident, dar chestiunea trebue interpretată aşà cum este: In cazul D-lui LERNER se presupune că x din formula lui TAYLOR este o rădăcină de ordin $p-1$ de multiplicitate a derivatei $f^{(n+1)}(x)$, adică x trebue să satisfacă la $p-1$ *condiţiuni restrictive*. In cazul D-lui GOURSAT ($p=1$) x nu mai e supus la *nici-o condiţie restrictivă*. De aceea cazul D-lui LERNER nu e o generalizare.

Mai doresc să observ că de două ori am fost trecut cu numele de TRAIAN BRATU în loc de GHEORGHE BRATU. Primul e profesor de limba germană la Universitatea din Iaşi şi fost rector al acelei Universităţi.

GH. BRATU.
Profesor la Universitatea din Cluj.

78. *Asupra exerciţiului Nr. 10* din *G. M.*, Vol. XVI, pag. 38. Acest exerciţiu trebue rectificat astfel:

In orice triunghiu, avem :

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\frac{4R+r}{p},$$

după cum rezultă din formulele stabilite în *G. M.*, Vol. XXVII, pag. 279.

N. P. ARCADIAN.
Elev Cl. VII Reală, Liceul din Caracal.

79. *Asupra problemei* 1614 (*Gazeta Matematică*, Vol. XVI, pag. 266). In această problemă se cerea să se demonstreze relația

$$R=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{S(a^2+b^2+c^2)}{S'+2S}},$$

în care a, b, c, R, S sunt elementele obișnuite ale unui triunghiu oarecare, iar S' aria triunghiului său ortic.

Iată o soluție mai simplă ca cea dată acolo.

Cu ajutorul formulelor $a/\sin A=b/\sin B=c/\sin C=2R$ și a formulei (din *Culegere de Probleme*, Trigonometria, XIX, 13):

$$S'=2S\cos A\cos B\cos C,$$

relația propusă devine:

$$R=\sqrt{\frac{S\cdot R^2(\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C)}{2S(1+\cos A\cos B\cos C)}}.$$

Simplificând și ridicând la patrat, obținem

$$\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C=2+2\cos A\cos B\cos C,$$

relație cunoscută (*Culegere de Probleme*, Trigonometria, XVII, 3).

FLORIAN ER. GEORGESCU.
Elev Cl. VII reală, Liceul Cantemir-Vodă.

CHESTIUNI DE EXAMEN.

EXAMENUL DE CAPACITATE PENTRU PROFESORII SECUNDARI.

A. PROBA DE LICEU

(25 Aprilie 1923).

1. Intr'o sferă, paralel cu trei plane diametrale perpendiculare două câte două, se fac şease secţiuni la aceeaşi distanţă h de centrul sferei. Se presupune că planele se întâlnesc în afară de sferă.

a. Suprimând segmentele sferice astfel obţinute, rămâne un solid al cărui volum se cere.

b. Care este valoarea minimă a lui h în condiţiunile problemei?

c. Să se găsiască valoarea lui h astfel ca volumul solidului să fie $^7/_8$ din volumul sferei.

2. Să se construiască curba:

$$y^4 - 3x^2y^2 + 2x^4 - 4y^2 + 11x^2 - 12 = 0.$$

3. Să se calculeze derivata funcţiunei:

$$Y = \operatorname{arc\,tang} \frac{4x(1-x^2)}{1-6x^2+x^4} - \operatorname{arc\,sin} \frac{4x(1-x^2)}{1+2x^2+x^4}$$

şi să se explice rezultatul.

4. Un segment AB de lungime dată l, se curbează după un cerc. Să se studieze variaţia ariei segmentului circular astfel obţinut.

5. Se duce tangenta într'un punct M al unei parabole care întâlneşte axa în T. Să se găsiască prin consideraţiuni geometrice, relaţiile între liniile trigometrice ale unghiurilor triunghiului MTA, A fiind vârful parabolei. Să se studieze variaţia tangentei unghiului AMT.

(O chestiune obligatorie). Timpul acordat 3 ore.

B. PROBA DE LICENŢĂ.

(26 Aprilie 1923).

1. Fie:

$$Z = \int_0^x (x-t)^2 \varphi(t)\, dt$$

$\varphi(t)$ fiind o funcţiune continuă de t, pentru valorile positive ale variabilei, afară poate de valoarea $t = 0$.

a. Să se calculeze primele două derivate ale funcţiunei Z.

b. Să se determine funcţiunea $\varphi(t)$, aşă fel încât să avem identitatea:

$$\int_0^x [(x-t)^2 + 8x^2]\, \varphi(t)\, dt = x \qquad \varphi(1) = 2.$$

2. Un punct material de masă m este solicitat de o forţă centrală atractivă μ^2/r^2 şi de o forţă repulsivă ν/r^3.

a. Să se studieze mişcarea punctului material, în ipoteza că iuţeala iniţială este perpendiculară pe raza vectoare şi egală cu $1/r_0$.

b. Să se găsiască valorile admisibile pentru r_0, aşă fel ca traectoria să fie întreagă la distanţa finită.

c. Să se studieze mişcarea în cazul când parametrii au valorile $\mu = 1$, $\nu = \frac{3}{4}$, $r_0 = 1$.

3. Să se calculeze direct şi prin metoda residuurilor, integrala:

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos x \, dx}{5 + 4\cos x}.$$

4. Să se calculeze integrala:

$$\int_0^1 2x\,dx \int_x^1 \frac{dy}{\sqrt{1 + y^4 - x^4}}$$

5. Fiind dată ecuaţia diferenţială:

$$xy''' + 3x^2y'' + xy' - y = x,$$

să se determine integrala acestei ecuaţii, care se anulează împreună cu primele două derivate în punctul $x = 1$.

(O chestie obligatorie). Timpul acordat 3 ore.

BIBLIOGRAFIE.

Anales de la Sociedad cientifica argentina. Vol, XCIV. No. 5-6. Noemvrie-Decemvrie 1922. Buenos-Aires.

Revista de matematicas y fisicas elementales. Anul IV. No. 11. Martie 1923. Buenos Aires. *Juan Diderik van der Waals* de M. L. Pondal. Generalizarea teoremei lui Euclide. Proecţiunea antiparalelă de B. Ig. Baidaff. Generalizarea unei teoreme a lui Leibniz de E. Rebuelto.

Journal de mathématiques élémentaires. Anul 47. No. 14, 15, 16. Aprilie-Mai 1923. Paris. Asupra ciclidei lui Dupin de J. Coissard.

Revista Matematică din Timişoara. Anul III. No. 2. Aprilie 1923. Timişoara. Câteva proprietăţi în legătură cu ortocentrul, de Al. Niculescu.

Gazeta matematicilor. Anul I. No. 2. Mai 1923. Constanţa. Încurajarea matematicilor practice în Constanţa. Din chestiunile de aritmetică comercială de N. Zagoicea. Volumul trunchiului de piramidă de N. Zagoicea.

CERERI.

Răspuns la cererea No. 90. S'au oferit a examină şi redactà manuscrisele pentru *Culegerea de probleme de Aritmetică*, Ediţia 2-a şi D-nii: Gh. Zapan şi I. Dragomir.

I. I.

PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 1907. *Să se demonstreze că puterea 5-a a unui număr terminat cu 2 se termină cu* 2^5. *Care sunt puterile* k, m, n, q, r, s, t *la care trebuie să ridicăm numerele terminate cu* $3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ *pentru ca aceste puteri să se termine cu* $3^k, 4^m, 5^n, 6^q, 7^r, 8^s, 9^t$ *?*

Gr. Vasilescu.

Soluţie dată de D-l A. Bunescu, A. Hamburger, G. Nicolescu, C. Rotaru, A. Hristescu. L. Teodoriu.

Scrim un număr subt forma $(10a+b)$ în care b e de o cifră, iar a poate fi 0, sau de o cifră, sau de mai multe. După desvoltarea binomului lui Newton avem:

$$(10a+b)^p = 10^p . a^p + \frac{p}{1} \cdot 10^{p-1} a^{p-1} + \cdots + \frac{p}{1} \cdot 10a . b^{p-1} + b^p . \quad (1)$$

De aci, se vede că oricare ar fi b, pentru $p=0$, ambii membrii se reduc la 1. Deci $p=0$ este o soluţiune pentru toate numerele.

De asemenea, pentru $p=1$, primul membru se termină cu b, ca şi al doilea. Deci $p=1$ este o soluţiune pentru toate numerele.

Se vede iarăşi că dacă b^p este de o cifră, condiţia este îndeplinită, căci în al doilea membru numai b^p dă cifre la unimi. In aceste condiţiuni, avem pe $2^2=4$, $2^3=8$, $3^2=9$. Deci avem soluţiile $b=2$, $p=2$; $b=3$, $p=2$; $b=3$, $p=2$.

Dacă b^p are două cifre, atunci membrul al doilea nu se termină cu b^p decât dacă $p.\ 10\ a\ b^{p-1}$ se termină cu două zerori, sau dacă $p.\ a\ b^{p-1}$ se termină cu 0. Insă a este oarecare; deci trebuie ca $p.\ b^{p-1}$ să se termine cu 0. Nu putem lua $p=10$, căci b^9 nu mai are două cifre, chiar dacă am face $b=2$.

Pentru $p=5$, trebuie să luăm b par şi aşà că b^p să aibă două

cifre. Insă $2^4 = 32$ are două cifre, iar $4^4 > 100$. Deci $p = 5$, $b = 2$ este o soluţiune, şi cu aceasta se demonstrează prima parte a problemei propuse.

Pentru $b = 5$, trebuie să luăm p par şi aşă ca b^p să aibă două cifre. Insă numai $5^2 = 25$ are două cifre. Deci $b = 5$, $p = 2$ este o soluţie a problemei.

Dacă b^p are trei cifre, atunci trebuie să luăm încă un termen la finele desvoltării (1) şi avem:

$$\frac{p\ (p-1)}{1.2}\ 10^2\ a^2\ b^{p-2} + \frac{p}{1}\cdot\ 10\ a\ b^{p-1} + b^p\ .$$

Trebuie ca primii doi termeni să se termine cu trei zerori: Deci $p.a\ b^{p-1}$ trebuie să se termine cu două nule, iar $\frac{1}{2}\ p\ (p-1)\ a^2\ b^{p-2}$ cu una.

Prima condiţie este satisfăcută pentru $p=4$, $b=5$, care convine căci $b^4 = 625$ are trei cifre.

Pentru aceste valori, primul termen devine $6.a^2.5^3$, care se termină cu un 0. Deci $p = 4$, $b = 5$ este o soluţiune a problemei. Nu putem lua $p > 4$, căci b^p are mai mult de trei cifre.

Dacă b^p are patru cifre, atunci $p.\ 10.\ a\ b^{p-1}$ trebuie să se termine cu patru nule, adică $p.\ a.\ b^{p-1}$ cu trei. Pentru aceasta nu putem lua decât $p = 8$ cel puţin şi $b = 5$. Insă 5^8 are mai mult de 5 cifre.

In rezumat, pentru numerele terminate în 3, 4, 6, 7, 8, 9, singurele puteri sunt 0 şi 1; la cele terminate în 2, avem puterile 0, 1, 2, 3, 5 şi pentru cele terminate în 5, puterile 0, 1, 2, 4.

Soluţiuni parţiale dela D-nii: V. Grigorescu, S. Niculescu, G. Dumitrescu, I. Păsărică, S. Ghiolu.

PROBLEMA 2532. *Fie* D_m^i *numărul combinărilor cu repetiţie a* m *obiecte, luate câte* i. *Să se arate că:*

$$\sum_{n=0}^{n=m} (m-i)\ D_m^i = D_{m+2}^m.$$

M. Ghermănescu.

Scriind suma de mai sus pe m linii deosebite şi adunând coloană cu coloană, vom obţine:

$$D_m^0 + (D_m^0 + D_m^1) + (D_m^0 + D_m^1 + D_m^2) + \cdots + (D_m^0 + D_m^1 + \cdots + D_m^m)$$

sau: $D^0_{m+1}+D^1_{m+1}+D^2_{m+1}+\cdots+D^m_{m+1}=D^m_{m+2}$,

în virtutea unor identităţi cunoscute. Se prea poate ca nici identitatea propusă să nu fie necunoscută.

M. G.

PROBLEMA 2690. *Să se stabiliască identitatea*:

$$\lim_{n=\infty}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k^2\pi}{8n(n+1)}\sin\frac{4k\pi}{n(n+1)}=8\left(2-\sqrt{2+\sqrt{2}}\right).$$

V. ALACI.

Soluţie dată de D-nii; C. I. GEORGESCU, A. TH. NICOLAU, GH. D. POPESCU şi M. SARIAN.

Avem succesiv:

$$\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k^2\pi}{8n(n+1)}\sin\frac{4k\pi}{n(n+1)}$$

$$=\frac{1}{2}\left[\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{k(k-32)\pi}{8n(n+1)}-\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{k(k+32)\pi}{8n(n+1)}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\sum_{k=1}^{32}\cos\frac{k(k-32)\pi}{8n(n+1)}+\sum_{k=33}^{n}\cos\frac{k(k-32)\pi}{8n(n+1)}\right.$$

$$\left.-\sum_{k=1}^{n-32}\cos\frac{k(k+32)\pi}{8n(n+1)}-\sum_{k=n-31}^{n}\cos\frac{k(k+32)\pi}{8n(n+1)}\right].$$

Dar,

$$\sum_{k=33}^{n}\cos\frac{k(k-32)\pi}{8n(n+1)}-\sum_{k=1}^{n-32}\cos\frac{k(k+32)\pi}{8n(n+1)}=0,$$

termenii reducându-se 2 câte 2, deci:

$$\sum_{k=1}^{n} \sin \frac{k^2\pi}{8n(n+1)} \sin \frac{4k\pi}{n(n+1)}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\sum_{k=1}^{32} \cos \frac{k(k-32)\pi}{8n(n+1)} - \sum_{k=n-31}^{n} \cos \frac{k(k+32)\pi}{8n(n+1)}\right].$$

Cum,

$$\lim_{n=\infty} \sum_{k=1}^{32} \cos \frac{k(k-32)\pi}{8n(n+1)} = 32, \quad \lim_{n=\infty} \sum_{k=n-31}^{n} \cos \frac{k(k+32)\pi}{8n(n+1)} = \cos \frac{\pi}{8},$$

rezultă că:

$$\lim_{n=\infty} \sum_{k=1}^{n} \sin \frac{k^2\pi}{8n(n+1)} \sin \frac{4k\pi}{n(n+1)} = \frac{1}{2}\left(33 - 32\cos\frac{\pi}{8}\right) = 32\sin^2\frac{\pi}{16}$$

$$= 32\left(\frac{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}\right)^2 = 8\left(2-\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)$$

şi identitatea este astfel stabilită.

Observare. Toţi corespondenţii de mai sus au observat că, dacă in identitatea din problema 2449 facem:

$$\alpha = \beta = 8 \ , \ \gamma = 0 \ , \ a = 32,$$

obţinem identitatea din enunţ.

PROBLEMA 2992. *Să se demonstreze că dacă* a *şi* b *sunt numere întregi, iar* $a^2 - 4b$ *este un patrat perfect, atunci expresiunile:*

$$a^4 - 4a^2b + 2b^2 \quad \text{şi} \quad a^5 - 5a^3b + 5ab^2,$$

se pot pune respectiv sub formele $M^4 + N^4$ *şi* $M^5 + N^5$, M *şi* N *fiind numere întregi.*

LOCOT. COL. GH. BUICLIU.

I. Soluţie şi generalizare dată de d-l I. ST. TEODORESCU Lc. Ploeşti),

Dacă (1) $a^2 - 4b = c^2$,

atunci expresiunea generală:

$$(2)\ E = a^m + \frac{1}{2^{m-1}} \sum_{k=1}^{k=q} (-1)^k 2^{2k} a^{m-2k} b^k \left(C_m^{2k} C_k^k + C_m^{2k+2} C_{k+1}^{k+\ldots}\right),$$

în care C_p^r reprezintă combinările a p obiecte luate câte r, iar q este cel mai mare întreg cuprins în $m/2$, se poate pune sub forma $M^m + N^m$, M și N fiind numere întregi.

Adunând pe $\left(\frac{a+c}{2}\right)^m$ cu $\left(\frac{a-c}{2}\right)^m$, se găsește:

$$(3)\left(\frac{a+c}{2}\right)^m + \left(\frac{a-c}{2}\right)^m = \frac{1}{2^{m-1}}\left[a^m + C_m^2 a^{m-2} c^2 + C_m^4 a^{m-4} c^4 + \ldots + C_m^{2k} a^{m-2k} c^{2k}\right],$$

$2k$ fiind cel mai mare număr pereche care se poate scădeà din m.

Dacă se ridică (1) la puterea n se găsește:

$$(4)\ C^{2n} = a^{2n} - 2^2 C_n^1 a^{2n-2} b + 2^4 C_n^2 a^{2n-4} b^2 \ldots + (-1)^n 2^{2n} C_n^n b^n.$$

Făcând în (4) pe $n = 1,2,\ldots,k$ se obține succesiv:

$$(5)\begin{cases} c^2 = a^2 - 2^2 C_1^1 b \\ c^4 = a^4 - 2^2 C_2^1 a^2 b + 2^4 C_2^2 b^2 \\ c^6 = a^6 - 2^2 C_3^1 a^4 b + 2^4 C_3^2 a^2 b^2 - 2^6 C_3^3 b^3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c^{2k} = a^{2k} - 2^2 C_k^1 a^{2k-2} b + 2^4 C_k^2 a^{2k-4} b^2 + \ldots + (-1)^k 2^{2k} C_k^k b^k \end{cases}$$

Introducând în (3) valorile lui c^2, c^4, $\ldots$ c^{2k} și efectuând calculele, se găsește

$$(6)\quad \left(\frac{a+c}{2}\right)^m + \left(\frac{a-c}{2}\right)^m = \frac{1}{2^{m-1}}\Big[a^m\left(1 + C_m^2 + C_m^4 + \cdots + C_m^{2k}\right) - 2^2 a^{m-2} b \left(C_m^2 C_1^1 + C_m^4 C_2^1 + \cdots + C_m^{2k} C_k^1\right) + 2^4 a^{m-4} b^2 \left(C_m^4 C_2^2 + C_m^6 C_3^2 + \cdots + C_m^{2k} C_k^2\right) + \cdots + (1)^k 2^{2k} a^{m-2k} b^k \left(C_m^{2k} C_k^1 + C_m^{2k+2} C_{k+1}^2 + \cdots\right)\Big].$$

De oarece însă $\sum_{0}^{k} C_m^{2i} = 2^{m-1}$,

Atunci (6) se mai poate scrie:

$$\left(\frac{a+c}{2}\right)^m + \left(\frac{a-c}{2}\right)^m = a^m - \frac{1}{2^{m-1}} 2^2 a^{m-2} b \sum_{1}^{k} C_m^{2i} C_i^1 + \frac{1}{2^{m-1}} 2^4 a^{m-4} b^2 \sum_{2}^{k} C_m^{2i} C_i^2 \ldots,$$

sau scriind simbolic, se vede că membrul II este tocmai valoarea lui E, iar membrul I este suma $M^m + N^n$, în care:

$$M = \frac{a+\sqrt{a^2-4b}}{2} = \frac{a+c}{2} \quad \text{și} \quad N = \frac{a-\sqrt{a^2-4b}}{2} = \frac{a-c}{2}.$$

Când a și c sunt de aceeași paritate, M și N sunt evident numere întregi, iar relațiunea (1) arată că a și c sunt aceeași paritate.

Cu aceasta, teorema generală e demonstrată.

Iată câte-va cazuri particulare.

1°. $m = 4$, $k = 1, 2$.

$$E = a^4 + \frac{1}{2^3}\left[-2^2 a^2 b\,(C_4^2 C_1^1 + C_4^4 C_2^1) + 2^4 b^2 (C_4^4 C_2^2)\right] = a^4 - 4a^2 b + 2b^2 = \left(\frac{a+c}{2}\right)^4 + \left(\frac{a-c}{2}\right)^4.$$

2°. $m = 5$, $k = 1, 2$.

$$E = a^5 + \frac{1}{2^4}\left[-2^2 a^3 b (C_5^2 C_1^1 + C_5^4 C_2^1) + 2^4 a b^2 (C_5^4 C_2^2)\right] = a^5 - 5a^3 b + 5ab^2 = \left(\frac{a+c}{2}\right)^5 + \left(\frac{a-c}{2}\right)^5,$$

3°. $m = 6$, $k = 1, 2, 3$.

$$E = a^6 + \frac{1}{2^5}\left[-2^2 a^4 b\,(C_6^2 C_1^1 + C_6^4 C_2^1 + C_6^6 C_3^1) + 2^4 a^2 b^2 (C_6^4 C_2^2 + C_6^6 C_3^2) - 2^6 b^3 C_6^6 C_3^3\right] = a^6 - 6a^4 b + 9a^2 b^2 - 2b^3.$$

4°. $m = 7$, $k = 1, 2, 3$.

$$E = a^7 + \frac{1}{2^6}\left[-2^2 a^5 b\,(C_7^2 C_1^1 + C_7^4 C_2^1 + C_7^6 C_3^2) + 2^4 a^3 b^2 (C_7^4 C_2^2 + C_7^6 C_3^2) - 2^6 a b^3 C_7^6 C_3^3\right] = a^6 - 7a^4 b + 14 a^3 b^2 - 7ab^3.$$

II. Soluție dată de d-nii: Gr. Moisil, I. B. Florescu, E. I. Bălan, E. Ștefănescu și Fl. Georgescu.

De oarece $a^2 - 4b$ este patrat perfect, înseamnă că rădăcinele ecuației:

$$x^2 - ax + b = 0,$$

sunt reale. Ca la prima soluție se dovedește că aceste rădăcini sunt:

$$M = \frac{a+c}{2} \quad \text{și} \quad N = \frac{a-c}{2}.$$

și că ele sunt întregi. Calculând sumele puterilor asemenea ale rădăcinelor M și N, se găsește succesiv:

$$M + N = a$$

$$M^2 + N^2 = a^2 - 2b$$

$$M^3 + N^3 = a^3 - 3ab$$

$$M^4 + N^4 = a^4 - 4a^2b + 2b^2$$

$$M^5 + N^5 = a^5 - 5a^3b + 5ab^2$$

. . . . . .

și așă mai departe.

III. Soluție dată de d-l C. H. Schönfeld.

Să punem:

(1) $$M + N = a \quad \text{și} \quad MN = b.$$

Avem $$a^2 - 4b = (M - N)^2 = k^2.$$

Dacă în identitățile, ușor de verificat:

$$x^4 + y^4 = (x+y)^4 - 4xy(x+y)^2 + 2x^2y^2,$$

$$x^5 + y^5 = (x^4 + y^4)(x+y) - (x+y)^3xy + 3x^2y^2,$$

facem $x = M$, $y = N$ și ținem seamă de (1), se găsește:

(2) $$M^4 + N^4 = a^4 - 4a^2b + 2b^2$$

(3) $$M^5 + N^5 = a(M^4 + N^4) - ab(a^2 - 3b).$$

Inlocuind în (3) pe $M^4 + N^4$ prin valoarea dată de (2), se găsește că $M^5 + N^5$ este egal cu a doua expresiune din enunț.

IV. Soluție dată de d-l I. B. Florescu.

Fie c rădăcina patrată a lui $a^2 - 4b$. Avem:

$$c^2 = a^2 - 4b \qquad \therefore \quad (a+c)(a-c) = 4b.$$

$a-c$ şi $a+c$ având aceeaşi paritate şi neputând fi ambele neperechi, avem:

$$a+c=2p, \quad a-c=2q$$

$$\therefore \quad a=p+q \quad \text{şi} \quad b=pq$$

Cu acestea, expresiunile din enunţ devin respectiv

$$E_1=(p+q)^4-4(p+q)^2pq+2p^2q^2=p^4+q^4+\left(\frac{a+c}{2}\right)^4+\left(\frac{a-c}{2}\right)^4$$

$$E_2=(p+q)^5-5(p+q)^2pq+5(p+q)p^2q^2=p^5+q^5=\left(\frac{a+c}{2}\right)^5+\left(\frac{a-c}{2}\right)^5.$$

V. Soluţie dată de d-nii: T. Popoviciu şi D. Măru.

Pentru ca a^2-4b să fie patrat perfect, trebue să avem:

$$b=-n(a+n),$$

în care n este un număr întreg. Introducând aceste valori ale lui b în expresiile din enunţ, găsim:

$$E_1=(a+n)^4+n^4 \quad \text{şi} \quad E_2=(a+n)^5+(-n)^5.$$

Observaţiuni. 1°. Au rezolvat problema, pentru cazul $n=-1$, după metoda dată în soluţia V, d-nii: C. Goilav şi Fl. Georgescu.

2°. D-l S. Georgescu-Gorjan a întrebuinţat calea dată de ultima soluţie punând $b=(a^2-c^2)/4$.

3°. D-l A. Tauber a dat o soluţie prin descompunere în factori primi.

4°. D-nii T. Popoviciu şi W. Solomon au dat generalizări puţin riguroase.

PROBLEMA 2998. *Să se rezolve ecuaţia:*

$$2(1+5\cos y)\sin 2x+2(10-39\cos^2 x)\cos y+3\sin^2 x+1=0,$$

ştiind că $\operatorname{tg} x$ *şi* $\sec y$ *sunt numere întregi.*

Gh. I. Jujescu.

Soluţie dată de D-nii: I. Th. Lăzărescu (Elev cl. VIII Liceul I. C. Brătianu, Piteşti), Const. E. Georgescu (Elev cl. VIII Liceul Cantemir-Vodă), Pincu Katz (Elev cl. VIII Liceul Comunităţei Istraelite, Galaţi), Eug. I. Balan (Elev cl. VIII, particular, Bucureşti), Florian Er. Georgescu (Elev Liceul Cantemir-Vodă).

Grupăm de o parte termenii cari cuprind pe cos y și avem:

$$(78\cos^2 x - 10\sin 2x - 20)\cos y = 2\sin 2x + 3\sin^2 x + 1$$

$$\therefore \quad \sec y = \frac{78\cos^2 x - 10\sin 2x - 20}{2\sin 2x + 3\sin^2 x + 1}.$$

In membrul al doilea, înlocuim toate liniile trigonometrice în funcție de tg$x$, cu ajutorul formulelor:

$$\sin^2 x = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x}, \quad \cos^2 x = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x}, \quad \sin 2x = \frac{2\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg}^2 x}.$$

Obținem $$\sec y = \frac{63 - 5(2\operatorname{tg} x + 1)^2}{(2\operatorname{tg} x + 1)^2}$$

$$\therefore \quad \sec y = \frac{63}{(2\operatorname{tg} x + 1)^2} - 5. \qquad (1)$$

Conform enunțului problemei, sec y și tg x trebue să fie numere întregi. Atunci și $(2\operatorname{tg} x + 1)$ va fi un întreg.

Pentru ca sec y să fie un întreg, relația (1) ne arată că trebue și e suficient ca $(2\operatorname{tg} x + 1)^2$ să fie un divizor al lui 63. Dar

$$63 = 1^2 \times 3^2 \times 7$$

și fiindcă $(2\operatorname{tg} x + 1)^2$ e un patrat perfect, el trebue să fie egal cu 1^2 sau cu 3^2. Avem deci sistemele de soluții:

$$\left.\begin{matrix}(2\operatorname{tg} x + 1)^2 = 3^2 \\ \sec y = 2\end{matrix}\right\} \text{(I)}, \qquad \left.\begin{matrix}(2\operatorname{tg} x + 1)^2 = 1^2 \\ \sec y = 58\end{matrix}\right\} \text{(II)}$$

Sistemul (I) se descompune în următoarele două:

$$\left.\begin{matrix}2\operatorname{tg} x + 1 = 3 \\ \sec y = 2\end{matrix}\right\} \quad \therefore \quad \left.\begin{matrix}\operatorname{tg} x = 1 \\ \sec y = 2\end{matrix}\right\}$$

$$\left.\begin{matrix}2\operatorname{tg} x + 1 = -3 \\ \sec y = 2\end{matrix}\right\} \quad \therefore \quad \left.\begin{matrix}\operatorname{tg} x = -2 \\ \sec y = 2\end{matrix}\right\}$$

iar sistemul (II) se descompune în:

$$\left.\begin{array}{l} 2\operatorname{tg} x + 1 = 1 \\ \sec y = 58 \end{array}\right\} \quad \therefore \quad \left.\begin{array}{l} \operatorname{tg} x = 0 \\ \sec y = 58 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} 2\operatorname{tg} x + 1 = -1 \\ \sec y\ 58 \end{array}\right\} \quad \therefore \quad \left.\begin{array}{l} \operatorname{tg} x = -1 \\ \sec y = 58 \end{array}\right\}$$

Aceste patru sisteme ne dau respectiv soluțiile:

$$x = k \times 180^0 + 45^0, \qquad y = k \times 360^0 \pm 60^0;$$
$$x = k \times 180^0 - 63^0\,26'\,6'', \qquad y = k \times 360^0 \pm 60^0;$$
$$x = k \times 180^0, \qquad y = k \times 360^0 \pm 89^0\,0'\,44'';$$
$$x = k \times 180^0 - 45^0, \qquad y = k \times 360^0 \pm 89^0\,0'\,44''.$$

Au dat soluții parțiale D-nii: Florea I. Negrețzu, Al. Tauber, Mircea I. Adam, Tiberiu Popoviciu, Virgil C. Vasilescu, Emil Ștefănescu.

PROBLEMA 3001. *O faptă se serbează din 360 în 360 zile. Dacă s'a serbat într'un an la 1 Ianuarie, când se va mai serbà tot în ziua de 1 Ianuarie?*

I. Ionescu.

Soluție dată de D-nii: E. I. Ballan (cl. VIII, part.); A. Tauber (cl. VII, Lc. Botoșani); M. Rothenberg (cl. VI, Lc. Național, Iași)

Fie N numărul anului. Vom deosebi următoarele cazuri:

1) $N \equiv_{\mathscr{M}} 4$. *Fapta s'a serbat la începutul unui an bisect.* Anii ordinari au 5 zile și ceilalți 6 zile peste perioada de 360 zile la care se serbează fapta. Deci va trebui să avem:

$$6+5+5+5+6+5+5+5+6+\ldots\ldots\ldots \equiv_{\mathscr{M}} 360.$$

De aci, condițiunile:

$$21m \equiv 360n;\ 21m+6 \equiv 360n;\ 21m+11 \equiv 360n;\ 21m+16 \equiv 360n.$$

$$\therefore\ 7m \equiv 120n;\ 7m+2 \equiv 120n;\ 21m+11 \equiv 360n;\ 21m+16 \equiv 360n$$

Prima cere $m = 120$ și deci după $4 \times 120 = 480$ ani, avem o coincidență. A doua dă:

$$m = 17n + (n-2)/7,$$

de unde se vede că cel mai mic n este 2, care dă $m = 34$ și deci după $4 \times 34 + 1 = 137$ ani avem o coincidență. A treia egalitate este imposibilă, căci $11 \not\equiv \mathcal{M}3$. De asemenea, a patra nu admite soluție, căci $16 \not\equiv \mathcal{M}3$.

2) $N = \mathcal{M}4 + 1$. *Fapta s'a serbat la 1 Ianuarie, după un an bisect.* Va trebui să avem în acest caz:

$$5+5+5+6+5+5+5+6+\ldots\ldots\ldots = \mathcal{M}360.$$

De aci, condițiunile:

$21m = 360n$; $21m+5 = 360n$; $21m+10 = 360n$; $21m+15 = 360n$.

Am văzut că prima dă **480** ani. A doua nu dă soluție, căci $5 \not\equiv \mathcal{M}3$. A treia nu dă soluție, căci $10 \not\equiv \mathcal{M}3$. A patra dă:

$$7m + 5 = 120n,$$

$$m = 17n + (n-5)/7,$$

de unde se vede că cel mai mic $n = 5$, care dă $m = 85$. Deci după $4 \times 85 + 3 = 343$ ani, se va ivi prima coincidență.

3) $N = \mathcal{M}4+2$. *Fapta s'a serbat la 1 Ianuarie, după un an ordinar, în urma unui an bisect.* Trebue să avem în acest caz:

$$5+5+6+5+5+5+6+5+5+\ldots\ldots\ldots = \mathcal{M}360,$$

și de aci condițiunile:

$21m = 360n$; $21m+5 = 360n$; $21m+10 = 360n$; $21m+16 = 360n$.

Aceste ecuații au fost deja studiate. Ultimile trei sunt imposibile, iar prima dă perioada de **480** ani.

4) $N = \mathcal{M}4 + 3$. *Fapta s'a serbat la 1 Ianuarie a unui an ce precedă un an bisect.* Trebuie să avem:

$$5+6+5+5+5+6+5+5+5+\ldots\ldots\ldots = \mathcal{M}360,$$

care ne dă condițiunile:

$21m = 360n$; $21m+5 = 360n$; $21m+11 = 360n$; $21m+16 = 360n$.

Aceste ecuații au fost studiate. Prima are soluția minimă **480** ani, iar celelalte sunt imposibile.

In rezumat obținem, următorul rezultat:

Dacă fapta s'a serbat la 1 Ianuarie al unui an bisect, se va mai serbà la 1 Ianuarie după 137 ani. Dacă s'a serbat la 1 Ianuarie după un an bisect, se va mai serbà la 1 Ianuarie după **343** ani. In celelalte cazuri, se va serbà după **480** ani.

Se mai observă că în primul caz prima coincidență este într'un an după un an bisect, și în al doilea prima coincidență într'un an bisect, astfel încât coincidența este alternativ la 137 și 343 ani în primul caz și la 343 și 137 în al doilea caz. Avem de fapt $137+343=480$, care este perioada în celelalte două cazuri.

Problema a fost încercată de mulți corespondenți. Perioada de 480 ani a fost găsită de D-nii: D. Măru, F. Rabinovici. E. Grabovski, F. Marcu, E. Zaharia.

Celelalte soluții sunt cu totul eronate. Iată rezultatele: 72; 139; 145; 313; 344; 482; 487; 488; 492; 720; 1182; 1440; 1580; 1948. Nu au lipsit și soluțiuni umoristice, ca $69\frac{4}{7}$ ani! La o soluție, dată de un elev de clasa VII, studiul este bazat pe faptul că anii au alternativ 364 și 365 zile!

Pentru calendarul gregorian, problema a fost atacată numai de D-l E. Grabovski (cl. VI Liceul Orhei); nu a dat însă soluția completă.

I. I.

PROBLEMA 3002. *Un număr de două cifre are numărul divizorilor patrat perfect, iar altul de două cifre are numărul divizorilor un cub perfect. Scriind al doilea număr după primul, avem un patrat perfect. Care sunt patratele ce se pot obține în aceste condițiuni?*

T. Popoviciu.

Numerele de două cifre, care au numărul divizorilor un cub perfect, sunt:

(1) 24, 30, 40, 42, 54, 56, 66, 70, 78, 88.

In „Culegere de Probleme", Arit. XXXIX, 1, se arată că ultimele două cifre cu care se pot termină patratele perfecte sunt:

(2) 0, 01, 04, 09, 16, 21, 24, 25, 29, 36, 41, 44, 49, 56, 61, 64, 69, 76, 81, 84, 89, 96.

Comparând numerele şirurilor (1) şi (2) vedem că numărul cerut în problemă trebuie să se termine cu 24 sau cu 56.

Patratele care se termină cu 24 sau cu 56, sunt:

$$32^2 = 1024,\ 34^2 = 1156,\ 66^2 = 4356,\ 68^2 = 4624$$
$$82^2 = 6724,\ 84^2 = 7056.$$

Din toate aceste numere, numai **1024** şi **4624** satisfac problemei propuse.

Au rezolvat problema: D-ra ELENA N. LĂZĂRESCU şi D-nii: V. A. CAZACINCU (elev cl. VI, Lic. Naţional, Iaşi), Cr. P. GOILAV (Tecuci), N. ARCADIAN (cl. VII, Caracal), M. BOGDAN (cl. VII, Caracal), A. TAUBER (cl. VII, Lic. „Laurian", Botoşanl), N. O. TAILER (Lic. „Codreanu", Bârlad), D. M. BLUMENFELD (cl. VI, Lic. „Laurian", Botoşani), P. KATZ (cl. VIII, Lic. Com. Israelite, Galaţi), L. WEISS (cl. VI, Lic. „V. Alexandri", Galaţi), S. C. SOLACOLU (Lic. „Matei-Basarab"), MARCUS I. FROIM (Lic. Gr. Ghica, Dorohoi), I. Th. LĂZĂRESCU (cl. VII, Piteşti), I. COŞEREANU (Piatra-Neamţ), Tr. A. DORDEA (cl. VIII particular), E. STEFĂNESCU (cl. VII, Lic. „Spiru Haret"), C. MIHĂILESCU, Eug. I. BALLAN (cl. VIII particular), ST. GEORGESCU GORJAN (cl. VII, Lic. „Carol I." Craiova), D. I. SOLOMON (cl. V, Lic. „Matei-Basarab"), St. I. POLEDINU, C. C. MEREUŢĂ, S. KATZ (cl. V, Lic. „Laurian", Botoşani), F. S. RABINOVICI (cl. VII, Lic. „Roman-Vodă", Roman), V. GHIŢESCU (cl. VII, Lic. „Mihaiu-Viteazul"), N. SOLOMON (Timişoara), M. ROTHENBERG (cl. VI, Lic. Naţional, Iaşi), M. A. PINCHIS (cl. VI, Lic. „V. Alexandri", Galaţi), T. I. POPA (cl. VII, Lic „Cantemir-Vodă"), A. MICLESCU (Şc. de Artilerie, Timişoara), Ov. G. POPEA (cl. VI, Chişinău), Gh. STROESCU (cl. V. Lic. „Mihaiu-Viteazul", Tg-Mureş), DIMA St. ILIESCU (cl. V, Lic. „Mihaiu-Viteazul", Tg-Mureş), O. F. VLAD (cl. V, Buzău), M. I. ADAM (Constanţa).

PROBLEMA 3028. *Pe un carton plan găurit se dă un cerc cu centrul* O *şi un punct* P *exterior lui. Se cere să se ducă prin* P *tangenta la cercul* O, *ştiind că mijlocul lui* PO *cade în partea găurită a cartonului şi că tangentele întâlnesc acea gaură.*

I. IONESCU.

Soluție dată de D-nii: C. D. Mihăescu (cl. VII Lc. Giurgiu); H. Petreanu (cl. VII Lc. Lazăr, București); St. Lăzărescu (cl. VII Lc. Giurgiu); A. Doncescu (cl. VI Lc. Piatra); S. C. Solacolu (cl. VI Lc. Matei Basarab, București); St. F Lăzărescu (cl. VIII Lc. Giurgiu).

Ducem dreapta POP' așà că $P'O = PO$ și din P' tangentele $P'A'$, $P'B'$ la cerc, prin construcția cunoscută. Luăm simetricele lui A' și B', față de diametrul perpendicular pe POP' și găsim punctele de contract căutate A și B, pe care unindu-le cu P, găsim tangentele căutate.

Punctele A și B se pot deduce din A' și B', fără a trasà diametrul perpendicular pe POP', căci dacă C și C' sunt intersecțiile lui PP' cu cercul, e destul a descrie din C un cerc cu raza $C'A' = C'B'$, pentruca la intersecția lui cu cercul O să găsim punctele A și B.

Soluție dată de D-l N. Ghițescu (cl. VII Lc. Mihai Viteazul, București).

Rotim P în jurul lui O până în P_1, așà că P_1O să nu mai treacă prin gaură și din P_1, ducem tangentele la cerc P_1A_1, P_1B_1. Punctele A_1 și B_1 le rotim în sens invers în jurul lui O, în unghiul P_1OP și găsim punctele de contact A și B, pe care unindu-le cu P avem tangentele căutate.

Soluție dată de D-l E. Bercovici (Lc. Matei Basarab, București).

Ducem secanta PCC' la cerc, luăm punctul C_1, simetricul lui C față de PO și ducem C_1C', care taie pe PO în D. Perpendiculara dusă în D pe PO este polara lui P față de cerc; ea taie cercul în punctele căutate de contact AB.

Soluție dată de D-nii I. Coșereanu (Piatra-Neamț) și O. Popea (cl. VI Lc. Chișinău).

Dacă d este distanța PO și r raza cercului, atunci distanța PA dela P la punctul de contact al tangentei PA este o catetă a unui triunghiu dreptunghic, cu ipotenuza d și cu cealaltă catetă r. Se poate dar construi PA și atunci punctele de contact se obțin descriind un arc de cerc cu centrul în P și cu raza $\sqrt{d^2 - r^2}$.

Dacă nu putem trasà drepte peste gaură, atunci pentru a aduce tangenta PA procedăm astfel: Luăm un punct B, așà că BP, BA, să nu treacă prin gaură și ca linia $P'A'$, care unește mijloacele lui

BP, BA, să nu atingă de asemenea acea gaură. Prin P și A ducem paralele la P'A' și avem trasate independent cele două porțiuni ale tangelor de o parte și de alta a găurii.

Se procedează analog cu cealaltă tangentă dusă din P la cerc.

Soluție dată de D-nii: C. D. Mihăescu (cl. VII Lc. Giurgiu); P. Katz (cl. VIII Lc. Comunității israelite, Galați); M. I. Adam (cl. VI Lc. Constanța).

Din O, cu raza îndoită cu a cercului dat, descriem un cerc, care taie cercul descris din P cu raza PO, în A și A'. Dreptele OA, OA' taie cercul O în punctele de tangență căutate T și T', căci în triunghiurile isoscele PAO și PA'O, înălțimile PT, PT' sunt perpendiculare pe razele OT, OT'.

PROBLEMA 3029. *Să se demonstreze că între unghiurile unui triunghiu oarecare, avem relațiunile:*

$$\Sigma \sin^2 A \sin 2B \sin 2C = 4 \sin^2 A \sin^2 B \sin^2 C$$

$$\Sigma \cos^2 \tfrac{1}{2}A \sin B \sin C = 4 \cos^2 \tfrac{1}{2}A \cos^2 \tfrac{1}{2}B \cos^2 \tfrac{1}{2}C.$$

V. Cristescu.

Soluție dată de D-nii: B. M. Barbălatt (Elev cl. VI Liceul Codreanu, Bârlad), Dumitru A. Weber (Elev cl. VI Liceul Petru Rareș, Piatra-Neamț), Vasile R. Dumitriu, I. P. Iliescu, Isidor Lazarovici și Marcel S. Sane (Elevi cl. VI, Liceul Național, Iași), Tiberiu Popoviciu (Liceul Moise Nicoară, Arad), Emil Ștefănescu (Elev cl. VII Liceul Spiru-Haret), Ion S. Antoniu, Mihail I. Focșeneanu și Ion Constantinescu (Elevi cl. VII Liceul Mânăstirea Dealului), Ion N. Dragomir (Elev cl. VII Liceul Cantemir Vodă), Leon Weiss (Elev cl. VI Liceul Galați), Emil Bercovici (Elev cl. VIII Liceul Matei Basarab), Ion N. Iordache (Student), Edgar C. Russu (Liceul Internat, Iași), D. Măru (Elev cl. VIII, Liceul Galați), St. Georgescu-Gorjan (Elev cl. VII Liceul Craiova), Pincu Katz (Elev cl. VIII Liceul Comunității Israelite, Galați), David Blumenfeld (Elev cl. VI Liceul Laurian, Botoșani), Conrad H. Schönfeld, Aurel N. Bărglăzan (Elev cl. VIII Liceul Gheorghe Lazăr, Sibiu), Dobrescu-Băbici (Liceul Caracal).

Plecăm dela relația cunoscută:

$$\sin(A+B+C) = \Sigma \sin A \cos B \cos C - \sin A \sin B \sin C,$$

care are loc oricare ar fi arcele A, B, C.

Dacă facem $A+B+C=\pi$, atunci $\sin(A+B+C)=0$, iar relația precedentă devine:

$$\Sigma \sin A \cos B \cos C = \sin A \sin B \sin C.$$

Inmulțind ambii membri ai acestei relații cu $4 \sin A \sin B \sin C$, obținem prima relație ce ni se cere:

$$\Sigma \sin^2 A \sin 2B \sin 2C = 4 \sin^2 A \sin^2 B \sin^2 C.$$

Avem de asemenea relațiunea generală:

$$\cos(\tfrac{1}{2}A+\tfrac{1}{2}B+\tfrac{1}{2}C) = \cos\tfrac{1}{2}A \cos\tfrac{1}{2}B \cos\tfrac{1}{2}C - \Sigma \cos\tfrac{1}{2}A \sin\tfrac{1}{2}B \sin\tfrac{1}{2}C.$$

Dacă $A+B+C=\pi$, avem $\cos(\tfrac{1}{2}A+\tfrac{1}{2}B+\tfrac{1}{2}C)=0$, iar

$$\Sigma \cos\tfrac{1}{2}A \sin\tfrac{1}{2}B \sin\tfrac{1}{2}C = \cos\tfrac{1}{2}A \cos\tfrac{1}{2}B \cos\tfrac{1}{2}C.$$

Inmulțind ambii membri cu $4\cos\tfrac{1}{2}A \cos\tfrac{1}{2}B \cos\tfrac{1}{2}C$, avem

$$\Sigma \cos^2\tfrac{1}{2}A \sin B \sin C = 4\cos^2\tfrac{1}{2}A \cos^2\tfrac{1}{2}B \cos^2\tfrac{1}{2}C.$$

Soluție dată de D-nii: Constantin I. Georgescu și Ion Șerbănescu (Elevi cl. VIII Liceul Mihai Viteazul), Eug. Balan (Elev cl. VIII particular), Andrei Miclescu (Elev Școala de Artilerie), Dumitru A. Weber, Florian Er. Georgescu(Elev cl. VII Liceul Cantemir Vodă), Adrian A. Bușilă și Virgil Ghițescu (Elevi cl. VII Liceul Mihai Viteazul), Ștefan Fl. Lăzărescu și C. D. Mihăescu (Elevi cl. VII Liceul Ion Maiorescu, Giurgiu), B. M. Barbălatt, Ovidiu G. Popea (Elev cl. VI Liceul Chișinău), I. St. Teodorescu (Elev cl. VIII Liceul Ploești), Ștefan T. Epure (Elev cl. VII Liceul Buzău), Petre A. Mirescu (Elev cl. VII Liceul Lazăr, București), Mihail H. Brătescu (Elev cl. VII Liceul Alex. Lahovari, Râmnicul-Vâlcea), G. Mateescu (Elev cl. VII Liceul Galați), L. M. Aron (Elev cl. VI Liceul Bârlad), Aurelian D. Doncescu (Elev cl. VI Liceul Piatra-Neamț), Emilian D. Iliescu (Elev cl. VII Liceul Mânăstirea Dealului), Mircea I. Adam și Ștefan

MARIN (Elev cl. VI Liceul Constanța), MIRCEA GH. STAVRAT (Elev cl. VII Seminarul Pedagogic Universitar, Iași), ALEXANDRU TAUBER (Elev cl. VII Liceul Botoșani), ERNEST G. OPRIȘANU (Student), BOGDAN MARTINIAN și DOBRESCU-BĂBICI (Elevi Liceul Caracal).

Se știe că între unghiurile unui triunghiu avem relația:

$$\operatorname{cotg}A \operatorname{cotg}B + \operatorname{cotg}B \operatorname{cotg}C + \operatorname{cotg}C \operatorname{cotg}A = 1.$$

în care înmulțind ambii membri cu $4\sin^2 A \sin^2 B \sin^2 C$, obținem

$$\Sigma \sin^2 A \sin 2B \sin 2C = 4 \sin^2 A \sin^2 B \sin^2 C.$$

De asemenea, dacă pornim dela relația cunoscută:

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}A \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}B + \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}B \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}C + \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}C \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}A = 1$$

și înmulțim ambii membri cu $4\cos^2\tfrac{1}{2}A \cos^2\tfrac{1}{2}B \cos^2\tfrac{1}{2}C$, obținem a doua relație căutată.

Au rezolvat problema pe alte căi, D-nii: I. COȘEREANU, LONGIN I. IONESCU și N. P. ARCADIAN.

Notă. D-nii: TIBERIU POPOVICIU, CONST. I. GEORGESCU, ADRIAN A. BUȘILĂ și B. M. BARBĂLATT au arătat că relația

$$\Sigma \sin^2 A \sin 2B \sin 2C = 4\sin^2 A \sin^2 B \sin^2 C$$

are loc pentru cazul mai general când

$$A + B + C = k\pi;$$

iar relația:

$$\Sigma \cos^2 \tfrac{1}{2}A \sin B \sin C = 4\cos^2 \tfrac{1}{2}A \cos^2 \tfrac{1}{2}B \cos^2 \tfrac{1}{2}C,$$

când $$A + B + C = (2k + 1)\pi.$$

D-nii: I. S. ANTONIU, EMIL ȘTEFĂNESCU, B. M. BARBĂLATT și EMILIAN D. ILIESCU au observat că relația a doua se poate deduce din prima relație propusă, aplicând această relație triunghiului care are ca unghiuri

$$(\tfrac{1}{2}\pi - \tfrac{1}{2}A),\ (\tfrac{1}{2}\pi - \tfrac{1}{2}B),\ (\tfrac{1}{2}\pi - \tfrac{1}{2}C).$$

EXERCIŢII.

66. Să se efectueze suma:

$$1 + 23 + 345 + 4567 + 56789 + 6789\alpha\beta + \ldots$$

presupunând că fiecare număr se scrie cu o cifră.

A. Miclescu.

R. Avem:

$$S_1 = 1, \quad S_2 = 2 \times 12; \quad S_3 = 3 \times 123; \quad S_4 = 4 \times 1234; \ldots$$

Deci:

$$S_n = n \times 123\ldots n = n(1+11+111+1111+\ldots) = \frac{n}{9}(9+99+999+\ldots)$$

$$S'_n = \frac{n}{9^2}[10(10^n - 1) - 9n].$$

67. Suma unui pătrat şi a cubului său este 378432. Care este acel număr?

S. Katz.

R. Avem:

$$n^3 < n^3 + n^2 < n^3 + 3n^2 + 3n + 1.$$

Deci n este rădăcina cubică a lui $(n^3 + n^2)$ cu eroare prin lipsă mai mică decât 1. Găsim

$$n = 72.$$

68. Suma cifrelor diferenţei între un număr de trei cifre şi răsturnatul său fiind 10, să se afle în ce sistem de numeraţiune este scris?

I. Fântâneanu.

R. $Ba^2 + Bb + c$ fiind forma generală a unui număr de trei cifre scris în baza $B(a > c)$, vom avea:

$$(B^2a + Bb + c) - (B^2c + Bb + a) = B^2(a - c - 1) + B(B - 1) + (B + c - a)$$

$$\therefore \quad a - c - 1 + B - 1 + c - a = 10$$

$$\therefore \quad B = 6.$$

69. Să se calculeze expresia:

$$E = \frac{\sqrt[4]{4^{4!}} \cdot \sqrt[3]{3^{3!}} \cdot \sqrt[2]{2^{2!}}}{4! + 3! + 2!}$$

N. Arcadian.

R. Putem scrie:

$$E=\frac{4^{4!}\cdot 3^{3!}\cdot 2^{2!}}{24+6+2}=\frac{4^6\cdot 3^2\cdot 2^1}{2^5}=\frac{2^{13}\cdot 3^2}{2^6}=2^7\cdot 3^2.$$

Nu s'ar putea generaliză? (N. R.).

70. Fie ABCD un trapez oarecare, în care $AB \parallel CD$. Dacă R_1 şi R_2 sunt razele cercurilor circumscrise triunghiurilor ABC şi CDA, avem:

$$R_1/R_2 = BC/DA.$$

Miron Niculescu.

R. Unghiurile CAB şi DCA sunt egale ca alterne interne.

Prin urmare, arcele BC şi DA din cercurile R_1 şi R_2 vor avea *aceeaşi măsură*; coardele subîntinse vor fi deci proporţionale cu razele respective, c. c. t. d.

71. Să se determine polinoamele $P(x)$ şi $P_1(x)$ cele mai simple, astfel ca să avem identitatea:

$$(x^3-x)\,P(x)+(x^2-4)\,P_1(x) \qquad r.$$

Th. Angheluţă.

R. Punem $P(x)=ax+b$ $P_1(x)=cx^2+dx+e$ şi identificând coeficienţii, găsim: $P(x)=1/3$, $P_1(x)=-x/3$.

72. Să se afle, fără ajutorul derivatelor, limita expresiei:

$$E=\frac{(\arcsin x)^2}{1-\sqrt{1-x^2}},$$

pentru $x=0$.

Constantin I. Georgescu.

R. Fie: $\arcsin x = y$.

Deci: $$E=\frac{y^2}{1-\cos y}=\frac{y^2}{2\sin^2 y/2}=2\left(\frac{y/2}{\sin y/2}\right)^2.$$

Când $x=0$, $y=0$; deci:

$$\lim_{y=0} E = 2.$$

73. Să se demonstreze identitatea:

$$\left[\frac{a}{r_a}+\frac{b}{r_b}+\frac{c}{r_c}\right]\left[\frac{a+b+c}{r_a+r_b+r_c}\right]=4.$$

E. Bercovici.

R. Se ţine seama de relaţiile:

$$S = r_a\,(p-a) = r_b\,(p-b) = r_c\,(p-c).$$

74. Să se verifice relaţiunea:

$$(a+b+c)\operatorname{cotg}\omega = \frac{p^2-r_a^2}{r_a} + \frac{p^2-r_b^2}{r_b} + \frac{p^2-r_c^2}{r_c},$$

ω fiind unul din unghiurile lui BROCARD, iar celelalte notaţiuni fiind cele obişnuite.

MIRCEA ADAM.

R. In relaţia cunoscută: $\operatorname{cotg}\omega = \operatorname{cotg}A + \operatorname{cotg}B + \operatorname{cotg}C$, trecem la arce pe jumătate şi ţinem seamă de relaţiile:

$$\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}A = p/r_a\,,\ \text{etc.}$$

75. Se dă curba numită foliul lui DESCARTES $x^3+y^3-3axy=0$ şi un punct P mobil pe curbă. Se notează cu M şi N punctele unde asimptota taie axele de coordonate. Se cere locul geometric al centrului de greutate al triunghiului MNP.

ION COŞEREANU.

R. Procedând prin Geometria Analitică se găseşte lesne că locul e tot foliul lui DESCARTES, reprezentat prin ecuaţia

$$(x+a/3)^3 + (y+a/3)^3 - a(x+a/3)(y+a/3) = 0,$$

al cărei punct dublu e în punctul de coordonate $(-a/3, -a/3)$, adică pe bisectoarea axelor de coordonate.

PROBLEME PROPUSE.

3061. Un număr începe cu 5 şi are în urma acestuia numai cifra 6. Cu care din primele 20 numere poate fi el divizibil? De ce formă sunt acele numere?

I. IONESCU.

3062. Se cer patratele mai mici ca un milion având cifrele patrate (0, 1, 4, 9).

D. SOLOMON.

3063. Să se afle valorile lui x care satisfac congruențele:

$$5^{x^3} \equiv 3 \pmod 7 \quad , \quad 8^{x^5} \equiv 5 \pmod{13}.$$

N. Georgescu-Roegen.

3064. Fie H și I ortocentrul și centrul cercului înscris al unui triunghiu oarecare ABC. Fie A_1, B_1, C_1 intersecțiile înălțimilor AH, BH, CH și A', B', C' intersecțiile bisectoarelor AI, BI, CI cu cercul circumscris triunghiului ABC. Se cere să se demonstreze că:

1) I este ortocentrul triunghiului A'B'C';

2) Dreptele lui Simson ale punctelor A_1, B_1, C_1 în raport cu triunghiul A'B'C' sunt paralele cu diametrele cercului circumscris, ce trece prin vârfurile triunghiului ABC.

St. Fl. Lăzărescu.

3065. Din extremitățile unei laturi a unui triunghiu oare-care, se descriu cercuri care să se taie pe înălțimea triunghiului corespunzătoare acestei laturi. Se duc apoi din vârful opus tangente la aceste cercuri. Să se arate că perpendicularele scoborîte din aceste puncte de tangență, respectiv pe laturile adiacente extremităților considerate, se vor tăia pe aceeași înălțime.

Gh. A. Nichifor.

3066. Fie Ω_1 punctul retrograd al lui Brocard dintr'un triunghiu oarecare ABC ; XYZ triunghiul podar al punctului Ω_1; MNP triunghiul format prin intersecțiile perpendicularelor duse prin vârfurile X, Y, Z respectiv pe laturile XY, YZ, ZX ; T aria triunghiului MNP.

Fie $X_1Y_1Z_1$ triunghiul podar al lui Ω_1 în raport cu triunghiul XYZ; T_1 aria triunghiului $M_1N_1P_1$ format cu ajutorul lui $X_1Y_1Z_1$ după cum MNP s'a format din XYZ. Procedând tot astfel mai departe, obținem alte triunghiuri T_2, T_3, etc.

Se cere să se demonstreze că limita sumei ariilor triunghiu-

rilor T, T_1, T_2, T_3, ... astfel formate, este egală cu aria S a triunghiului ABC.

CONSTANTIN I. GEORGESCU.

3067. u_1, u_2, ... u_n fiind termenii unui şir legaţi prin relaţia de recurenţă: $u_n = a u_{n-1} + b u_{n-2}$, în care $u_0 = 1$, $u_1 = a$, a şi b fiind pozitivi, să se arate că suma:

$$S_n = \frac{u_1 + \sqrt{u_2} + \sqrt[3]{u_3} + \cdots + \sqrt[n]{u_n}}{n}$$

păstrează o valoare finită, când numărul n creşte nemărginit.

M. GHERMĂNESCU.

3068. Dându-se ecuaţia:

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0,$$

cu rădăcinile x_1, x_2, x_3, x_4, să se arate că avem relaţia:

$$\operatorname{artg} x_1 + \operatorname{artg} x_2 + \operatorname{artg} x_3 + \operatorname{artg} x_4 = \operatorname{artg} \frac{a - c}{b - d - 1}.$$

EMIL ŞTEFĂNESCU.

3069. Printr'un plan oarecare P se secţionează un con circular drept SAB. Să se stabiliască formule pentru exprimarea suprafeţelor celor 2 solide căpătate din această secţionare.

GRIGORE ZAPAN.

3070. Se dă un patrat într'un plan vertical astfel că una din laturile sale face cu orizontala un unghiu dat. Un lanţ omogen greu, flexibil şi inextensibil alunecă pe două laturi adiacente ale patratului în jurul celui mai de sus dintre vârfuri. Să se găsiască poziţiunea de echilibru a lanţului. Discuţie.

CRISTEA MATEESCU.

Dela apariția ultimului număr s'au primit spre publicare: articole (A), note (N), cereri (C), exerciții (E), probleme propuse (P), recreațiuni (R) și probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela D-nii:

Adam M. (2340, 856, 3012, 22, 26, 32, 58, 59, R.); *Antoniu I.* (R.); *Arcadian N.* (3014, 39, 49, P.); *Balan E.* (2603, 299, 792, 922, 46, 99, 3037, 50, P.); *Barbălatt M. B.* (2898, 959, P.); *Blumenfeld D.* (3058); *Bogdan M.* (3049); *Brătescu M.* (3039); *Buşilă A.* (3044, 58); *Cădere C.* (3047); *Ciorănescu N.* (N.); *Coşereanu I.* (3047, 50, P.); *Dragomir I.* (3032, 39, 49); *Focşeneanu M.* (2994, 3017, 44); *Georgescu E. Const.* (3026, 27); *Georgescu I. Const.* (2799, 841, 922, 32, 85, 3017, 35, 37, 39, 47, 49. 50, P.); *Georgescu-Roegen N.* (2898); *Ghiţescu V.* (3039, 58, 59); *Goilav Cr.* (3026, 39, 47, 49, 50); *Iliescu Dinea* (3031); *Iliescu P. Ion* (3058); *Ionescu-Brezuica I.* (3047, 49, 58); *Ionescu L.* (2887); *Ionescu B. N.* (3049); *Katz P.* (3012); *Katz S.* (E.); *Lăzărescu St.* (3058, 59, P.); *Măcrineanu Sterian* (3007, 47, 58); *Marcus Froim* (2683); *Mirescu A. P.* (2946, 3059); *Mitescu D.* (3031); *Negretzu Fl.* (3047, 49, N. R.); *Nicolescu Angelo* (3031); *Oprişanu E.* (3027); *Orănescu O.* (P); *Popa Theodor* (2887); *Popea Ovidiu* (2891, 922, 3027, 31, 49); *Popescu G.* (N. P.); *Popoviciu Tiberiu* (2946, 3037); *Samoilă D.* (3058); *Schlifca Ernest* (3058, 59); *Scodrano Al.* (3049, 50); *Şerbănescu M. I.* (3039, 50, N.); *Singer I.* (3012); *Solacolu C. Şerban* (3017); *Solomon D.* (2683, 856, 3047, P.); *Solomon W.* (3017, 27, 37, P.); *Stavrat G.* (3049); *Ştefan M.* (2887); *Ştefănescu Em.* (2766, 838, 3014, 27, 47, N. P.); *Stoenescu I.* (N.); *Stroescu G.* (3031); *Teodorescu M. D.* (3031); *Vernescu Ernest* (3031); *Weiss Leon* (3012, 47, 58, 59).

Problemele de geometrie rezolvate cât şi cele de propus a căror soluţie nu va fi însoţită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în consideraţiune.

Soluțiunile primite în ultimul timp la problemele: **1948, 2191, 2278**, 81, 84, 95, 318, 40, 54, 59, 77, 94, 421, 34, 640, 47, 51, 61, 89, 706, 28, 66, 99, 835, 56, 60, 61, 64, 72, 79, 87, 88, 95, 906, 10, 13, 18, 20, 29, 31, 32, 55, 60, 71, 72, 73, 78, 86, 90, 91, 3010, 11, 12, 15, 19, 22, 34, 36, 40, 43, 46, 48, 51, 52, 53 57 şi 58 nu au fost încă examinate de redactorii cărora le-au fost repartizate.

Colecţiunea „GAZETEI MATEMATICE“

27 VOLUME

Colecţiunea întreagă . . . . . Lei 1000,—

Se vând şi volume izolate, cu preţul de 50 lei, afară de volumele: I, X, XV, XIX, XX şi XXI care se vând numai cu colecţiunea întreagă.

Biblioteca „GAZETEI MATEMATICE“

1. **I. Ionescu, G. Ţiţeica, A. G. Ioachimescu şi V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Aritmetică, Geometrie, Algebră şi Trigonometrie. (520 pag. cu 3381 probleme).* (Epuizată).

2. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de probleme de algebră* (teoria ecuaţilor), (82 pag. cu 462 probleme). (Epuizată).

3. **N. Abramescu,** *Curs de algebră superioară* pentru cl. VIII reală, *Ediţia IIa revăzută şi adăogită,* 1921. (Epuizată). Lei 30,—

4. **A. G. Ioachimescu şi G. Ţiţeica,** *Culegere de probleme de mecanică şi geometrie analitică* (222 pag. cu 825 probleme şi o planşă) (Epuizată) . . . . . Lei 20,—

5. **Tr. Lalescu şi Şt. N. Mirea,** *Culegere de probleme de geometrie descriptivă şi cosmografie* . . . . . Lei 15,—

6. **Tr. Lalescu,** Tratat de Geometrie analitică,
Fascicola I (Epuizată) . . . . . Lei 10,—
Idem, Fascicola II Conice . . . . . Lei 20,—
Idem, Fascicola III Cuadrice . . . . . Lei 20,—

7. **Gh. Lazăr,** *Trigonometria drept liniară* (după cursul predat de Gh. Lazăr la colegiul Sf. Sava) . . . . . Lei 5,—

8. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de probleme de Algebră,* ediţia II-a revăzută şi adăogită, 400 pagini cuprinzând 1765 probleme . . . . . Lei 60,—

La aceste preţuri se vor adăogà taxele poştale pentru expediţie.

Biblioteca Technică a „GAZETEI MATEMATICE“

(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

I. Ionescu, *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcţiune şi a principiilor de calcul.* Volum legat, cuprinzând 128 de pagini şi 15 tabele numerice practice, pentru proiectarea construcţiunilor de beton armat. Lei 12,—

Gazeta Matematică apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 50 lei anual, se plăteşte înainte şi începe la 15 Septemvrie, ori când s'ar face achitarea lui în cursul anului şi nu se face pe termene mai scurte de un an. Abonamentele, schimbările de adrese, reclamaţiunile şi cererile pentru cărţi din biblioteca «Gazetei Matematice», se vor trimete D-lui: **I. D. Teodor,** Inginer Inspector General, Directorul General al Regiei Monopolurilor Statului (adresa: Fabrica de Chibrituri, Bucureşti).

Schimburile de reviste, uvrage pentru recenzii şi orice alte cereri, afară de cele privitoare la cassierie şi expediţie, se vor trimite D-lui Inginer Inspector General I. IONESCU, Str. Căluşei 23, Bucureşti.

Prof. Asociatiuea p. cultura și literatura poporului Roman din Sibiu

GAZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

ANUL XXVIII.

NUMĂRUL 11. — IULIE 1923

SUMARUL

1. Asupra punctelor şi triunghiurilor isobarice . . . . . *B. M. Barbălatt.*
2. Note Matematice: 80 — 91.
3. Bibliografie.
4. Probleme Rezolvate: 2260, 2413, 2691, 2728, 2858, 2901, 2989, 3018, 3020, 3027, 3049.
5. Exerciţii: 76 — 84.
6. Probleme propuse: 3067, 3071 — 3080.

ABONAMENTUL 50 LEI PE AN.

BUCUREŞTI
IMPRIMERIA FABRICILOR DE CHIBRITURI ŞI TIMBRE - FILARET
1923

SPRE ŞTIINŢA

Gazeta Matematică se publică de către **Societatea „Gazeta Matematică“** având sediul în Bucureşti, compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie de 3 membri, care pentru anul XXVIII se compune din D-nii **N. I. Georgescu,** Inginer-Şef, Director General al Serviciului Imbunătăţirilor Funciare, **Tr. Lalescu,** Doctor în Matematici, Profesor Universitar şi **I. D. Teodor,** Cassier, Inginer Inspector General, Profesor la Şcoala Politechnică, Directorul General al Regiei Monopolurilor Statului.

Manuscrisele destinate „Gazetei Matematice“ se vor trimite D-lui GEORGE BORNEANU, Inginer, sub-directorul Fabricilor de chibrituri şi timbre, Bucureşti.

Se pot trimite şi pe acelaş nume în Str. Sf. Constantin 31, Bucureşti.

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse şi exerciţiile se vor redijă în conformitate cu instrucţiunile se se pot procură dela D-l Cassier *I. D. Teodor,* în schimbul sumei de 1 (un) leu ce se poate trimite prin poştă.

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evită confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie.

In vederea sporirii taxelor poştale, corespondenţii pot trimete de aci înainte manuscrisele scrise pe ambele pagini ale unei foi, fără a lăsă spaţii albe pe margini sau dedesubt, tăind foile în consecinţă.

Nu se admite însă a se tratà pe aceeaşi foaie mai multe chestiuni sau probleme.

Articolele, notele, problemele propuse, exerciţiile, recreaţiile ce se trimit pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICĂ“, trebue să fie originale, iar nu luate din cărţi sau reviste speciale de matematici.

Probleme nerezolvate: 171, 485, 581, 691, 886, 87, 914, 44, 1000, 08, 56, 58, 83, 92, 146, 62, 78, 80, 214, 36, 70, 71, 87, 97, 99, 355, 64, 67, 77, 79, 84, 86, 98, 99, 412, 50, 82, 90, 553, 84, 87, 626, 37, 50, 76, 79, 80, 711, 29, 33, 35, 53, 64, 90, 835, 76, 82, 84, 905, 06, 14, 29, 44, 45, 49, 59, 73, 79, 87, 2003, 04, 16, 17, 32, 70, 74, 94, 111, 12, 26, 56, 70, 216, 300, 47, 53, 91, 92, 95, 408, 14, 20, 22, 28, 34, 39, 40, 43, 44, 48, 53, 56, 59, 61, 62, 66, 69, 71, 73, 77, 79, 81, 84, 87, 91, 97, 500, 01, 02, 03, 10, 11, 12, 24, 29, 37, 39, 43, 44, 45, 46, 55, 56, 60, 69, 71, 77, 78, 80, 82, 87, 91, 93, 96, 97, 99, 602, 07, 08, 10, 13, 23, 35, 38, 41, 43, 44, 45, 47, 50, 55, 56, 58, 60, 65, 69, 71, 75, 84, 86, 92, 93, 94, 95, 96, 709, 12, 13, 17, 27, 35, 38, 43, 45, 47, 58, 64, 69, 78, 80, 89, 96, 809, 14, 16, 29, 51, 53, 57, 60, 65, 86, 88, 89, 902, 09, 12, 15, 16, 26, 36, 45, 53, 56, 61, 83, 95, 3000, 05, 08, 10, 13, 19, 25, 33, 40, 42, 45, 52, 55, 56, 60, 65, 66, 67, 69, 70.

Avem plăcerea a anunţà că dela 4 iulie a. c., fac parte din Societatea noastră şi D-nii: **Locot. Gh. Niculescu** şi **Prof. I. Stamatescu.**

ASUPRA
PUNCTELOR ŞI TRIUNGHIURILOR ISOBARICE.

Printre cele mai interesante chestiuni din geometria recentă a triunghiului sunt, fără îndoială, punctele şi triunghiurile isobarice (A. AURIC), numite şi puncte permutante, fiindcă coordonatele lor se obţin prin permutări circulare între coordonatele baricentrice ale unui punct.

In cele ce urmează voi expune câteva proprietăţi ale acestor puncte şi triunghiuri.

1. *Notaţiuni.* Vom însemnà cu:

A, B, C vârfurile triunghiului de referinţă;

a, *b*, *c* laturile » » »

C_1, A_1, B_1 punctele unde cercurile adjuncte (BC), (CA), (AB) taie respectiv laturile AB, BC, CA;

B_2, C_2, A_2 punctele unde cercurile adjuncte (CB), (AC), (BA) taie respectiv laturile CA, AB, BC;

A'_1, B'_1, C'_1 isotomicele punctelor A_1, B_1, C_1;

A'_2, B'_2, C'_2 « » A_2, B_2, C_2;

R punctul lui STEINER al triunghiului ABC;

R_i ($i = 1, 2, \ldots 5$) permutantele directe şi inverse ale lui R;

G şi K centrul de greutate şi punctul lui LEMOINE;

K_i ($i = 1, 2, \ldots 5$) permutantele lui K;

L punctul lui LONGCHAMPS, iar

L_i ($i = 1, 2, \ldots 5$) permutantele lui L;

I şi I_i ($i = 1, 2, \ldots 5$) centrul cercului înscris şi permutantele sale;

Ω şi Ω' punctele lui BROCARD; D mijlocul segmentului $\Omega\,\Omega'$.

D_i ($i = 1, 2, \ldots 5$) mijloacele segmentelor $\Omega'L$, ΩL, L_4L_5, L_3L_5, L_4L_3.

2. Centrul radical al cercurilor circumscrise triunghiurilor C_1AC, A_1BA, B_1CB este punctul R_2 (al doilea permutant direct al punctului R).

In adevăr, se ştie că ecuaţia unui cerc în coordonate baricentrice este:

$$F/\delta = l\alpha + m\beta + n\gamma,$$

în care α, β, γ sunt coordonatele baricentrice absolute ale unui punct de pe cerc; *l*, *m*, *n* puterile vârfurilor A, B, C ale triunghiului în raport cu cercul considerat, iar:

$$F = a^2\beta\gamma + b^2\gamma\alpha + c^2\alpha\beta, \qquad \delta = \alpha + \beta + \gamma.$$

In cazul cercului C_1AC, avem:

$$n = l = o, \qquad m = c.BC_1 = c(c - AC_1). \tag{1}$$

Triunghiul ABC e asemenea cu C_1AC; deci avem:

$$C_1A/AC = AC/AB, \text{ sau } AC_1 = b^2 : c$$

şi înlocuind în (1), obţinem $m = c^2 - b^2$; ecuaţia cercului C_1AC este dar:

$$F/\delta = (c^2 - b^2)\beta. \tag{2}$$

Figura presupune că punctul C_1 se află între A şi B, ceiace are loc când $\sphericalangle C > \sphericalangle B$. Când $\sphericalangle C < \sphericalangle B$, atunci C_1 este pe prelungirea laturei AB dincolo de B; punctul B e atunci în interiorul cercului C_1AC, deci are o putere negativă faţă de acest cerc. In acest caz avem:

$$-m = c(b^2/c - c), \text{ sau } m = c^2 - b^2,$$

iar ecuaţia cercului C_1AC nu se modifică. Această observaţie se aplică şi pentru celelalte cercuri ce le vom considera.

Găsim analog că ecuaţiile cercurilor A_1AB şi B_1CB sunt:

$$F/\delta = (a^2 - c^2)\gamma, \tag{3} \qquad F/\delta = (b^2 - a^2)\alpha \tag{4}$$

Centrul radical al cercurilor (2), (3), (4) va fi la intersecţia axelor lor radicale; coordonatele sale vor verifică ecuaţiile:

$$(b^2 - a^2)\alpha = (c^2 - b^2)\beta = (a^2 - c^2)\gamma,$$

adică este punctul cu coordonatele:

$$R_2\left(\frac{1}{a^2 - b^2}, \frac{1}{b^2 - c^2}, \frac{1}{c^2 - a^2}\right).$$

3. Centrul radical al cercurilor C'_1CB, A'_1AC, B'_1BA se confundă cu centrul radical al cercurilor B'_2BC, C'_2AC, A'_2BA şi e punctul lui STEINER al triunghiului.

Printr'un calcul analog cu cel dela 2 găsim, că coordonatele baricentrice ale centrului radical al cercurilor BCC'_1, CAA'_1 ABB'_1 satisfac ecuaţiilor:

$$(c^2 - b^2)\alpha = (a^2 - c^2)\beta = (b^2 - a^2)\gamma,$$

iar al celuilalt grup de cercuri:

$$(b^2 - c^2)\alpha = (c^2 - a^2)\beta = (a^2 - b^2)\gamma.$$

Centrul radical comun este deci punctul

$$R\left(\frac{1}{b^2-c^2}\ ,\ \frac{1}{c^2-a^2}\ ,\ \frac{1}{a^2-b^2}\right).$$

4. Patrulaterele $AA_2CC'_1$, $A'_1ABB'_2$, $C'_2CBB'_1$ sunt inscriptibile şi centrul radical al acestor cercuri este punctul lui LONGCHAMPS.

Patrulaterele sunt inscriptibile căci

$$AB'_1.AC = AC'_2.AB = a^2, \text{ etc.},$$

iar coordonatele centrului radical verifică ecuaţiile:

$$a^2\alpha = b^2\beta = c^2\gamma,$$

adică este punctul ale cărui coordonate baricentrice sunt:

$$L\ (1/a^2,\ 1/b^2,\ 1/c^2).$$

5. Centrul radical al cercurilor ABB_2, CBC_2, ACA_2 este punctul R_1.

In adevăr, ecuaţiile acestor cercuri sunt:

$$F/\delta = (c^2-a^2)\,\alpha, \qquad F/\delta = (a^2-b^2)\,\beta, \qquad F/\delta = (b^2-c^2)\,\gamma,$$

iar centrul lor radical este punctul

$$R_1\left(\frac{1}{c^2-a^2}\ ,\ \frac{1}{a^2-b^2}\ ,\ \frac{1}{b^2-c^2}\right).$$

6. L_3, L_4, L_5 sunt respectiv centrele radicale ale grupurilor de cercuri:

$$BCB'_1C'_2\ ,\ (CA)\ ,\ (BA)\ ;$$
$$CAC'_1A'_2\ ,\ (AB)\ ,\ (CB)\ ;$$
$$ABA'_1B'_2\ ,\ (BC)\ ,\ (AC)\ .$$

Demonstraţia e foarte simplă.

7. Punctul R_3 se obţine luând intersecţia axului radical

$$(b^2-c^2)\,\alpha = (a^2-b^2)\,\beta,$$

al cercurilor BCB'_2, ACA'_2, cu axul radical

$$(a^2-c^2)\,\gamma = (c^2-b^2)\,\alpha,$$

al cercurilor ABA_1 şi BCC'_1. Punctul comun este

$$R_3\left(\frac{1}{b^2-c^2}\ ,\ \frac{1}{a^2-b^2}\ ,\ \frac{1}{c^2-a^2}\right).$$

Analog punctul

$$R_4\left(\frac{1}{a^2-b^2}\ ,\ \frac{1}{c^2-a^2}\ ,\ \frac{1}{b^2-c^2}\right)$$

este intersecţia axului radical al cercurilor CBB_1, CAA'_1 cu axul radical al cercurilor ABB_2, ACC'_2.

Iar

$$R_5\left(\frac{1}{c^2-a^2}\ ,\ \frac{1}{b^2-c^2}\ ,\ \frac{1}{a^2-b^2}\right)$$

este la intersecţia axelor radicale ale cercurilor ACC_1, ABB'_1 şi BAA'_2, BCC_2.

8. Punctele de intersecţie (BB'_2, CC'_1), (CC'_2, AA'_1), (AA'_2, BB'_1) se găsesc pe prima elipsă a lui STEINER.

In adevăr, se vede uşor că CC_1 e paralelă cu BB_2; deci punctul (BB'_2, CC'_1) e reciprocul unui punct dela infinit. Se ştie însă că transformata dreptei dela infinit prin puncte reciproce, este elipsa lui STEINER; deci proprietatea e demonstrată.

9. Polarele trilineare ale punctelor R şi R_i $(i = 1, 2, \ldots 5)$ trec prin centrul de greutate G şi respectiv prin K şi K_i $(i = 1, 2, \ldots 5)$.

Ecuaţia polarei trilineare a punctului lui STEINER este:

$$(b^2 - c^2)\,\alpha + (c^2 - a^2)\,\beta + (a^2 - b^2)\,\gamma = 0,$$

care e verificată de G (1, 1, 1) şi K (a^2, b^2, c^2).

Analog pentru celelalte polare trilineare.

10. In triunghiul în care $a^2 = bc$, următoarele grupuri de puncte sunt în linie dreaptă:

$$A,\ I,\ R,\ D\ ;\ B,\ I_2,\ R_2,\ D_2\ ;\ C,\ I_1,\ R_1,\ D_1\ ;$$

$$A,\ I_3,\ R_3,\ D_3\ ;\ B,\ I_5,\ R_5,\ D_5\ ;\ C,\ I_4,\ R_4,\ D_4\ .$$

Coordonatele baricentrice ale punctului D sunt proporţionale cu $a^2(b^2+c^2)$, $b^2(c^2+a^2)$, $c^2(a^2+b^2)$, iar ale lui I cu a, b, c. Pentru ca A, I şi D să fie în linie dreaptă, trebue ca determinantul

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b & c \\ a^2(b^2+c^2) & b^2(c^2+a^2) & c^2(a^2+b^2) \end{vmatrix}$$

să fie nul, ceiace ne dă condiţia:

$$(b - c)\,(a^2 - bc) = 0.$$

De asemenea punctele A, I, R vor fi în linie dreaptă, dacă determinantul

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b & c \\ 1/(b^2-c^2) & 1/(c^2-a^2) & 1/(a^2-b^2) \end{vmatrix} = 0,$$

care se reduce la $(b+c)\ (a^2-bc)=0$.

Demonstrația este analoagă pentru celelalte puncte.

11. In triunghiul în care $a^2=bc$, dreptele AL, AL_3, $B\Omega'$, BL_5, CL_4, $C\Omega$ trec respectiv prin mijloacele dreptelor R_1R_2, R_4R_5, R_1R; R_3R_4, R_3R_5, RR_2. Demonstrație analoagă ca mai sus.

12. In triunghiul în care $a^2=bc$, dreptele $C\Omega$ și $B\Omega'$ taie polara trilineară a lui K în punctele R'_1 și R'_2, inversele punctelor R_1 și R_2 în raport cu ABC.

Se știe că R'_1 și R'_2 se găsesc pe polara trilineară a lui K. Prin urmare va fi de ajuns să arătăm că punctele C, Ω, R'_1 sunt în linie dreaptă. Dar coordonatele lui R_1 fiind

$$\frac{1}{c^2-a^2}\ ,\ \frac{1}{a^2-b^2}\ ,\ \frac{1}{b^2-c^2}\ ,$$

inversul său R'_1 are coordonate

$$a^2(c^2-a^2)\ ,\ b^2(a^2-b^2)\ ,\ c^2(b^2-c^2).$$

Trebue deci să avem

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1/b^2 & 1/c^2 & 1/a^2 \\ a^2(c^2-a^2) & b^2(a^2-b^2) & c^2(b^2-c^2) \end{vmatrix} = 0.$$

Desvoltând, găsim $a^2=bc$.

Demonstrație analoagă pentru punctele B, Ω'_1, R'_2.

B. M. Barbălatt.
Elev în Cl. VI Liceul Codreanu, Bârlad.

NOTE MATEMATICE.

80. *Alte zece mecanici diverse.* (Vezi nota 32, pag. 207).

31. **Fluidelor.** *M. Kühlmann.* — Mechanik flüssiger Körper. 1880.

32. **Formală.** *Mathesis* 1914. — Suplimentul cu viața lui *Tilly*.

33. **Incepătorului.** *I. Todhunter.* — Mechanics for beginners. 1890.

34. **Maşinilor.** *J. Weinbach.* — Lehrbuch der Ingenieur-und Maschinen Mechanik. 1851.

35. **Matriculară.** *W. Briggs & G. H. Bryan.* — Matriculation mechanics. Londra 1914.

36. **Omului practic.** *A. Tamieson.* — Mechanics for practical men. 1845.

37. **Practică.** *T. Hann.* — Mechanics, theoretical und praccal. 1857

38. **Raţionată.** *E. Villié.* — Mécanique raisonnée. (Curs autografiat). 1890.

39. **Şcoalelor.** *W. G. Borchardt.* — School Mechanics. Londra. 1919.

40. **Tecnologică.** *P. Ludwik.* — Technologische Mechanik.

(Va urmă) I. Ionescu.

81. *Asupra problemei 2557.* La finele soluţiei acestei probleme (*Gazeta Matematică*, Anul XXVII, pag. 94) s'a omis a se examină şi cazul:

$$2^{n+2}+1 \equiv_{\mathcal{M}} 3, \qquad 2^{2(n-1)}-1 \equiv_{\mathcal{M}} 3.$$

Prima egalitate este satisfăcută dacă n este nepereche, a doua oricând. Deci, pe lângă soluţia dată $n \equiv_{\mathcal{M}} 3+1$, problema mai admite şi soluţia $n \equiv_{\mathcal{M}} 2+1$.

I. B. Florescu.

82. *Asupra exerciţiului 27, Anul XXVI.* Acest exerciţiu se bazează pe proprietatea că, orice putere pereche a unui număr prim, este $\equiv_{\mathcal{M}} 24+1$. Acest lucru nu este însă adevărat pentru nu-

merele prime 2 şi 3. Exerciţiul trebuia dar făcut numai pentru numerele prime mai mari ca 3.

M. ADAM.

83. *Asupra şirului lui* FIBONACCI.

a. Aplic, în cele ce urmează, pentru aflarea termenului de rang u din şirul lui FIBONACCI, metoda indicată de D-l Prof. ION IONESCU în Nota No. 22. „G. M." Vol. XXII „Asupra unor şiruri recurente".

Termenii şirului lui FIBONACCI sunt legaţi prin relaţia:

$$u_{n+1} - u_n - u_{n-1} = 0. \qquad (1)$$

Fie: $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ $y = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ (Rădăcinile ec. $z^2 - z - 1 = 0$)

$$\therefore \quad x + y = 1, \quad xy = -1. \qquad (2)$$

Dacă: $$s_n = x^n - y^n, \qquad (3)$$

se poate arătă uşor că:

$$s_{n+1} - s_n - s_{n-1} = 0. \qquad (4)$$

Comparând termenii şirurilor

$$u_1 = 1 \quad u_2 = 2 \quad u_3 = 3 \ldots$$

$$s_1 = \sqrt{5} \quad s_2 = \sqrt{5} \quad s_3 = 2\sqrt{5} \ldots$$

deducem:

$$u_1 . \sqrt{5} = s_2 \quad u_2 . \sqrt{5} = s_3,$$

$$\therefore \quad (u_1 + u_2)\sqrt{5} = s_2 + s_3,$$

sau, ţinând seama de rel. (1) şi (4)

$$u_3 . \sqrt{5} = s_4$$

şi, în general, $$u_n \sqrt{5} = s_{n+1},$$

sau $$u_n . \sqrt{5} = x^{n+1} - y^{n+1} \qquad (5)$$

$$\therefore \quad u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right]. \qquad (6)$$

* * *

b. Ridicând relaţia (5) la cub, obţinem relaţia:

$$5\sqrt{5}\,u_n^3 = x^{3n+3} - y^{3n+3} - 3(xy)^{n+1}[x^{n+1} - y^{n+1}],$$

care, ţinând seamă de (2) şi (5), devine:

$$5u_n^3 = u_{3n+2} + (-1)^n 3u_n . \qquad (7)$$

Înlocuind în relaţia (7) pe n prin $(n-1)$ şi $(n+1)$ şi adunând-o cu relaţiile obţinute, avem:

$$5(u_{n+1}^3 + u_u^3 - u_{n-1}^3) = u_{3n+5} + u_{3n+2} - u_{3n-1}. \qquad (8)$$

Se poate stabili uşor că:

$$u_{m+3} - u_{m-3} = 4u_m . \qquad (9)$$

Dacă în (9) facem $m = 3n+2$ şi introducem în (8), obţinem:

$$u_{n+1}^3 + u_n^3 - u_{n+1}^3 = u_{3n+2} . \qquad (10)$$

M. Davidescu.

84. *Asupra problemei 2299. (Gazeta Matematică* Vol. XXIII, pag. 113). Problema subsistă şi pentru triunghiul $A_2B_2C_2$ format de punctele în care bisectoarele exterioare ale triunghiului ABC taie cercul O. Punctele A_2, B_2, C_2 sunt respectiv simetricele punctelor A_1, B_1, C_1 în raport cu centrul O, iar A_2 este fix ca şi A_1. Rezultă de aici că înfăşurătoarea dreptei B_2C_2 este aceiaşi ca şi a dreptei B_1C_1, adică cercul cu centrul O şi raza $\rho = R\sin\frac{1}{2}A$, iar locul geometric al centrului de greutate al triunghiului $A_2B_2C_2$ este un cerc Γ_1 cu raza $\frac{2}{3}\rho$, simetricul, faţă de centrul O, al cercului Γ_2, locul geometric al centrului de greutate al triunghiului $A_1B_1C_1$.

V. Cristescu.

85. *Asupra problemei 2657.* O problemă analoagă cu aceasta şi care permite tot odată şi tratarea acesteia este următoarea: «*Într'un cerc cu centrul în* O, *se dă o rază şi punctul care o împarte în două părţi egale. Să se înscrie şi circumscrie acestui cerc poligoane regulate de* 3.2^n *laturi*».

Pentru rezolvirea ei ducem o paralelă la diametrul format prin prelungirea razei aO, care taie cercul în A′ B′. Această paralelă, împreună cu diametrul A a B, formează un trapez isoscel. Prin intersecţia (AB′, BA′) şi O, se duce un alt diametru care este perpendicular pe AB. De oarece i se cunoaşte mijlocul acestui nou dia-

metru, se poate duce o perpendiculară în a, pe AB. Astfel s'a determinat triunghiul echilateral înscris şi prin paralele la laturile opuse, duse prin vârfuri, se obţine şi cel circumscris. Prin unirea vârfurilor cu centrul, se obţine exagonul înscris şi circumscris.

Apoi se determină şi mijloacele arcurilor, bazaţi pe faptul că dreapta, ce uneşte intersecţia diagonalelor unui trapez înscris cu centrul cercului, împarte coardele, deci şi arcele, în 2 părţi egale. Prin prelungirea razelor poligoanelor înscrise se determină poligoanele de acelaş număr de laturi, însă circumscrise.

Problema generală însă se poate pune astfel:

„Se dă un cerc cu centrul în O *şi punctul* a *care împarte o rază în raportul* $\frac{a_k}{R-a_k}$. *Să se înscrie şi circumscrie acestui cerc, poligoane de* $k.2^n$ *laturi,* a_k *fiind apotema poligonului regulat de* k *laturi, înscris în cerc*".

Problema se tratează întocmai ca şi cea de mai sus şi se poate consideră şi ca o generalizare a problemei 2657.

N. Georgescu-Roegen.

86. *Generalizarea teoremei lui Franke.* Teorema lui Franke se poate generalizà astfel: *Fie* G *centrul de greutate al unui triunghiu* ABC; A',B',C' *mijloacele laturilor lui şi* O *un punct arbitrar din planul acestui triunghiu.*

Dacă se iau punctele D, E, F *pe dreptele* OA', OB', OC', *aşà ca sà avem:*

$$(1) \qquad OA'/OD = OB'/OE = OC'/OF,$$

dreptele AD, BE, CF *sunt concurente într'un punct* O *de pe* OG.

O demonstraţie simplă este următoarea: In virtutea relaţiunilor (1), dreptele B'C' şi EF sunt paralele între ele şi deci şi cu BC, atunci punctele B, C şi intersecţia dreptelor B'C', EF sunt colineare. Prin urmare, intersecţia (BE, CF), în virtutea teoremei lui Desargues, se află pe OG.

Asemenea demonstrăm că şi intersecţiile (CF, AD), (AD, BE) se află pe OG, deci dreptele AD, BE, CF sunt concurente într'un punct P de pe OG.

Dacă O este centrul cercului circumscris, suntem în cazul

teoremei lui Franke, P este punctul lui Franke și OG dreapta lui Euler.

Tot cu ajutorul triunghiurilor omologice, putem demonstrà următoarea teoremă generală:

Fie AA', BB', CC' *trei ceviene oarecare concurente în* G *și* O *un punct arbitrar din planul triunghiului* ABC.

Dacă luăm pe dreptele OA', OB', OC' *punctele* D, E, F, *așà fel ca intersecțiile* (B'C', EF), (A'C', DF), (A'B', DE) să fie respectiv pe laturile BC, AC, AB ale triunghiului, dreptele AD, BE, CF sunt concurente într'un punct P de pe dreapta OG.

TIBERIU POPOVICIU.

87. *Asupra problemei 1730.* (*G. M.* Vol. XXIV Pag. 105). Enunțul acestei probleme este: *Să se rezolve în numere întregi ecuația*

$$2/z = 1/x + 1/y,$$

Imi propun să dau o soluție mai simplă acestei chestiuni. Ecuația dată se mai poate scrie

$$2xy = z(x+y).$$

unde x și y sunt rădăcinile ecuației

$$s^2 - (x+y)s + \frac{z(x+y)}{2} = 0,$$

sau punând $x+y=n$, ecuația devine

$$s^2 - ns + zn/2 = 0.$$

$$(1) \qquad \therefore \qquad x = \frac{n+\sqrt{n^2-2zn}}{2}, \quad y = \frac{n-\sqrt{n^2-2zn}}{2}.$$

Pentru ca x și y să fie numere întregi, trebue ca $n^2 - 2zn$ să fie patrat perfect; deci

$$n^2 - 2zn = k^2, \qquad \therefore \qquad (n-z)^2 = k^2 + z^2.$$

Această ecuație, rezolvată în numere întregi, are ca soluții:

$$(n-z) = u^2 + v^2, \quad k = 2uv, \quad z = u^2 - v^2.$$

(A se vedeà articolul d-lui ȚIȚEICA, rezolvarea ecuației $x^2+y^2=z^2$, din G. M. vol. XIV. p. 65). De unde:

$$n = 2u^2, \quad n^2 - 2zn = 4u^2v^2.$$

Inlocuind aceste valori în (1), avem soluţiile problemei 1730:

$$x = u\,(u+v),\quad y = u\,(u-v),\quad z = (u-v)\,(u+v).$$

Dând valori lui u şi v, obţinem soluţiile numerice ale problemei; de ex., $u=4$, $v=3$, deci $x=28$, $y=4$, $z=7$, etc.

I. T. RIZESCU.

88. *Asupra unei probleme de maximum.* Să găsim care este maximul expresiunei:

$$E = 4Rr/p^2.$$

Avem $E = 4Rp^2 \cdot rp^2/p^6$.

Insă se ştie că:

(1) $rp^2 = r_a r_b r_c$; r_a, r_b, r_c fiind razele cercurilor exînscrise. Avem deasemenea:

$$r_b + r_c = \frac{S}{p-b} + \frac{S}{p-c} = \frac{Sa}{(p-b)\,(p-c)}$$

$$(2)\ \therefore \Pi(r_b + r_c) = \frac{S^3\,abc}{(p-a)^2(p-b)^2(p-c)^2} = \frac{8R^3p^2\sin A\sin B\sin C}{2R^2\sin A\sin B\sin C} = 4Rp^2.$$

Ţinând seamă de (1) şi (2), putem scrie:

$$E = r_a r_b r_c\,(r_b + r_c)\,(r_c + r_a)\,(r_a + r_b)/p^6.$$

Suma factorilor este:

$$S = r_a\,(r_b + r_c)\,p^2 + r_b\,(r_c + r_a)/p^2 + r_c\,(r_a + r_b)/p^2 = 2\,\Sigma\, r_b r_c\,/p^2 = 2 = Ct,$$

căci se ştie că $\Sigma\, r_b r_c = p^2$.

Suma factorilor fiind constantă, produsul este maximum când factorii sunt egali, adică:

$$r_a\,(r_b + r_c) = r_b\,(r_a + r_c) = r_c\,(r_a + r_b),\ \therefore\ r_a = r_b = r_c,$$

adică triunghiul este echilateral, şi deci $E = 8/27$.

FLORIAN GR. GEORGESCU.

89. *Asupra unei teoreme relativă la funcţiile simetrice întregi şi omogene.*

Intr'o serie de trei articole (*G. M.* XV), D-l Profesor G. ŢIŢEICA se ocupă de funcţiunile simetrice întregi a n cantităţi. In

special, Domnia sa stabileşte o frumoasă teoremă asupra coeficienţilor unei funcţiuni simetrice şi omogene. Scopul acestei Note este de a pune această teoremă în legătură cu o proprietate a rădăcinilor unei ecuaţii binome.

Dacă se pune:

$$S_p = x_1^p + x_2^p + \ldots + x_n^p,$$

se găseşte formula lui NEWTON (G. M. XV p. 293):

$$(1) \qquad S_{\alpha+p}, S_{\alpha-1} + p_2 S_{\alpha-2} + \ldots + \alpha p_\alpha = 0,$$

$$\text{unde } \alpha < n,$$

iar $p_1, p_2, \ldots, p_n$ sunt legate de funcţiile simetrice fundamentale prin relaţiile:

$$\Sigma x_1 x_2 \ldots x_i = (-1)^i p_i .$$

In aceste condiţiuni, iată teorema despre care e vorba: *Dacă se exprimă* S_α *în funcţiune de* $p_1, \ldots, p_x$, *se obţine un polinom a cărui sumă a coeficienţilor este* —1.

Iată o demonstraţie diferită de a D-lui Prof. G. ŢIŢEICA. Scriind toate relaţiile (1) dela α şi pânăla 1, se obţine un sistem liniar, de unde scoţându-se S_α avem:

$$S_\alpha = - \begin{vmatrix} \alpha p_\alpha & p_1 & p_2 \ldots p_{\alpha-1} \\ (\alpha-1) p_{\alpha-1} & 1 & p_1 \ldots p_{\alpha-2} \\ (\alpha-2) p_{\alpha-2} & 0 & 1 \ldots p_{\alpha-3} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 2 p_2 & 0 & 0 \ldots p_1 \\ 1 & 0 & 0 \ldots 1 \end{vmatrix}$$

Evident că suma coeficienţilor polinomului S_α, prin raport cu $p_1, p_2 \ldots p_n$, se va obţine făcând:

$$p_1 = p_2 = \ldots p_n .$$

Deci această sumă este dată de determinantul

$$-\begin{vmatrix} \alpha & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \alpha-1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \alpha-2 & 0 & 1 & \ldots & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 2 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{vmatrix}$$

Scăzând din prima coloană suma celorlalte, se obține —1.

In acest caz $\alpha \leq n$, demonstrația este făcută.

In loc de a merge mai departe pe această cale și pentru cazul $\alpha > n$, să interpretăm demonstrația de mai sus.

Din expresiunea lui S_α rezultă că făcând:

$$p_1 = p_2 = \ldots = p_n,$$

suma coeficienților nu este altceva decât suma puterilor α a rădăcinilor ecuației:

$$x^n + x^{n-r} + \ldots + x + 1 = 0. \tag{2}$$

Pentru aceasta vom calculà întâi S_α pentru ecuația binomă: $x^{n+i} - 1 = 0$ și din ea vom scădeà pe 1 pentru a aveà pe S_α, pentru ecuația (2).

Dar pentru ecuația binomă: $S_\alpha = 0$, dacă α nu e multiplu de $n+1$. Deci scăzând pe 1 găsim că suma coeficienților este —1, oricare ar fi α, numai să nu fie multiplu de $n+1$.

Dacă însă $\alpha \equiv 0 \pmod{n+1}$, pentru ecuația binomă avem: $S_\alpha = n+1$.

Deci în acest caz suma coeficienților este n.

Teorema relativă la funcțiile simetrice multiple

$$\sum x_1^\alpha x_2^\beta \cdots x_k^\lambda,$$

este în legătură tot cu această proprietate a ecuațiilor binome.

Pentru aplicațiuni, rezultă că este folositor a se utilizà ecuația binomă.

TH. ANGHELUȚĂ.

90. *Asupra elipselor lui* STEINER. Se dă un triunghiu ABC şi fie M $(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$ un punct în planul său; fie M_1 $(\beta_0, \gamma_0, \alpha_0)$, M_2 $(\gamma_0, \alpha_0, \beta_0)$ cele două permutante directe ale lui M şi M_3 $(\alpha_0, \gamma_0, \beta_0)$, M_4 $(\gamma_0, \beta_0, \alpha_0)$, M_5 $(\beta_0, \alpha_0, \gamma_0)$ cele trei permutante indirecte ale lui M. Dintr'o problemă a D-lui ION IONESCU (G. M. Vol XXVII, pag. 168), se ştie că punctele M, M_1, M_2, M_3, M_4, M_5 se găsesc pe conica:

$$(1) \qquad (C) \qquad A_1(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)+B_1(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)=0.$$

1. Locul geometric al punctelor M, astfel ca conica (C) să fie circumscrisă lui ABC, este elipsa primă a lui STEINER cu centrul în baricentrul G al triunghiului şi care trece prin A, B, C.

Se ştie că ecuaţia elipsei lui STEINER este:

$$(2) \qquad \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=0.$$

Să arătăm că dacă conica (C) trece prin vârfurile triunghiului, atunci ecuaţia (1) se reduce la (2).

Punând condiţia ca (C) să treacă prin A (1,0,0), sau B (0,1,0), sau C (0,0,1), găsim că:

$$A_1=0.$$

Ecuaţia conicei (C) se reduce în consecinţă la (2), căci $B_1 \neq 0$.

2. Locul geometric al punctului M_1 astfel ca (C) să fie înscrisă în ABC, este elipsa doua a lui STEINER, cu centrul în G şi care e tangentă laturilor lui ABC, în mijloacele laturilor.

Se ştie că ecuaţia generală a unei conice înscrise, este:

$$(3) \quad \alpha^2/\alpha_1^2+\beta^2/\beta_1^2+\gamma^2/\gamma_1^2-2\,(\beta\gamma/\beta_1\gamma_1+\gamma\alpha/\gamma_1\alpha_1+\alpha\beta/\alpha_1\beta_1)=0,$$

unde α_1, β_1, γ_1 sunt coordonatele punctului lui GERGONNE al conicei, punctul de întâlnire al dreptelor ce unesc respectiv pe A, B, C, cu punctele unde conica atinge laturile BC, CA, AB.

Pentru ca ecuaţia (3) să fie analoagă cu ecuaţia generală a conicei (C), trebue evident ca:

$$\alpha_1^2=\beta_1^2=\gamma_1^2\ ,\ \alpha_1\beta_1=\beta_1\gamma_1=\gamma_1\alpha_1,$$

de unde:

$$\alpha_1=\beta_1=\gamma_1,$$

adică punctul lui GERGONNE al conicei este G şi ecuaţia conicei este

$$\Sigma\,\alpha^2-2\,\Sigma\,\beta\gamma=0,$$

tocmai ecuaţia elipsei în chestie.

B. M. BARBĂLATT.

91. *Soluțiunea unei chestiuni de examen de analiză.* La examenul de *Matematici Generale la Facultatea de Științe din Cluj,* sesiunea lunie 1921, s'a dat și următoarea propoziție de calcul integral: *Să se integreze ecuația diferențială:*

$$2x^2\frac{dy}{dx} - 4xy - y^2 = 0.$$

Să se determine curba integrală ce trece prin punctul de coordonate (1, 1).

In cele ce urmează, îmi propun să dau două soluții, diferite între ele ca metodă, acestei propoziții.

1°. Ecuația dată se poate scrie:

$$\frac{dy}{dx} - \frac{2}{x}\cdot y = \frac{1}{2x^2}\cdot y^2,$$

adică o ecuație tip Bernoulli.

Făcând schimbarea de variabilă $-1/y = z$, avem $dy/y^2 = dz$ ecuația devine:

$$\frac{dz}{dx} + \frac{2}{x}z = \frac{1}{2x^2},$$

ecuație lineară de ordinul întâi, a cărei integrală e dată de formula:

$$z = e^{-\int \frac{2}{x}dx}\left[\int e^{\int \frac{2}{x}dx}\frac{1}{2x^2}dx + C\right].$$

Făcând calculul avem:

$$z = e^{-\log x^2}\left[\int_e^{\log x^2}\frac{1}{2x^2}dx + C\right],$$

$$z = \frac{1}{x^2}\left[\tfrac{1}{2}x + C\right], \quad z = \frac{x + 2C}{2x^2}.$$

Substituind pe z în funcție de y, avem ecuația:

$2x^2 + xy + 2Cy = 0$, adică o familie de iperbole.

Aceea care trece prin punctul de coordonate (1,1) este:

$$2x^2 + xy - 3y = 0.$$

2°. Ecuația diferențială considerată, fiind omogenă în x și y,

se mai poate integrà separându-se variabilele cu ajutorul substituției $y = tx$.

Având în vedere: $dy = x\,dt + t\,dx$,

obținem: $$2x^2\,dy - (4xy + y^2)\,dx = 0,$$

$$2x\,dt = (2t + t^2)\,dx,$$

$$\frac{1}{2}\frac{dx}{x} = \frac{dt}{t(t+e)},$$

$$\frac{1}{2}\frac{dx}{x} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{t} - \frac{1}{t+e}\right],$$

$$x = \frac{C_1 t}{t+2}.$$

Făcând substituția $t = \frac{y}{x}$,

avem familia de iperbole: $2x^2 + xy + 2Cy = 0$, găsite în soluția întâia.

A. Th. Nicolau.
Student, București.

BIBLIOGRAFIE.

D. Vasilovici. **Table de logaritmi.** Cernăuți 1923. Heinrich Pardini. Prețul 28 lei.

D-l Dimitrie Vasilovici, profesor la Școala reală superioară ortodoxă din Cernăuți, a tipărit anul acesta o tablă de logaritmii numerelor 1—10000 cu *cinci* zecimale și tablele funcțiunilor goniometrice: sin, cos, tg, cotg din minut în minut cu același număr de zecimale, arătate și de alte tabele.

Tabla I este a mantizelor logaritmilor numerelor 1—10000. Pentru înlesnirea interpolațiunilor sunt date table de părți proporționale pe fiecare pagină.

Tabla II dă logaritmii naturali ai numerelor 1—100 cu cinci zecimale.

Tabla III este a logaritmilor funcțiunilor goniometrice, sporite cu 9 la partea caracteristică pentru a se evita caracteristica negativă. Alături de logaritmi se dau diferențe pentru 1″ pentru arcele mai mici ca 2°; de aci înainte și table de părți proporționale pentru ușurarea interpolărilor.

Tabla IV dă logaritmii funcțiunilor goniometrice din secundă în secundă pentru primele 5 minute.

Tabla V dă valorile naturale ale lui *sin, cos, tg, cotg* din 10′ în 10′ cu diferenţele pentru 1′ şi cu 5 zecimale.

Tabla VI este o tablă de mortalitate.

Tabla VII dă valorile lui $(1+r)^n$, pentru $r = 0{,}0025$; $0{,}005$; $0{,}0075$; $0{,}01$; $0{,}0125$; $0{,}015$; $0{,}0175$; $0{,}02$; ... $0{,}0575$; $0{,}06$ şi pentru $n = 1, 2, \ldots 50$.

Dela pagina 150 înainte, se încep explicaţiuni pentru întrebuinţarea tablelor.

La imprimare nu s'a dat toată atenţiunea necesară, aşă că log1882 are mantiza 27472, în loc de 27462; log2108 are mantiza 32687, în loc de 32387; log2158 are mantiza 33605, în loc de 33405.

Meritul unor asemenea table este de a fi fără erori, căci altfel falşifică calculele; o erată ar fi fost indispensabilă, pusă la inceput.

I. I.

Mathésis. Tome XXXVII, No. 5 Mai 1923. Bruxelles. Bibliografia triunghiului şi tetraedrului de J. NEUBERG. Parabola şi ortopolul, de V. THÉBAULT. Asupra unei proprietăţi a exagonului lui BRIANCHON, de LÉPINEY. Asupra câtor-va perechi de ortopoluri, de R. GOORMAGHTIGH. Note de algebră elementară de AD. M. In supliment: Rezumatul comunicărilor lui BUISSERET şi LURQUIN făcute la Societatea matematică din Bruxelles.

Buletinul asociaţiei de matematici pure şi aplicate. Anul II. No. 3. Mai 1923. Bucureşti. Les séries trigonométriques, de T. LALESCU. Asupra unui complex patratic de M. GHERMĂNESCU.

Revista de matematicas y fisicas elementales. Anul IV No. 12. Aprilie 1923. Buenos-Aires. E. HALLEY de T. A. DORDEA. Patru ani de revistă (Redacţia). Asupra fracţiilor periodice de J. DUCLOUT.

Revista matematică din Timişoara. Anul VII No. 4 Iunie 1923. Timişoara. Balanţa lui QUINTENZ cu 3 pârghii, de V. VÂLCOVICI.

Revista artileriei. Anul XXXVI. No. 7—8—9. Octomvrie-Decemvrie 1922. Bucureşti. Luneta-busolă de artilerie de MAIOR DORIAN şi CĂPITAN MANOLESCU. Notă asupra construcţiei traectoriilor de LT. I. LINTEŞ. Corecţiile datorite înclinării osiei tunului de 75 mm. francez (traducere). O metodă pentru regularea tragerii prin observare unilaterală, de LT. I. LINTEŞ.

PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 2260. *Dintre toate triunghiurile înscrise în acelaş cerc să se găsiască acela care face maximă expresia:*

$$E = \frac{(a^2+b^2-c^2)\,(b^2+c^2-a^2)\,(c^2+a^2-b^2)}{a^3\,b^3\,c^3},$$

a, b, c, fiind laturile triunghiului.

GH. ZAPAN.

Dacă observăm că avem: $a^2+b^2-c^2=2ab\cos C$, etc., expresia dată devine:

$$E=\frac{8\cos A\cos B\cos C}{abc}=\frac{8\cos A\cos B\cos C}{8R^3\sin A\sin B\sin C}$$

$$\therefore \quad E=\frac{1}{R^3}\operatorname{cotg}A\operatorname{cotg}B\operatorname{cotg}C.$$

Cum R e constant, maximul lui E depinde de maximul produsului $\operatorname{cotg}A\operatorname{cotg}B\operatorname{cotg}C$. Acest produs e maxim în acelaş timp cu patratul său:

$$\operatorname{cotg}A\operatorname{cotg}B.\ \operatorname{cotg}B\operatorname{cotg}C.\ \operatorname{cotg}C\operatorname{cotg}A,$$

şi cum suma factorilor:

$$\operatorname{cotg}A\operatorname{cotg}B+\operatorname{cotg}B\operatorname{cotg}C+\operatorname{cotg}C\operatorname{cotg}A=1$$

e constantă, maximul produsului are loc când factorii sunt egali, adică când:

$$\operatorname{cotg}A=\operatorname{cotg}B=\operatorname{cotg}C \qquad \therefore \qquad A=B=C=60^0.$$

Notă. După cum se vede, problema se reduce la aflarea maximului produsului $\operatorname{cotg}A\operatorname{cotg}B\operatorname{cotg}C$,
chestiune care mai face obiectul altor două probleme propuse în *Gazeta Matematică* şi anume a problemei 2314 din Vol. XXI, pag. 271, propusă tot de D-l Gh. Zapan, şi a problemei 2013 din Vol. XIX, pag. 311 propusă de D-l Fl. Vasilescu. Soluţiile date acolo sunt la fel cu cea de mai sus.

A rezolvat problema, în felul arătat mai sus, D-l Adrian A. Buşilă (Elev Cl. VII Liceul Mihai-Viteazul).

PROBLEMA 2413. *Fie* CD *latura patratului înscris într'un cerc dat* O *şi* E, F, *proecţiile punctelor* C *şi* D *pe un diametru fix* AB *al cercului. Fie* I *şi* I' *centrele cercurilor înscrise în triunghiurile* COE *şi* DOF, *iar* G *mijlocul arcului* AB *ce nu conţine latura* CD; *se cere*:

1°. Locul centrului de greutate al triunghiului GII', *când* C *variază pe cerc.*

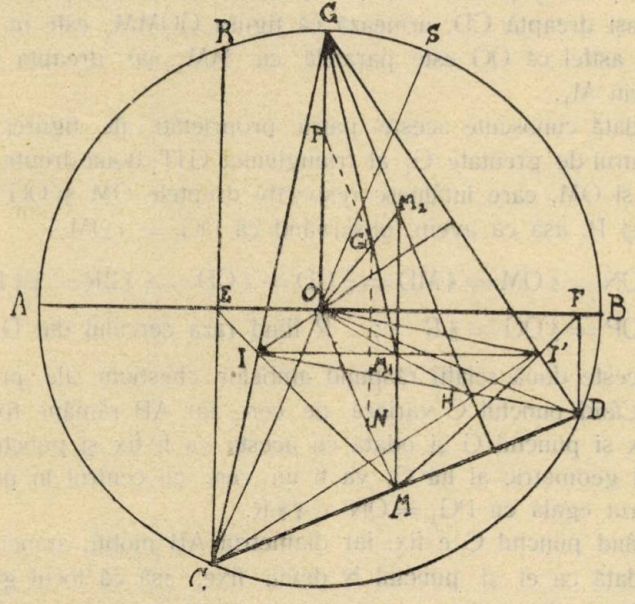
2°. Locul lui I, I' *şi al centrului de greutate al aceluiaş triunghiu, când* C *este fix, iar* AB *mobil.*

L. Hamburger.

Soluție dată de D-nii: A. T. Nicolau (Student, Pufești) și M. Grümbaum (Lic. Codreanu, Bârlad).

Fie R și S punctele unde dreptele CE și CO, întâlnesc cercul O; figura prezintă următoarele proprietăți:

a) Din egalitatea arcelor SB, AC și AR pe deoparte și a arcelor GA și GB pe de altă parte, urmează imediat că: arc GR = arc GS și că bisectoarea CI trece prin punctul G. Tot astfel bisectoarea DI′ va trece prin G.



b) Dreptele OI și CI fiind bisectoare în triunghiul OCE, se știe că avem: $\sphericalangle OIC = 90^0 + \frac{1}{2} \sphericalangle OEC = 90^0 + 45^0 = 135^0$; iar CD fiind latura patratului înscris în cercul O, vom avea $\sphericalangle COD = 90^0$ și $\sphericalangle CDO = 45^0$, prin urmare $\sphericalangle OIC + \sphericalangle CDO = 180^0$, ceeace arată că patrulaterul CIOD este inscriptibil. De aci urmează că: $\sphericalangle CID = \sphericalangle COD = 90^0$, adică punctul I este piciorul înălțimei DI din triunghiul CDG. Tot astfel se arată că I′ este piciorul înălțimei CI′ în același triunghiu CDG.

c) Fie H ortocentrul triunghiului CDG, iar M, M_1 și M_2 respectiv mijloacele segmentelor CD, II′ și GH. Se observă că: $\sphericalangle OIG = 180^0 - 135^0 = 45^0$, iar $\sphericalangle IGI' = 45^0$, fiindcă măsoară un

sfert de cerc, urmează atunci că dreapta OI este perpendiculară pe GD şi deci paralelă cu CI'; tot astfel OI' va fi paralelă cu DI, aşà că figura OIHI' va fi un paralelogram, ceeace face ca punctul M_1, mijlocul segmentului II', să fie şi mijlocul lui OH. Rezultă de aci, că centrul de greutate G_1 al triunghiului GII' este în acelaş timp şi centrul de greutate al triunghiului GOH, adică la intersecţia medianelor GM_1 şi OM_2.

d) Se ştie că într'un triunghiu GCD avem totdeauna: $OM = \frac{1}{2} GH = GM_2$ şi cum OM este paralelă cu GH, ca perpendiculare pe aceiaşi dreaptă CD, urmează că figura $GOMM_2$ este un paralelogram, astfel că OG este paralelă cu MM_2, iar dreapta MM_2 va trece prin M_1.

Odată cunoscute aceste patru proprietăţi ale figurei, ducem prin centrul de greutate G_1 al triunghiului GII', două drepte paralele cu OG şi OM, care întâlnesc respectiv dreptele OM şi OG în punctele N şi P, aşà că avem, observând că $OG_1 = \frac{2}{3} OM_2$:

$$ON = \tfrac{2}{3} OM = \tfrac{2}{3} MD = \tfrac{2}{6} CD = \tfrac{1}{3} CD = \tfrac{1}{3} \sqrt{2} R = \sqrt{\tfrac{2}{3}} R,$$

$$OP = \tfrac{2}{3} OG = \tfrac{2}{3} R \quad ; \quad R \text{ fiind raza cercului dat O.}$$

Aceste două relaţii răspund ambelor chestiuni ale problemei, astfel: Când punctul C variază pe cerc, iar AB rămâne fix, atunci va fi fix şi punctul G şi odată cu acesta va fi fix şi punctul P, aşà că locul geometric al lui G_1 va fi un cerc cu centrul în punctul P şi cu raza egală cu $PG_1 = ON = \sqrt{\frac{2}{3}} R$.

Când punctul C e fix, iar diametrul AB mobil, atunci punctul M şi odată cu el şi punctul N devin fixe, aşà că locul geometric al lui G_1 va fi un cerc, cu centrul în N şi cu raza egală cu $NG_1 = OP = \frac{2}{3} R$. In acest din urmă caz, locul geometric al punctelor I şi I' va fi un cerc, cu centrul în M şi cu raza egală cu $MO = MC = MD = (\sqrt{2}/2) R$.

Observaţii. 1°. Dreapta II' este paralelă cu AB, iar $II' = R$.

A. T. Nicolau, M. Grünbaum.

2°. Dreapta II' înfăşoară un cerc cu centrul în M şi de rază R/2, când coarda CD e fixă, iar AB mobilă. Pe acest cerc se mişcă punctul M_1.

3°. Locul geometric al punctului M_1, când CD e mobilă, iar AB fixă, este un cerc de rază $(\sqrt{2}/2) R$ şi cu centrul în mijlocul segmentului OG.

4°. Când CD e fixă şi AB mobilă, dreapta QM_1 trece necontenit printr'un punct fix Q, situat pe dreapta OM la distanţa $OQ = \sqrt{2} R$. (Reciproca problemei 1142 din *G. M.* Vol. XII pag. 247).

A. T. Nicolau.

5°. Locurile geometrice ale punctelor I şi I', când coarda CD e mobilă, sunt două arce de cerc simetrice, capabile de un unghiu de 45°, descrise pe segmentul OG.

6°. Toate proprietăţile problemei se menţin şi pentru cazul când punctul G ar fi mijlocul arcului AB, ce conţine latura CD; precum şi atunci când AB şi CD se intretaie chiar în interiorul cercului O, cazuri excluse de problema propusă. In aceste cazuri însă punctele II' trebuiesc considerate drept centrele a două din cercurile exînscrise triunghiurilor CEO şi DOF.

7°. Unele proprietăţi analoage problemei propuse, se pot obţine şi în cazul când coarda CD este de o lungime constantă oarecare şi anume dacă păstrăm aceleaşi notaţii avem că:

a) Bisectoarele CI şi DI' se întâlnesc în G pe cercul O;

b) Locul geometric al punctelor I şi I' când CD e mobilă, este compus din două arce de cerc simetrice, capabile de un unghiu de 45° descrise pe segmentul OG; iar când AB e mobil, este compus din două arce capabile de 135° descrise pe segmentele OC şi OD;

c) Centrul de greutate al triunghiului COH, care se confundă cu acel al triunghiului II'G în problema propusă, va descrie în cele două cazuri (CD mobil, sau AB mobil) câte un cerc de raze constante şi cu centrele în punctele N şi P, determinate în acelaş mod ca şi la problema propusă.

T. M.

PROBLEMA 2691. *Cărui indicator de două cifre îi va corespunde 17 numere? Indicator fiind numărul numerelor prime cu un număr dat şi inferioare lui.*

LT. I. LINTEŞ.

1) Indicatorul fiind de două cifre, se vor găsi printre numerele dela 10—99.

2) Indicatoarele fiind *totdeauna pare*, vom elimină numerele impare.

3) Unui indicator de forma $2n$, unde n este impar, îi corespunde cel mult patru numere şi anume:

$2n+1$ şi $2(2n+1)$, când $2n+1$ este prim

$3^{\alpha+1}$ « $2.3^{\alpha+1}$, « $n=3^{\alpha}$.

Deci, vom elimină şi numerele de această formă, rămându-ne numerele:

12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40, 44, 48, 52, 56, 60, 64, 68, 72, 76, 80, 84, 88, 92, şi 96.

4) Unui indicator de forma $4n$, unde n este impar, îi corespund cel mult zece numere, care pot fi:

$3(2n+1)$ şi $4(2n+1)$, când $2n+1$ este prim.

$4n+1$ « $2(4n+1)$, « $4n+1$ « «

$4.3^{\alpha+1}$, când $n=3^{\alpha}$

$(2a+1)(2b+1)$ şi $2(2a+1)(2b+1)$, când $\begin{cases} 2a+1 \text{ este prim} \\ 2b+1 \quad « \quad « \end{cases}$

$5^{\alpha+1}$ şi $2.5^{\alpha+1}$, când $n=5^{\alpha}$

2^3, « $n=1$.

Deci, vom elimină şi numerele de această formă, rămânându-ne: 16, 24, 32, 40, 48, 56, 64, 72, 80, 88 şi 96.

5) Unui indicator de forma $8n$, unde n este un număr prim, îi va corespunde cel mult nouă numere, care sunt:

$8n+1$ şi $2(8n+1)$, când $8n+1$ e prim

$3(4n+1)$, $2^2(4n+1)$ şi $2.3(4n+1)$, când $4n+1$ e prim

$2^3(2n+1)$, $2^2.3(n+1)$, $5(2n+1)$ şi $2.5(2n+1)$, când $2n+1$ e prim.

Vom elimină prin urmare şi numerele de această formă, rămânându-ne:

16, 32, 48, 64, 72, 80 şi 96.

6) Unui indicator de forma $16n$, unde n este un număr prim, îi va corespunde cel mult numerele:

$16n+1$, şi $2(16n+1)$, când $16n+1$ e prim

$3(8n+1)$, $2^2(8n+1)$ şi $2.3(8n+1)$, când $8n+1$ e prim

$2^3(4n+1)$, $2^2 3(4n+1)$, $5(4n+1)$

şi $2.5(4n+1)$, « $4n+1$ « «

$2^4(2n+1)$, $2^3.3(2n+1)$, $2^2 5(2n+1)$,

$3.5(2n+1)$ şi $2.3.5(2n+1)$, « $2n+1$ « «

adică cel mult 14 numere, deci vom elimină şi numerele de această formă şi vom rămâne numai cu numerele:

64, 72, şi 96.

8) Problema se poate continuă analog, eliminând încercările şi căutând mai departe câte numere ar corespunde unui indicator

de forma 2α. In adevăr, unui astfel de indicator nu-i corespunde decât numerele de forma:

$$2^{\alpha+1} \text{ şi } (2^{\alpha}+1)\, 2^{\alpha-a+1}.$$

Dar ştim că 2^{α} este de două cifre, deci $4 \leqslant \alpha \leqslant 6$ şi prin urmare $a < 8$, adică numerele de forma $(2^{\alpha}+1)\, 2^{\alpha-a+1}$, pot fi:

$$3.2^{\alpha},\ 5.2^{\alpha-1} \text{ şi } 17.2^{\alpha-3}$$

şi deci unui indicator de forma 2^{α} îi va corespunde cel mult patru numere. Eliminăm astfel şi pe 64.

Rămân numai numerele 72 şi 96, asupra cărora procedând prin încercări, deducem că sunt soluţiunile problemei, căci: lui **72** îi corespund numerele: 73, 91, 95, 111, 117, 135, 146, 148, 152, 182, 190, 216, 222, 228, 234, 252, 270; lui **96** îi corespund numerele: 97, 119, 153, 194, 195, 208, 224, 238, 260, 288, 306, 312, 336, 360, 390, 420.

CĂP. I. LINTEŞ.

Au dat numai soluţia 96, D-nii: I. B. FLORESCU şi C. I. GEORGESCU.

PROBLEMA 2728. *Să se simplifice expresia:*

$$\frac{\sin\alpha\, \mathrm{tg}^2\alpha}{\sin(\beta-\alpha)\sin(\gamma-\alpha)} + \frac{\sin\beta\, \mathrm{tg}^2\beta}{\sin(\gamma-\beta)\sin(\alpha-\beta)} + \frac{\sin\gamma\, \mathrm{tg}^2\gamma}{\sin(\alpha-\gamma)\sin(\beta-\gamma)}.$$

N. KAUFMAN.

Această problemă este propusă de două ori, odată cu numărul 2708 în *G. M.* Vol. XXV, pag. 142 şi altă dată cu numărul 2728 tot in Vol. XXV. pag. 168. Soluţia la 2708 a fost dată în volumul XXVI, pag. 152. Iată şi o altă soluţie sugerată de articolul D-lui Maior D. BUGEANU din *Revista Matematică* din Timişoara, Anul II, N-rul 8, pag. 116 şi u. Fie determinantul:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \mathrm{tg}^3\alpha & \mathrm{tg}^3\beta & \mathrm{tg}^3\gamma \\ \mathrm{tg}\alpha & \mathrm{tg}\beta & \mathrm{tg}\gamma \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

care desvoltat după prima linie ne dă:

$$\Delta = \mathrm{tg}^3\alpha\,(\mathrm{tg}\beta-\mathrm{tg}\gamma)+\mathrm{tg}^3\beta\,(\mathrm{tg}\gamma-\mathrm{tg}\alpha)+\mathrm{tg}^3\gamma\,(\mathrm{tg}\alpha-\mathrm{tg}\beta). \qquad (1)$$

Dacă desvoltăm acelaș determinant după ultima linie, după ce mai întâi scădem coloana întâia din coloana a doua și a treia, obținem:

$$\Delta = (tg^3\alpha - tg^3\beta)(tg\alpha - tg\gamma) - (tg^3\alpha - tg^3\gamma)(tg\alpha - tg\beta)$$

$$\therefore \quad \Delta = -(tg\alpha - tg\beta)(tg\beta - tg\gamma)(tg\gamma - tg\alpha)(tg\alpha + tg\beta + tg\gamma) \quad (2)$$

Egalând relațiile (1) și (2), obținem identitatea:

$$\sum \frac{tg^3\alpha}{(tg\beta - tg\alpha)(tg\gamma - tg\alpha)} = \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma \sum \frac{\sin\alpha\, tg^2\alpha}{\sin(\beta - \alpha)\sin(\gamma - \alpha)}$$

$$= tg\alpha + tg\beta + tg\gamma$$

$$\therefore \quad \sum \frac{\sin\alpha\, tg^2\alpha}{\sin(\beta - \alpha)\sin(\gamma - \alpha)} = \frac{tg\alpha + tg\beta + tg\gamma}{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}.$$

MIRCEA ADAM.
Elev Liceul Constanța.

PROBLEMA 2858. *In planul* P, *care trece prin centrul* O *al unei sfere cu raza* R, *se duc două drepte perpendiculare* Ox, Oy. *Se consideră cilindrul cu generatoarele perpendiculare pe* P *și a cărui intersecție cu* P *este cercul tangent dreptelor* Ox, Oy *și cercului de intersecție al sferei cu planul* P. *Se cere să se afle volumul comun sferei și cilindrului.*

LOCOT. COL. GH. BUICLIU.

Soluție dată de d-l L. KRICENOFCHER.

Presupun problema mai generală când unghiul xOy este 2α Fie C centrul cercului de intersecție al cilindrului cu planul P. OC taie sfera în A și A'. Cilindrul este tangent sferei în A și taie sfera după 2 cercuri cu centrele în C' și C''. AC' și AC'' taie sfera în S, S'. Linia SS' este o generatoare a cilindrului. Fie M, M' intersecția lui OC' cu sfera și T punctul de tangență al cercului C cu Ox. Insemn cu r raza cercului C, cu a lungimea CC' și cu h lungimea C'M. Fie V volumul cerut. El este egal cu dublul volumului V_1, al trunchiului de cilindru SBTAC', plus dublul volumului V_2 al volumului segmentului sferic SMA. Adică

$$(1) \quad V = 2(V_1 + V_2).$$

Dar

$$(2) \quad V_1 = \pi r^2 a.$$

Se vede că $a = CC' = \frac{1}{2} SB$.

Triunghiul dreptunghic ASA' dă

$$\overline{SB}^2 = A'B \cdot BA = 4r(R-r) \quad \therefore \quad SB = 2\sqrt{r(R-r)}$$

$$\therefore \quad (3) \quad a = \sqrt{r(R-r)},$$

așă că înlocuind în (2) se găsește

$$V_1 = \pi r^2 \sqrt{r(R-r)}.$$

Volumul segmentului sferic cu o bază, este dat de formula

$$(4) \qquad V_2 = \tfrac{1}{3} \pi h^2 (3R - h).$$

Triunghiul dreptunghic MAM' dă $M'C' \cdot MC' = \overline{AC'}^2$ și cum din triunghiul AC'O avem $\overline{AC'}^2 = OA \cdot AC = Rr$ urmează că $M'C' \cdot MC' = Rr$.

Dar $M'C' = 2R - h$, deci $h(2R - h) = Rr$

$$\therefore \qquad h = R - \sqrt{R(R-r)}.$$

Înlocuind în (4) pe h prin valoarea sa, găsesc

$$V_2 = \tfrac{1}{3} \pi (R - \sqrt{R(R-r)})^2 (2R + \sqrt{R^2 - Rr}).$$

Înlocuind în (1) pe V_1 și V_2 prin valorile lor, se găsește:

$$V = \frac{2\pi}{3} [3r^2 \sqrt{r(R-r)} + (R - \sqrt{R(R-r)})^2 (2R + \sqrt{R^2 - Rr})].$$

Înlocuind în această expresie pe r prin valoarea sa $(R \sin \alpha)/(1+\sin \alpha)$ scoasă din triunghiul dreptunghic OTC, găsesc:

$$V = \frac{2\pi R^3}{3} \left[\frac{3 \sin^2 \alpha}{(1+\sin \alpha)^3} \sqrt{\sin \alpha} + \left(1 - \sqrt{\frac{1}{1+\sin \alpha}}\right)^2 \left(2 + \sqrt{\frac{1}{1+\sin \alpha}}\right) \right].$$

In cazul problemei 2858, $\alpha = 45^0$ și $\sin \alpha = 1/\sqrt{2}$, așă că valoarea lui V este

$$V = \frac{2\pi R^3}{3} \left[\frac{3 \cdot \sqrt{2}}{(1+\sqrt{2})^3} + \left(1 - \sqrt{\frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}}\right)^2 \left(2 + \sqrt{\frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}}\right) \right].$$

Observațiuni. 1°. Dacă se înlocuiește în valorile lui V_1 și V_2, r și h prin valorile lor în funcție de R, în cazul lui $\alpha = 45^0$,

$$r = R(\sqrt{2} - 1) \qquad \text{și} \qquad h = R(1 - \sqrt{2 - \sqrt{2}}),$$

se găsește:

$$V_1 = \pi R^3 (\sqrt{2} - 1)^2 \sqrt{(2 - \sqrt{2})(\sqrt{2} - 1)}$$

$$V_2 = \frac{\pi R^3}{3}(1-\sqrt{2-\sqrt{2}})^2\,(2+\sqrt{2-\sqrt{2}}),$$

de unde se deduce

$$(5)\quad V = \frac{2\pi R^3}{3}\left[3(\sqrt{2}-1)^2\sqrt{(2-\sqrt{2})(\sqrt{2}-1)}+(1-\sqrt{2-\sqrt{2}})^2\,(2+\sqrt{2-\sqrt{2}})\right].$$

2°. A rezolvat problema în cazul când $x\,O\,y$ este un unghiu oare care, d-l I. B. Florescu. D-sa a găsit o formulă puțin deosebită de aceea a d-lui Krigenofcher.

3°. D-nii: I. D. Petrovici și C. I. Georgescu au rezolvat problema în cazul particular al problemei propuse, găsind o valoare diferită de cea dată de formula (5).

PROBLEMA 2901. *Să se arate că avem inegalitatea:*

$$(1)\quad \sum_{p=3}^{n+1}\left(C_p^3\right)^2+\frac{1}{2}\left(C_{n+2}^3\right)^2 > \frac{A_{n+2}^3\,(n+1)^4}{4.9.7},$$

unde C_p^i, A_p^i *reprezintă respectiv numărul de combinări și aranjamente de* p, *câte* i *obiecte.*

Th. Angheluță.

I. *Soluție dată de* D-l A. Fințescu.

Se observă că n este cel puțin 2 și pentru această valoare negalitatea dată revine la inegalitatea evidentă:

$$9 > 54/7.$$

Presupunem inegalitatea adevărată până la $n-1$ și să dovedim că are loc și pentru n.

Să considerăm pentru aceasta expresiunea următoare:

$$(2)\quad \left[\sum_{p=3}^{n+1}\left(C_p^3\right)^2+\frac{1}{2}\left(C_{n+2}^3\right)^2\right]-\left[\sum_{p=3}^{n}\left(C_p^3\right)^2+\frac{1}{2}\left(C_{n+1}^3\right)^2\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\left(C_{n+2}^3\right)^2+\left(C_{n+1}^3\right)^2\right]=\frac{1}{2}\,\frac{n^2(n+1)^2}{4.9}\left[(n-1)^2+(n+2)^2\right].$$

Considerând expresiunea analoagă, relativ la partea doua a inegalității, (1) avem:

$$(3)\quad \frac{A_{n+2}^3\,(n+1)^4}{4.9.7}-\frac{A_{n+1}^3\,n^4}{4.9.7}=\frac{n\,(n+1)}{4.9.7}\left[(n+2)\,(n+1)^4-n^4(n-1)\right].$$

Expresiunea (2) este mai mare ca (3) pentru: $n \geqq 2$, căci aceasta revine la inegalitatea:

$$7n(n+1)(2n^2+2n+5) > 2(7n^4+14n^3+16n^2+9n+2).$$

Aceasta se reduce la inegalitatea:

$$17n^2+17n-4>0,$$

evident satisfăcută pentru valorile lui n specificate mai sus.

Inegalitatea (1) este deci stabilită.

II. *Soluție dată de* D-l C. I. Georgescu.

Inegalitatea dată se mai poate scrie astfel:

$$\sum_{p=3}^{n+2}\left(C_p^3\right)^2-\frac{1}{2}\left(C_{n+2}^3\right)>\frac{A_{n+2}^3(n+1)^4}{4.7.9}.$$

Se calculează direct $\sum_{p=3}^{n+2}\left(C_p^3\right)^2$ și se găsește:

$$(4)\qquad \sum_{p=3}^{n+2}\left(C_p^3\right)^2=\frac{A_{n+3}^4}{36.70}\left(10n^3+45n^2+47n+3\right),\text{ de unde:}$$

$$\sum_{p=3}^{n+2}\left(C_p^3\right)^2-\frac{1}{2}\left(C_{n+2}^3\right)^2=\frac{A_{n+2}^3}{36.70}\left(10n^4+40n^3+77n^2+74n+9\right).$$

Insă avem pentru: $n \geqq 2$

$$(10n^4+40n^3+77n^2+74n+9)>10(n+1)^4.$$

Se observă că (4) este suma patratelor numerelor din coloana a treia a triunghiului aritmetic al lui Pascal.

S'au ocupat de această chestiune și D-nii: I. Coșereanu și W. Solomon.

PROBLEMA 2989. *Fie* D *punctul dublu al unei strofoide cu asimptota* $\Delta\Delta'$. *Perpendiculara din* D *pe* $\Delta\Delta'$ *întâlnește a doua oară strofoida în punctul* A. *Dreapta care unește pe* A *cu un punct* M, *mobil pe strofoidă, întâlnește pe* $\Delta\Delta'$ *în* M'. *Se cere învelitoarea perpendicularei scoborîte din* M' *pe* DM.

Locot. Col. Gh. Buicliu.

I. Soluție geometrică dată de d-nii: C. I. Georgescu (Lc. Mihai Viteazul, București) și A. Bușilă.

Fie DP perpendiculara în D pe AD, N şi N' intersecţia lui AM cu DP şi cu strofoida. DM întâlneşte pe $\Delta\Delta'$ în M_1, iar perpendiculara din M' pe DM în M''. In fine M'M'' şi DN se întâlnesc în P. După însăşi definiţia strofoidei avem:

$$NM = ND = NN', \quad \therefore \quad \sphericalangle MDN' = 90^0.$$

Prin urmare, unghiul MDN' este drept, iar M'P este paralelă cu DN'. Din triunghiurile MDN, $MM'M_1$, care au laturile $M'M_1$ şi DN paralele, se deduce uşor:

$$\sphericalangle M'MM_1 = \sphericalangle M'M_1M.$$

Triunghiul $MM'M_1$ este deci isoscel, prin urmare M_1M'' este bisectoarea unghiului M'.

Se ştie însă că dacă AM' se roteşte în jurul unui punct fix, iar M' descrie o dreaptă $\Delta\Delta'$, bisectoarele unghiurilor ce se formează în M' înfăşoară o parabolă cu focarul în A, având pe $\Delta\Delta'$ ca directoare. Deci învelitoarea cerută este această parabolă.

II. Soluţie geometrică dată de d-l I. Şerbănescu (Lc. Mihai Viteazul, Bucureşti).

Fie P' punctul în care AP taie pe $\Delta\Delta'$. Prin aceleaşi relaţii de unghiuri ca la prima soluţie, se arată ca triunghiul AP'M' este isoscel şi că M'P este perpendiculară pe AP' în mijlocul său P. Dreapta M'P este tangenta parabolei definită la prima soluţie.

III. Soluţie geometrică dată de d-l Gr. Agopian.

De la prima şi a doua soluţie se vede că unghiul M'PA este drept. Cateta M'P va înfăşură o parabolă cu focarul în A, cu vârful în D şi cu directoarea $\Delta\Delta'$.

Soluţie analitică dată de d-nii: A. Scodrano (Lc. Durostor, Silistra); I. St. Teodorescu, V. Vasilescu (Lc. Ploeşti), şi Gr. Agopian.

Luăm ca axe pe AD şi DP. Fie:

$$y^2 = x^2\,(a-x)/(a+x) \quad ; \quad y = \lambda x,$$

ecuaţia strofoidei şi a dreptei DM. Coordonatele lui M sunt:

$$x_1 = a\,(1-\lambda^2)/(1+\lambda^2) \quad , \quad y_1 = a\lambda\,(1-\lambda^2)/(1+\lambda^2).$$

Ecuaţia dreptei AM va fi:

$$(x-a)/(x_1-a) = y/y_1.$$

Dacă înlocuim pe x_1 şi y_1 prin valorile lor, se găseşte:

$$(1) \qquad (x-a)(1-\lambda^2)+2\lambda y=0.$$

Această dreaptă taie pe $\Delta\Delta'$, a cărei ecuaţie este: $x+a=0$, într'un punct M' de coordonate:

$$x_2=-a \quad , \quad y_2=\frac{1-\lambda^2}{\lambda}a.$$

Ecuaţia perpendicularei din M' pe (1) este

$$(2) \qquad a\lambda^2+\lambda y+x=0.$$

Derivând in raport cu λ, găsim

$$(3) \qquad 2a\lambda+y=0.$$

Eliminând pe λ între (2) şi (3), se găseşte că învelitoarea cerută este parabola:

$$y^2=4ax.$$

Notă. D-l T. Popoviciu (Lc. Arad) a trimis de asemenea o soluţie analitică, însă cu mici erori de calcule în stabilirea unor ecuaţii.

PROBLEMA 3018. *Fie* ABC *şi* A'B'C' *două triunghiuri omologice înscrise în acelaş cerc. Fie* A_1, B_1, C_1 *proiecţiile vârfurilor* A, B, C *respectiv pe laturile* B'C', C'A', A'B'. *Să se demonstreze că triunghiurile* ABC *şi* $A_1B_1C_1$ *sunt ortologice.*

Micu Grünbaum.

Soluţie dată de D-nul B. M. Barbălatt (Elev în cl. VI Liceul Codreanu, Bârlad). Fie λ, μ, ν ortopolurile laturilor B'C', C'A', A'B' ale triunghiului A'B'C' în raport cu triunghiul ABC. Se ştie că ortopolul unei drepte *d*, în raport cu un triunghiu ABC, este la intersecţia dreptelor lui Simson a punctelor unde dreapta *d* întâlneşte cercul ABC.*)

*) Această teoremă este a D-lui J. Neuberg. A se vedea: J. Neuberg, *Sur les projections et les contreprojections d'un triangle fixe,* Bruxelles, 1890, pag. 75.

Idem, Mathesis, annèe 1911 p. 244, *Orthopôle d'une droite par rapport à un triangle.*

Tr. Lalescu, *Despre ortopol,* Gazeta Matematică Vol. XX, p. 294.

(V. Cristescu.)

Urmează de aici că dreptele lui SIMSON ale punctelor A', B', C', în raport cu triunghiul ABC, formează triunghiul $\lambda\mu\nu$. Insă dreapta lui SIMSON, a unui punct A' în raport cu triunghiul ABC, e perpendiculară pe isogonala dreptei AA'. Deci laturile triunghiului $\lambda\mu\nu$ sunt perpendiculare pe isogonalele dreptelor AA', BB', CC'. Acestea din urmă fiind trei drepte concurente (conform enunțului se întâlnesc în centrul de omologie al triunghiurilor ABC și A'B'C') rezultă, după o teoremă cunoscută, că și isogonalele lor sunt concurente și prin urmare triunghiurile ABC și $\lambda\mu\nu$ sunt ortologice.

Triunghiurile ABC și $\lambda\mu\nu$ fiind ortologice, urmează că perpendicularele duse din λ, μ, ν respectiv pe laturile BC, CA, AB ale triunghiului ABC se întâlnesc într'un acelaș punct P. Insă perpendiculara dusă din A_1 pe BC trece prin ortopolul λ al dreptei B'C' în raport cu triunghiul ABC, după însăși definiția ortopolului și analog perpendicularele duse din B_1 și C_1 respectiv pe CA și AB trec prin μ și ν. Urmează de aici că vârfurile A_1, B_1, C_1 sunt situate respectiv pe dreptele $P\lambda$, $P\mu$, $P\nu$, sau cu alte cuvinte că triunghiurile ABC și $A_1B_1C_1$ sunt ortologice.

Notă. Soluția D-lui B. M. BARBĂLATT nu diferă de demonstrația autorului problemei

D-nul M. I. FOCȘENEANU a demonstrat și D-sa, la fel ca mai sus, că triunghiurile ABC și $\lambda\mu\nu$ sunt ortologice.

PROBLEMA 3020. *Un tată la moartea lui, voiește să împartă averea în trei părți egale, la cei doi fii ai lui și Academiei Române, însă ca moșia să rămână întreagă, în urmă, acestei instituțiuni. Câți ani trebuie să o exploateze fiul cel mare, câți ani cel mic și după câți ani va trece în posesiunea Academiei? Se va presupune că moșia aduce un venit net de 5%.*

I. IONESCU.

Fie în general C valoarea moșiei, r dobânda la un leu pe an, x timpul cât va sta moșia la fiul cel mare și y la cel mic. Impărțirea în părți egale trebuind să fie făcută la moarte, trebuie ca valorile *actuale* ale celor trei părți să fie aceleași.

Fiul cel mare ține averea C timp de x ani, devenind atunci $C(1+r)^x$. Atunci abandonează valoarea C fiului cel mic și deci îi rămâne $C[(1+r)^x - 1]$. Valoarea actuală a acestui capital se obține împărțindu-l cu $(1+r)^x$. De aci egalitatea:

$$\frac{C[(1+r)^x - 1]}{(1+r)^x} = \frac{C}{3},$$

care ne dă:

$$(1+r)^x = 1{,}5. \qquad (1)$$

Fiul cel mare ține capitalul C, timp de y ani și devine deci, la urmă $C(1+r)^y$. Abandonează capitalul C' Academiei și îi rămâne $C[(1+r)^y - 1]$. Valoarea aceasta se obține după $(x+y)$ ani, deci valoarea actuală se obține împărțind cu $(1+r)^{x+y}$. De aci egalitatea:

$$\frac{C[(1+r)^y - 1]}{(1+r)^{x+y}} = \frac{C}{3},$$

care ne dă:

$$3(1+r)^y - 3 = (1+r)^x (1+r)^y,$$

și înlocuind $(1+r)^x$ cu valoarea dată de (1) avem:

$$(1+r)^y = 2. \qquad (2)$$

Egalitățile (1) și (2) rezolvă problema. Făcând $r = 0{,}05$ conform enunțului și aplicând logaritmii avem:

$$x = \frac{\log 1{,}5}{\log 1{,}05} = \frac{0{,}1760913}{0{,}0211893} = 8{,}3,$$

$$y = \frac{\log 2}{\log 1{,}05} = \frac{0{,}3010300}{0{,}0211893} = 14{,}2.$$

Cum o moșie nu aduce venitul continuu, ci numai la recolte, nu putem admite fracțiuni din punct de vedere practic. Dacă fii nu vor să rămâie în pagubă, vor ține moșia 9 și 15 ani; dacă sunt mai generoși 8 și 14 ani. In primul caz, Academia va intră în exploatare după 24 ani, în al doilea după 22. Calculul arată că va trebui să intre după $8{,}3 + 14{,}2 = 22{,}5$, deci cel mai târziu după 23. Pentru ca fii să respecte dorința părintelui, unul va trebui să renunțe la fracția ce i-o dă calculul.

I. I.

Singurul corespondent care a văzut clar problema şi a rezolvat-o cu mici erori, a fost D-l D. I. SOLOMON (Cl. V Lc. Matei Basarab), dând ca rezultate 8 ani şi 110 zile, pentru fiul cel mare, 14 ani şi 73 de zile pentru cel mic şi 22 ani 183 zile pentru intrarea Academiei în posesiune.

Celelalte soluţii sunt toate eronate. Astfel unii au dat câte 20 ani de posesiune fiecărui fiu; altul câte 6 ani şi 8 luni; altul 5 ani şi 5 luni.

PROBLEMA 3027. *Se dă un patrulater oarecare* ABCD. *O paralelă la diagonala* AC *taie laturile* AB *şi* BC *în* M *şi* N. *Se proiectează punctele* M, N, D *respectiv în* P, Q *şi* R *pe diagonala* AC. *Paralela dusă prin* P *la* AD, *taie în* S *paralela dusă prin* Q *la* CD. *Dreapta* DS *întâlneşte diagonala* AC *în* T, *iar dreapta* BR *întâlneşte paralela* MN *în* E. *Să se demonstreze că dreptele* BT *şi* ES *sunt paralele şi perpendiculare pe* AC.

I. COŞEREANU.

Soluţie şi *generalizare* dată de D-nul EMIL S. DRĂGĂNESCU (Huşi). Să considerăm problema mai generală şi anume, să ducem din punctele M, N, D trei isocline MP, NQ, DR al căror unghiu cu AC să fie α, cu alte cuvinte dreptele MP, NQ, DR să fie paralele cu o direcţie oarecare. Urmând apoi construcţiunile indicate în enunţul problemei, se cere să demonstrăm că dreptele BT şi ES fac cu diagonala AC unghiuri egale cu α, adică dreptele BT şi ES sunt paralele cu fiecare din dreptele MP, NQ şi DR.

In adevăr, din triunghiurile asemenea BMN şi BAC avem:

$$BC : BN = AC : MN. \qquad (1)$$

Insă $MN = PQ$, ca paralele cuprinse între paralele; atunci (1) devine:

$$BC : BN = AC : PQ. \qquad (2)$$

Triunghiurile asemenea PSQ şi ADC ne dau:

$$AC : PQ = DC : QS, \qquad (3)$$

iar triunghiurile asemenea TCD şi TQS:

$$DC : QS = TC : TQ. \qquad (4)$$

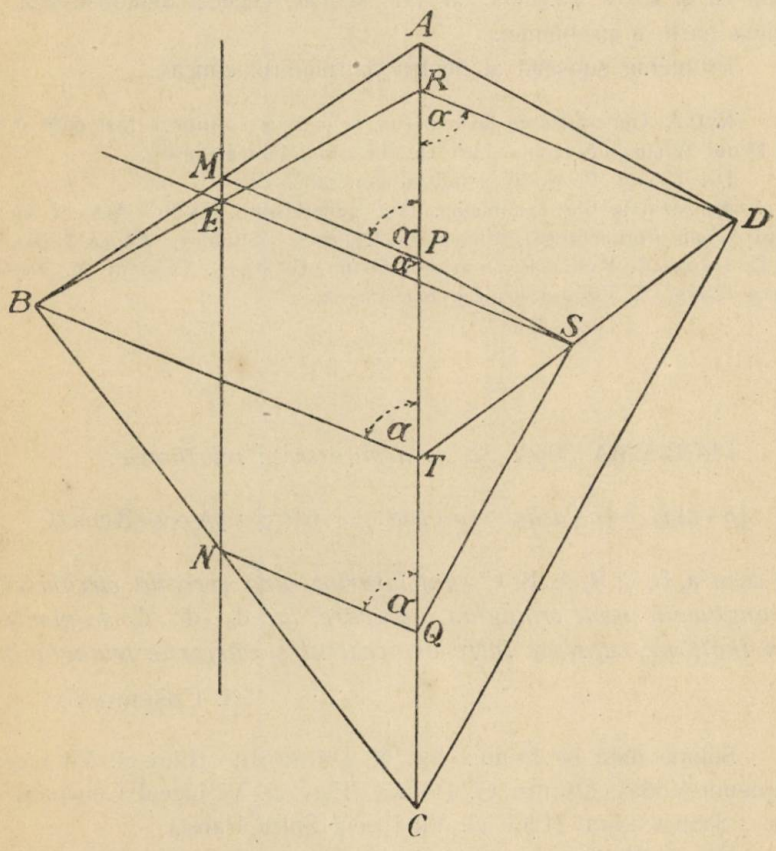
Din (2), (3) și (4) rezultă:

$$BC : BN = TC : TQ,$$

de unde, aplicând o proprietate a raporturilor egale:

$$BC : (BC - BN) = TC : (TC - TQ), \quad \text{sau} \quad BC : NC = TC : QC.$$

Ultima proporție ne arată că triunghiurile CBT și CNQ sunt asemenea, căci au un unghiu comun format de laturi proporționale. Deci drepta BT e paralelă cu NQ și deci și cu MP și DR.



Din triunghiurile asemenea ATD și PTS avem:

$$AD : PS = AT : PT = TD : TS. \qquad (5)$$

Dreapta BT fiind, după cum am demonstrat, paralelă cu MP:

$$AT : PT = AB : MB, \qquad (6)$$

iar din triunghiurile asemenea BAR şi BME avem:

$$AB : MB = BR : BE. \qquad (7)$$

Din comparaţia relaţiunilor (5), (6) şi (7) rezultă:

$$TD : TS = BR : BE$$

şi deoarece BT e paralelă cu DR, după o teoremă cunoscută, rezultă că şi ES e paralelă cu BT şi DR, ceeace demonstrează şi ultima parte a problemei.

Problema subsistă şi pentru patrulaterul concav.

NOTĂ. Generalizarea de mai sus, cu o bună soluţie, a fost dată şi de de D-nul Wilhelm Solomon (Elev cl. VI Liceul Matei Basarab).

D-l Tiberiu Popoviciu a indicat generalizarea.

Au rezolvat bine problema, fără generalizare, D-nii: Alex. I. Guţu (Elev Şcoala Politechnică), Ernest G. Oprişanu (Student), Eugen I. Balan, A. D. Doncescu, Vasile R. Dumitriu, Ovidiu G. Popea, Dumitru M. Teodorescu, Const. E. Georgescu, Em. Ştefănescu.

PROBLEMA 3049. *Să se demonstreze relaţiunea:*

$$(b+c)d_a + (c+a)d_b + (a+b)d_c = 16R^2 \cos\tfrac{1}{2}A \cos\tfrac{1}{2}B \cos\tfrac{1}{2}C,$$

în care a, b, c, R, A, B, C *sunt laturile, raza cercului circumscris şi unghiurile unui triunghiu oarecare, iar* d_a, d_b, d_c *segmentele din înălţimi, cuprinse între ortocentrul şi vârfurile triunghiului.*

I. Coşereanu.

Soluţie dată de D-nii: Ion N. Dragomir (Elev cl. VII Liceul Cantemir-Vodă), Ovidiu G. Popea (Elev cl. VI Liceul Chişinău) şi Emil Ştefănescu (Elev cl. VII Liceul Spiru Haret).

Fie A', B', C' picioarele înălţimilor corespunzătoare laturilor *a*, *b*, *c* şi H ortocentrul triunghiului. Din triunghiul dreptunghic HBA' avem:

$$BA' = BH \sin BHA' = d_b \sin C. \qquad (1)$$

Din triunghiul dreptunghic HCA', avem :

$$CA' = d_c \sin B. \qquad (2)$$

Adunând pe (1) cu (2), obținem:

$$a = d_c \sin B + d_b \sin C. \qquad (3)$$

In mod analog obținem:

$$b = d_a \sin C + d_c \sin A \qquad (4)$$

$$c = d_b \sin A + d_a \sin C. \qquad (5)$$

Adunând relațiile (3), (4) și (5), avem:

$$(\sin B + \sin C)d_a + (\sin C + \sin A)d_b + (\sin A + \sin B)d_c = a + b + c,$$

sau, ținând seamă că $a/\sin A = b/\sin B = c/\sin C = 2R$, avem:

$$(b+c)d_a + (c+a)d_b + (a+b)d_c = 4R^2(\sin A + \sin B + \sin C).$$

Insă (Culegere de Probleme, Trigonometrie, XVII, 1):

$$\sin A + \sin B + \sin C = 4\cos\tfrac{1}{2}A \cos\tfrac{1}{2}B \cos\tfrac{1}{2}C$$

și înlocuind mai sus, găsim relația cerută.

Soluție dată de D-nii: Ilie Ionescu-Brezuica, N. P. Arcadian, Longin I. Ionescu și Martinian Bogdan (Elevi cl. VII a Liceului Ioniță Asan, Caracal), Adrian A. Buşilă, Eugen I. Balan, Ion M. Şerbănescu, Virgil Ghiţescu, Leon Weiss (Elev cl. VII Liceul Galați), Gh. Stavrat (Elev cl. VI Liceul Național, Iași), Al. Şcodrano (Liceul Durostor), Mircea I. Adam.

Ne vom servi de formulele:

$$a = b\cos C + c\cos B,$$

$$b = c\cos A + a\cos C,$$

$$c = a\cos B + b\cos A,$$

pe care adunându-le membru cu membru, se obține:

$$a+b+c = (b+c)\cos A + (c+a)\cos B + (a+b)\cos C.$$

Dacă înmulțim ambii membri ai acestei egalități cu 2R și ținem seamă că avem:

$$d_a = 2R\cos A \quad , \quad d_b = 2R\cos B \quad , \quad d_c = 2R\cos C,$$

$$a+b+c = 2R(\sin A+\sin B+\sin C) = 8R\cos\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}B\cos\tfrac{1}{2}C,$$

obţinem relaţia propusă.

Au rezolvat bine problema şi D-nii: Cristea P. Goilav, Ştefan Epure, Ernest G. Oprişanu, Ion P. Iliescu, Nicolae B. Ionescu, Const. D. Gheorghiu, Marcel S. Sane, Edgar C. Russu, Mircea Gh. Stavrat, David Blumenfeld, Florea I. Negretzu.

EXERCIŢII.

76. Diferenţa patratelor a două numere consecutive diferă de a cuburilor cu 4370, iar suma acelor diferenţe este 4524. Se cer numerele.

S. Katz.

R. Avem:

$$(x+1)^2 - x^2 = 2x+1, \qquad (x+1)^3 - x^3 = 3x^2+3x+1$$

$$(3x^2+3x+1)-(2x+1) = 4370, \qquad (3x^2+3x+1)+(2x+1) = 4524$$

$$3x^2+x = 4370, \qquad 3x^2+5x+2 = 4524$$

$$4x+2 = 4524-4370 = 154$$

$$x = 38.$$

Numerele sunt 38 şi 39.

77. Să se simplifice expresiunea:

$$E = \frac{3}{(\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{3})(\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{3})} + \frac{2}{(\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2})(\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{2})} + \frac{5}{(\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{5})(\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{5})}$$

Tr. Dordea.

R. In identitatea (Culegere de Probleme, Algebra IV, 29):

$$\sum \frac{a^3}{(b-a)(c-a)} = a+b+c,$$

punem: $a = \sqrt[3]{3}$, $b = \sqrt[3]{2}$, $c = \sqrt[3]{5}$, găsim:

$$E = \sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{5}.$$

78. Fie O_1 şi O_2 două cercuri tangente interior în A; A_1 şi A_2 punctele de intersecţie ale celor două cercuri cu o secantă variabilă ce trece prin A; P un punct de pe secanta AA_1 aşa că $AP = k \cdot AA_1$, k fiind o constantă. Să se afle locul geometric al punctului P.

CONST. I. GEORGESCU.

R. Perpendiculara dusă în P pe AA_1 taie diametrul AO_1 în B. Se poate uşor arătă că punctul B e fix, iar triunghiul APB fiind dreptunghic, P se mişcă pe cercul descris pe AB ca diametru.

79. Să se arate că ecuaţia:

$$8x^2 + (6 - 7\alpha)x - (\alpha - 1)(\alpha - 2) = 0,$$

are toate rădăcinile reale, oricare ar fi α şi să se descompună trinomul în factori.

TH. ANGHELUŢĂ.

R. $b^2 - 4ac = (9\alpha - 10)^2$; iar $x_1 = \alpha - 1$, $x_2 = \dfrac{\alpha - 2}{8}$.

Descompunerea e evidentă.

80. Să se rezolve inecuaţia:

$$\frac{x+1}{x^2-4} + \frac{3}{(x-2)^2} + \frac{1}{2(x-1)} > 0.$$

TH. ANGHELUŢĂ.

R. Simplificând, avem:

$$\frac{3x^2}{2(x-2)^2(x-1)(x+2)} > 0, \quad \text{echivalentă cu:}$$

$$x(x-1)(x+2) > 0 \qquad -2 < x < 0$$

$$x > 1$$

81. Să se probeze că expresia

$$a^2(b^2 - c^2)(b^2 + c^2 - a^2) + b^2(c^2 - a^2)(c^2 + a^2 - b^2) + c^2(a^2 - b^2)(a^2 + b^2 - c^2),$$

este divizibilă prin produsul $(a^2 - b^2)(b^2 - c^2)(c^2 - a^2)$ şi să se afle câtul.

V. CRISTESCU.

R. Expresia propusă se anulează când înlocuim în ea pe a prin $\pm b$, pe b prin $\pm c$, sau pe c prin $\pm a$ şi fiindcă $a \neq b \neq c$, teorema e demonstrată. Câtul este 2.

Dacă egalăm expresia dată cu zero, obţinem condiţia, în coordonate normale, ca punctul lui LEMOINE, dintr'un triunghiu oarecare, să se afle pe dreapta lui EULER. Răspunsul este: e suficient ca triunghiul considerat să fie isoscel.

82. Să se demonstreze că între elementele unui triunghiu avem relația:

$$\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)\left(1-\frac{c^2}{b^2}\right)\left(1-\frac{a^2}{c^2}\right)=\frac{\sin(A-B)\sin(B-C)\sin(C-A)}{\sin A\sin B\sin C}.$$

EUG. I. BALLAN.

R. Avem $\frac{a^2-b^2}{a^2}=\frac{\sin^2 A-\sin^2 B}{\sin^2 A}=\frac{\sin(A-B)\sin(A+B)}{\sin^2 A}$, etc.

83. Să se demonstreze geometriceşte relația:

$$tg\,\alpha=(1+\sec\alpha)\,\mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}\alpha.$$

EDGAR C. RUSSU.

R. Considerăm un triunghiu OAT dreptunghic în A în care $\sphericalangle AOT=\alpha$ şi ducem bisectoarea interioară OD. După teorema bisectoarei avem:

$$\frac{DT}{DA}=\frac{OT}{OA},\ \therefore\ \frac{DT+DA}{DA}=\frac{OT+OA}{OA},\ \therefore\ \frac{AT}{DA}=1+\frac{OT}{OA}.$$

Dar: $AT=OA\,\mathrm{tg}\,\alpha$, $DA=OA\,\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}\alpha$, $OT=OA\sec\alpha$, etc.

84. Să se demonstreze relațiunea:

$$r\sum\mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}A=\sum(p-a)\,\mathrm{tg}^2\,\tfrac{1}{2}A.$$

MIRCEA GH. STAVRAT.

R. Avem: $r=(p-a)\,\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}A$, etc., astfel că membrul al doilea devine.

$$\sum r\,\mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}A=r\sum\mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}A.$$

PROBLEME PROPUSE.

3067 *). Să se găsiască două numere întregi ştiind că, media armonică a complimentelor lor aritmetice este egală cu raportul dintre pătratul mediei geometrice a complimentelor şi 17. Se mai ştie că,

*) Problema publicată anterior cu acest număr se înlocueşte prin prezenta.

complimentele aritmetice sunt numere formate din cifra 2 ridicată la o putere fără soţ mai mică decât 10.

I. Antoniu.

3071. Să se demonstreze că dacă numerele a şi b conţin factori primi mai mari ca 13, avem:

$$a^{b^{4m}} + b^{a^{4n}} - a - b \equiv \mathcal{M}\ 720720.$$

Gh. Zapan.

3072. Care sunt numerele de trei cifre care se impart cu suma cifrelor şi cu 7?

I. Coşereanu.

3073. Se cere să se construiască un patrulater complet, când se cunoaşte cercul lui *Miquel* al patrulaterului, precum şi razele cercurilor circumscrise celor patru triunghiuri, ce se pot formà cu laturile lui.

E. Abasohn.

3074. Se consideră un triunghiu oarecare ABC cu ortocentrul H şi cercurile BHC, CHA, AHB (cercurile lui Carnot). Cercul BHC taie a doua oară laturile AC şi AB în A_b şi A_c. Fie B_c, B_a şi C_a, C_b punctele analoage determinate de cercurile CHA, AHB. Să se demonstreze că H este centrul comun al cercurilor circumscrise triunghiurilor $AA_b A_c$, $BB_c B_a$, $CC_a C_b$.

Al. Niculescu.

3075. Să se rezolve ecuaţia:

$$x^5 + 5px^3 + 5p^2x + q = 0.$$

M. Sarian.

3076. Să se rezolve în numere întregi ecuaţia:

$$x^2 + y^2 + z^2 = xy + yz + zx.$$

E. Ştefănescu.

3077. Să se găsiască limita expresiunei:

$$E = \frac{1}{a.n}\sqrt[n]{\operatorname{tg}\frac{b}{a^n}},$$

când n tinde la ∞, știind că a și b sunt două cantități date.

LOCOT. COL. GH. BUICLIU.

3078. Să se arate că expresiunile:

$$E_1 = \frac{2n\sin t - \cos t \sin 2nt}{2\sin^3 t},$$

$$E_2 = \frac{3n^2\sin^2 t - (3 - 2\sin^2 t)\sin^2 nt}{4\sin^4 t},$$

se pot pune sub forma:

$$E_1 = a_0 + a_1\cos 2t + a_2\cos 4t + \ldots + a_{n-1}\cos 2(n-1)t,$$

$$E_2 = b_0 + b_1\cos 2t + b_2\cos 4t + \ldots + b_{n-1}\cos 2(n-1)t,$$

calculându-se coeficienții a_i și b_i ce sunt independenți de t. Din expresiunile găsite, să se deducă suma pătratelor și cuburilor primelor n numere.

TH. ANGHELUȚĂ.

3079. Să se demonstreze relațiunea

$$a^2/r_a + b^2/r_b + c^2/r_c = 4\ (R + r),$$

în care a, b, c, R, r, r_a, r_b, r_c sunt laturile, raza cercului circumscris și razele cercurilor tritangente unui triunghiu oarecare.

CONST. I. GEORGESCU.

3080. Viteza și accelerația unui mobil sunt exprimate cu numerile ν și γ, când metrul și secunda sunt unități de măsură. Prin ce fel de numere vor fi ele exprimate, dacă *5 km.* și *ora* vor fi unități de măsură?

CĂPITAN I. LINTEȘ.

Dela apariția ultimului număr s'au primit spre publicare: articole (A), note (N), cereri (C), exerciții (E), probleme propuse (P), recreațiuni (R) și probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela D-nii:

Abramovici A. (3022); *Adam M.* (3035, 51, 57, 62, 64, 68, E); *Antoniu A.* (3011, 43, 50); *Antoniu I.* (2905, E); *Arcadian N.* (2905, 3048, 57); *Ballan E.* (2905, 3012, 48); *Barbălatt M. B.* (1800, 2999, 3022, 26, 53, 58, 68, A, R, E, P); *Bărbulescu C.* (2991); *Berindei M.* (2991): *Blumenfeld D.* (3021, 68); *Bogdan M.* (3039, 43, 48, 57, 58); *Bușilă A.* (3036, 48); *Cădere E.* (3011); *Cazacincu V.* (3015, 22); *Cantacuzino I.* (2991); *Ciorănescu N.* (*E*).; *Constantinescu I.* (2991); *Coșereanu I.* (3048, 53); *Dumitrescu M.* (3058, E); *Epure Șt.* (2991, 3043, 58); *Focșeneanu M.* (3036, N); *Fundățeanu I.* (*P*); *Georgescu E. C.* (E); *Georgescu Fl.* (3039); *Georgescu I. C.* (3034, 35); *Goilav Cr.* (2905, 91); *Goldstein I.* (1800, 2999, 3068); *Iliescu Dima* (3011); *Iliescu Em.* (2905, 91); *Ionescu-Brezuica* (3036, 48, E); *Katz S.* (3011, 61, 62, E); *Lăzărescu J.* (2905); *Lăzărescu St.* (3022, E.); *Mateescu G.* (2994, 3022, 58, 64); *Mihăiescu C.* (2991); *Mirescu P.* (3057); *Negretzu F.* (3054, 57, 61, 62, 63, 68); *Popa T.* (2974); *Popea O.* (3053); *Popeanu Al.* (P); *Popoviciu T.* (2991, 3046); *Rabinovici F.* (2991, 3057); *Rothenberg M.* (2991); *Rusu E.* (3015, 43, 48, 61); *Samoilă D.* (E); *Scodrano A.* (3037, 39, 43, 64, 68); *Șerbănescu I.* (3034, 36, 48); *Solacolu S.* (2991); *Solomon D.* (3015); *Solomon W.* (3012, 15, 22, 36, 43, 57, 68, N, P); *Ștefănescu E.* (3051, 57, E.); *Tauber A.* (3043, 57, 61, 63, 68); *Teodorescu D.* (3058); *Teodorescu I.* (3015, 22, 58, E); *Weiss L.* (3014, 57, 63, 68, E); *Zamfirescu A.* (3022).

Problemele de geometrie rezolvate cât și cele de propus a căror soluție nu va fi însoțită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în considerațiune.

La redacția revistei **„Gazeta Matematică“** *se primesc abonamente pentru* **„Revista de matematicas y fisicas elementales“** *din Buenos-Aires, Anul V (Mai 1923 — Aprilie 1924). Costul unui abonament anual este de 70 lei.*

Soluțiunile primite în ultimul timp la problemele: 2035, 63, 191, 295, 340, 421, 34, 512, 24, 651, 61, 69, 82, 89, 706, 28, 66, 835, 56, 61, 64, 79, 87, 95, 906, 13, 18, 22, 29, 31, 32, 55, 72, 73, 78, 85, 90, 91, 93, 3009, 19, 38, 47, 52 și 59 nu au fost încă examinate de redactorii cărora le-au fost repartizate.

Colecțiunea „GAZETEI MATEMATICE"

27 VOLUME

Colecțiunea întreagă . . . . . Lei 1000,—

Se vând și volume izolate, cu prețul de 50 lei, afară de volumele: I, X, XV, XIX, XX și XXI care se vând numai cu colecțiunea întreagă.

Biblioteca „GAZETEI MATEMATICE"

1. **I. Ionescu, G. Țițeica, A. G. Ioachimescu și V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Aritmetică, Geometrie, Algebră și Trigonometrie. (520 pag. cu 3381 probleme).* (Epuizată).

2. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de probleme de algebră* (teoria ecuațiilor), (82 pag. cu 462 probleme). (Epuizată).

3. **N. Abramescu,** *Curs de algebră superioară* pentru cl. VIII reală, *Ediția III revăzută și adăogită,* 1921. (Epuizată). Lei 30,—

4. **A. G. Ioachimescu și G. Țițeica,** *Culegere de probleme de mecanică și geometrie analitică* (222 pag. cu 825 probleme și o planșă) (Epuizată) . . . . . Lei 20,—

5. **Tr. Lalescu și Șt. N. Mirea,** *Culegere de probleme de geometrie descriptivă și cosmografie* . . . . . Lei 15,—

6. **Tr. Lalescu,** Tratat de Geometrie analitică,

Fascicola I (Epuizată) . . . . . Lei 10,—

Idem, Fascicola II Conice . . . . . Lei 20,—

Idem, Fascicola III Cuadrice . . . . . Lei 20,—

7. **Gh. Lazăr,** *Trigonometria drept liniară* (după cursul predat de Gh. Lazăr la colegiul Sf. Sava) . . . . . Lei 5,—

8. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de probleme de Algebră,* ediția II-a revăzută și adăogită, 400 pagini cuprinzând 1765 probleme . . . . . Lei 60,—

La aceste prețuri se vor adăogà taxele poștale pentru expediție.

Biblioteca Technică a „GAZETEI MATEMATICE"

(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

I. Ionescu, *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcțiune și a principiilor de calcul.* Volum legat, cuprinzând 128 de pagini și 15 tabele numerice practice, pentru proiectarea construcțiunilor de beton armat. Lei 12,—

Gazeta Matematică apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 50 lei anual, se plătește înainte și începe la 15 Septemvrie, ori când s'ar face achitarea lui în cursul anului și nu se face pe termene mai scurte de un an. Abonamentele, schimbările de adrese, reclamațiunile și cererile pentru cărți din biblioteca «Gazetei Matematice», se vor trimete D-lui: **I. D. Teodor,** Inginer Inspector General, Directorul General al Regiei Monopolurilor Statului (adresa: Fabrica de Chibrituri, București).

Schimburile de reviste, uvrage pentru recenzii și orice alte cereri, afară de cele privitoare la cassierie și expediție, se vor trimite D-lui Inginer Inspector General I. IONESCU, Str. Căluşei 23, Bucureşti.

Dnor Asociațiunea pt. Cultura și literatura poporului Românului
lipsesc Dnii 1—3—1922
Sibiu
1922/23
C III 8 28
BIBLIOTECA CENTRALĂ „ASOCIAȚIUNII" SIBIU

ZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

ANUL XXVIII.

NUMĂRUL 12. — AUGUST 1923

SUMARUL

1. Generalizarea unei probleme de aritmetică . . . . . *Locot.-Col. Gh. Buicliu.*
2. Note Matematice: 92 — 100.
3. Bibliografie.
4. Cereri: 102 — 103.
5. Probleme Rezolvate: 2538, 2637, 2756, 2800, 2857, 2938, 2944, 2990, 3009, 3011, 3015, 3033.
6. Exerciții: 85 — 93.
7. Probleme propuse: 3801 — 3090.
8. Tabla de Materii.

ABONAMENTUL 50 LEI PE AN.

BUCUREȘTI
IMPRIMERIA FABRICILOR DE CHIBRITURI ȘI TIMBRE - FILARET
1923

SPRE ŞTIINŢA

Gazeta Matematică se publică de către **Societatea „Gazeta Matematică“** având sediul în Bucureşti, compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie de 3 membri, care pentru anul XXVIII se compune din D-nii **N. I. Georgescu,** Inginer-Şef, Director General al Serviciului Imbunătăţirilor Funciare, **Tr. Lalescu,** Doctor în Matematici, Profesor Universitar şi **I. D. Teodor,** Cassier, Inginer Inspector General, Profesor la Şcoala Politechnică, Directorul General al Regiei Monopolurilor Statului.

Manuscrisele destinate „Gazetei Matematice“ se vor trimite D-lui GEORGE BORNEANU, Inginer, sub-directorul Fabricilor de chibrituri şi timbre, Bucureşti.

Se pot trimite şi pe acelaş nume în Str. Sf. Constantin 31, Bucureşti.

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse şi exerciţiile se vor redija în conformitate cu instrucţiunile se se pot procură dela D-l Cassier *I. D. Teodor,* în schimbul sumei de 1 (un) leu ce se poate trimite prin poştă.

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evită confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare : numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie.

In vederea sporirii taxelor poştale, corespondenţii pot trimete de aci înainte manuscrisele scrise pe ambele pagini ale unei foi, fără a lăsă spaţii albe pe margini sau dedesubt, tăind foile în consecinţă.

Nu se admite însă a se tratà pe aceeaşi foaie mai multe chestiuni sau probleme.

Articolele, notele, problemele propuse, exerciţiile, recreaţiile ce se trimit pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICĂ“, trebue să fie originale, iar nu luate din cărţi sau reviste speciale de matematici.

Probleme nerezolvate : 171, 485, 581, 691, 886, 87, 914, 44, 1000, 08, 56, 58, 83, 92, 146, 62, 78, 80, 214, 36, 70, 71, 87, 97, 99, 355, 64, 67, 77, 79, 84, 86, 98, 99, 412, 34, 50, 82, 90, 553, 84, 87, 626, 37, 50, 76, 79, 711, 29, 33, 35, 53, 64, 90, 835, 76, 82, 84, 905, 06, 14, 29, 44, 45, 49, 59, 73, 79, 87, 2003, 04, 16, 17, 32, 70, 74, 111, 12, 70, 300, 47, 53, 91, 92, 95, 408, 14, 22, 28, 30, 34, 39, 40, 43, 44, 48, 53, 56, 59, 61, 62, 66, 69, 71, 73, 77, 79, 81, 84, 87, 91, 97, 500, 01, 02, 03, 10, 11, 12, 24, 29, 39, 43, 44, 45, 46, 55, 56, 60, 69, 71, 77, 78, 80, 82, 87, 91, 93, 96, 97, 99, 602, 07, 08, 10, 23, 38, 43, 44, 45, 47, 50, 55, 56, 58, 60, 65, 69, 71, 75, 84, 86, 92, 94, 95, 96, 709, 13, 17, 27, 35, 38, 43, 45, 47, 58, 59, 64, 69, 78, 80, 89, 809, 14, 29, 51, 53, 60, 65, 86, 88, 89, 902, 09, 12, 15, 16, 26, 36, 45, 53, 56, 61, 83, 95, 3000, 05, 08, 10, 13, 19, 25, 40, 42, 45, 55, 56, 60, 69, 70, 71, 75, 77, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90.

GAZETA MATEMATICA

Anul XXVIII *SUPLIMENT* *No. 12*

RECREAŢIUNI

1. **Misterele numerelor 3 şi 4.** Extrag următorul pasagiu dintr'o scrisoare referitoare la templul JULIEI HASDEU, adresată lui B. P. HASDEU de arhitectul I. SOCOLESCU:

„Ochiul observator descoperă imediat, examinând templul, că totul este întemeiat pe proprietăţile numerelor 3 şi 4, cu multiplii lor, adică: fie gândire exprimată, fie elemente de construcţiune, muzică, crezul spiritist, versuri, etc., toate sunt în număr de 3 şi 4 sau multiplii ai lor.

„Şi dece oare această preferinţă? Să fie efectul unei simple întâmplări? Nici de cum. Armonia, stabilitatea, eternitatea au avut şi au univers drept simbol numerele 3 şi 4.

„Astfel găsim:

„In ordine fizică: 3 culori de temeiu (galben, roşu, albastru), 4 anotimpuri într'un an, 4 vânturi dominante, 4 puncte cardinale, etc.

„In ordinea morală, *Divinitatea* — cea mai înaltă din cugetări, — închipuită ca o *treime* nedespărţită şi reprezentată printr'un triunghiu; ideia de univers concepută sub forma unirii a 3 sau 4 elemente: apa, focul, pământul şi aerul; *Crist* având 12 apostoli (3×4) dintre care numai 4 evanghelişti.

„E curios cum în toate timpurile, aceste baze simbolice 3 şi 4 au fost socotite ca inevitabile în orice întrupare de mare gândire. Egipţienii pentruca să ridice un monument reprezentând nestrămutarea eternă a Divinităţii, inventară forma cea mai simplă şi mai genială: *piramida* a cărei bază este *patrată*, iar feţele *triunghiulare*. Şi de ce au ales ei patratul şi triunghiul, dacă nu pentrucă acestea reprezintă graficeşte temeiul formaţiunii şi existenţei figurilor; ideia de suprafaţă se naşte prin *triunghiu*, iar întinderea suprafeţei este o însumare de *patrate*, unităţi de măsură. In o construcţiune raţională, pentruca organele să formeze o sistemă invariabilă, trebuie ca ţesătura lor să fie *triunghiulară*. Pentruca un corp să şează în echilibru pe baza sa, s'a dovedit că trebuie ca verticala centrului său de greutate să nu se apropie de margine, cu mai mult de a *treia* parte din largul bazei sale, şi am puteà merge departe cu enumerarea acestor exemple....".

I. COŞEREANU.

* * *

2. *Totul este nimic!* Fie p şi q două numere întregi oarecare. Avem evident:

$$\text{Mult}p + (p-q) = \text{Mult}p - q.$$

Suprimând de o parte şi de alta Mult$p$ şi $-q$ rămâne:

$$p = 0.$$

B. Barbălatt.

* * *

3. *Aritmetica in dicţionare.* In *Dictionnaire* par *Larousse* găsim:
Arithmétique. Science des nombres.
Nombre. L'unité, une collection d'unités, les parties de l'unité.
Unité. Principe du nombre.

I. I.

* * *

4. *Leneşii nu trăesc in spaţiu.* Un elev, foarte tare la geometrie, auzise pe profesor vorbind de *«vedere în spaţiu»*. I se dă o problemă uşoară de geometrie plană, pe care nu o poate face.

Profesorul. — Ţi-am dat o chestiune foarte uşoară de geometrie plană şi nici pe aceasta nu eşti in stare să o faci!

Elevul — ..... Nu am vedere in plan, D-le Profesor!

B. Barbălatt.

* * *

5. *Regula semnelor.* Cine nu pricepe regula semnelor din algebră, să compare pe $+$ şi $-$ cu *pentru* şi *contra*. Avem, in adevăr:

pentru pentru = *pentru*, după cum $+$ cu $+$ dă $+$.
contra contra = *pentru*. „ „ $-$ „ $-$ „ $+$.
pentru contra = *contra*, „ „ $+$ „ $-$ „ $-$.
contra pentru = *contra*, „ „ $-$ „ $+$ „ $-$.

I. Coşereanu.

* * *

6. *Orice număr este 1.* Avem, pentru n intreg:

$$a^n - b^n = (a-b)\,(a^{n-1} + a^{n-2}\,b + a^{n-3}\,b^2 + \ldots\ldots + b^{n-1}).$$

Făcând $a=b$ avem:

$$a^n - a^n = (a-a)\,n\,a^{n-1},$$

$$a^{n-1}\,(a-a) = a^{n-1}\,(a-a)\,n,$$

care cere neapărat $n = 1$. Se arată la fel că $m = 1$. Deci şi pentru fracţiuni avem:

$$n/m = 1.$$

R. Bellian.

* * *

7. *Formula naţiunii.* In *Istoria critică* a lui B. P. Hasdeu Vol. I, găsesc că o naţiune se poate reprezentă prin formula:

$$N = (x\,S - nd) + (y\,C - nd) + np,$$

„in care S este ginta, d scăderea elementelor primitive, c clima şi p adăo-

girea noilor elemente. Ţinând seamă de instituţii I, oamenii mari pe care i-a avut O, şi accidentele locale A, această formulă ar deveni:

$$N = xS + yC + zI + vO + uA".$$

AL. PANAITESCU.

* * *

8. *Lungime grea!* La un examen de absolvire:

Profesorul. — Ai văzut vre-o piatră de moară?

Elevul. Da.

Profesorul. Ce formă are?

Elevul. Circulară.

Profesorul. Nu! Cilindrică. E un cilindru la care înălţimea este mai mică decât raza bazei. Cât crezi să fie de mare raza bazei?

Elevul. Vre-o 7 Kg.

Profesorul. Cum se poate? rază de 7 Kg.!

Elevul. Nu, am vrut să zic 3 pânăla 5 Kg.

G. B.

* * *

9. *Mecanica veche.* In *De natura rerum*, cartea II, a lui LUCREŢIU găsim următoarele:

„Este adevărat că, in apă sau in aer, corpurile îşi accelerează căderea proporţional cu greutatea lor, pentrucă undele şi fluidul uşor al aerului nu opun la toate aceiaşi rezistenţă, ci cedează mai uşor la cele mai grele. Nu este la fel cu vidul; nici odată şi nicăeri nu resistă corpurilor; el lasă drum liber la toate. Astfel atomii, cu toată inegalitatea masei lor, trebuie să aibă aceiaşi viteză in vid, care este mediul pasiv al activităţii lor".

ING. O. ORĂNESCU.

* * *

10. *Progresul matematic în România.* In *Elemente de Algebră* de E. BACALOGLU, Profesor la Universitatea Bucuresci, scoasă in Tipografia Curţii 1870, găsim următoarele:

„Assemenea se găsesc prin une cărţi şi prin imitaţiune s'a introdus şi la noi pre aici şi acolo obiceiulu de a face şi uă *discussiune* a unei ecalităţi de gradulu anteiu cu ua necunoscuta, ceea ce nu are ensa nici ua importantia. Dupre regulele de mai susu deslegandu-o vomu ajunge la ua ecalitate de forma $Ax = B$, de unde $x = \frac{A}{B}$. Tota discussiunea se reduce attunci intru a dice că 1-iu se pote ca $A = O$, de unde $x = \frac{B}{O} = \infty$ şi ecalitatea dată este imposibila; şi allu 2-lea ca $A = O$, $B = O$ şi attunci $x = \frac{O}{O}$, adica valoarea lui x este nedeterminata. Se intiellege ca assemenea studii nu suntu nici de cum seriose"

„Un nedeterminat" [1])

* * *

1) Autorul a uitat să semneze.

11. *O inspecție la cosmografie.* La un liceu din România Mare, un inspector intră în clasă, vede la tablă un elev explicând forma pământului și îl întreabă dece globul care era înaintea lui este turtit la poli. Elevul tace. Inspectorul atunci întreabă pe al doilea, pe al treilea,... pe al *n*-lea. Toți tac.

Văzând că nu știe nici unul, inspectorul zice: *«Să ne spuie D-l Profesor»*. Acesta răspunde îndată: *«Așà l'am preluat, D-le Inspector»*.

Inspectorul necăjit părăsește școala și pleacă să ia masa la Episcopul din localitate, unde era invitat. La masă povestește pățania dela școală. Episcopul, care patronase școala pe când era confesională, răspunde atunci: „Bată-l să-l bată de profesor, și doar i-am spus să-l repare"!

G. B.

* * *

12. *Matematician spiritist! A. de Morgan,* fost președinte al Societății matematice din Londra, spune următoarele:

„Sunt perfect convins de ceeace am văzut și auzit, într'un mod care mă face cu neputința de a mă îndoi. Spiriștii sunt, fără nici-o îndoială, pe drumul care duce la progresul științelor fizicei; cei care se opun lor sunt reprezentanții acelora care se pun de-a curmezișul ori cărui progres.

* * * I. I.

13. *Nu există triunghiu cu unghiuri ascuțite.* Se știe că suma a două cantități, una inversă alteia, este cel puțin 2. Deci:

$$\operatorname{tg}^2 \frac{A}{2} + \operatorname{cotg}^2 \frac{A}{2} \geqslant 2;$$

$$\therefore \quad p^2 \operatorname{tg}^2 \frac{A}{2} + p^2 \operatorname{cotg}^2 \frac{A}{2} \geqslant 2p^2,$$

$$\therefore \quad r_a^2 + \frac{p^4}{r_a^2} \geqslant 2p^2,$$

$$\therefore \quad r_a^4 + p_a^4 \geqslant 2p^2 r_a^2$$

$$\therefore \quad r_a^2 (r_a^2 - p_a^2) \geqslant p^2 (r_a^2 - p_a^2)$$

$$\therefore \quad r_a^2 \geqslant p_a^2$$

$$\therefore \quad \operatorname{tg}^2 \frac{A}{2} \geqslant 1.$$

Deci:

$$\frac{A}{2} \geqslant 45^0,$$

$$A \geqslant 90^0.$$

C. E. Georgescu.

GENERALIZAREA UNEI PROBLEME DE ARITMETICA.

La pagina 62 din *Gazeta Matematică*, volumul XXVII, s'a publicat ca rezolvare a problemei 2367 soluția necompletă a următoarei generalizări:

Să se găsiască pătratele perfecte de 2n *cifre, așà fel ca numărul format de primele* n *cifre, adunat cu numărul format de ultimele* n *cifre, să dea rădăcina patrată a numerelor căutate, știind că numărul 11...1 având* n *cifre, este prim*".

Această generalizare este de fapt tot așà de restrictivă ca și problema 2367, căci ea conține tot atâtea restricțiuni ca și acea problemă, doar că numărul cifrelor numărului căutat este $2n$, în loc de 4. Pe lângă acestea, nici în rezolvarea acestei așà zise generalizări, nu s'au dat formele generale ale soluțiunilor, ci s'au căutat soluțiunile pentru fiecare valoare în parte a lui n, dela 1 pânăla 10.

Iată, în cele ce urmează, enunțul și soluția uneia din cele mai generale probleme de felul problemei 2367:

„*Să se găsiască numerele întregi* A, M, N *care să satisfacă simultan relațiunile*:

$$K.M \pm N = A^2 \quad , \quad M \pm N = A,$$

în care K *este un număr întreg*".

După cum se vede, numerele A, M, N pot fi pozitive sau negative, iar introducerea semnului — face să se obțină și variante de ale problemei inițiale.

Enunțul general conduce la următoarele 4 sisteme:

(1) $\quad K.M \pm N = A^2$ și $M + N = A.$

(2) $\quad K.M \pm N = A^2$ și $M \mp N = A.$

Scăzând egalitățile (1) se obține:

$$(4) \qquad M = \frac{A(A-1)}{K-1} \quad \therefore \quad N = \pm(A-M).$$

Deasemenea, adunând egalitățile (2) se obține:

$$(5) \qquad M = \frac{A(A+1)}{K+1} \quad \therefore \quad N = \pm(M-A).$$

Se vede din (4) și (5) că pentru a rezolvà complet problema, este destul de a găsì cele mai generale forme ale numărului întreg

A, pentru care A(A — 1) şi A(A + 1) să se dividă respectiv prin K—1 şi K+1. Impărţim deci problema în 2 cazuri.

I. *Rezolvarea sistemului (1).* Fie $a > b$ două numere prime între ele, unul putând fi egal cu 1, pentru care avem:

$$a.b = K - 1.$$

Din (4), se vede că deoarece A şi A — 1 sunt numere prime între ele, pentru ca M să fie întreg, va trebui să găsim nişte numere întregi x şi y, pentru care să avem unul din sistemele:

$$(6)\begin{cases} A = ax \\ A - 1 = by \end{cases}, \quad (7)\begin{cases} A = bx \\ A - 1 = ay \end{cases},$$

$$(8)\begin{cases} A = abx \\ A - 1 = abx - 1 \end{cases}, \quad (9)\begin{cases} A = abx + 1 \\ A - 1 = abx \end{cases}.$$

Egalând valorile lui A din (6), avem:

$$(8) \qquad ax - by = 1.$$

Fie $R_i = P_i / G_i$ ultima redusă a fracţiei a/b dezvoltată în fracţie continuă. Dacă t este un număr întreg arbitrar, atunci soluţiile întregi cele mai generale ale ecuaţiei (8), sunt:

$$x = (-1)^i Q_{i-1} + bt \quad , \quad y = (-1)^i P_{i-1} + at.$$

(A se vedeà, de exemplu *Cours d'Algèbre* par B. Niewenglowski, ediţia IV, volumul I, pagina 330).

Introducând aceste valori în (6) şi apoi valoarea găsită de acolo a lui A în (4), găsim următorul sistem de soluţiuni generale ale problemei (1):

$$(9)\begin{cases} A = (-1)^i a Q_{i-1} + abt \quad ; \quad A - 1 = (-1)^i b P_{i-1} + abt, \\ M = [(-1)^i Q_{i-1} + bt][(-1)^i P_{i-1} + at], \\ N = \pm [(-1)^i Q_{i-1} + bt][a - (-1)^i P_{i-1} - at]. \end{cases}$$

Egalând valorile lui A din (7), se deduce:

$$bx - ay = 1,$$

$$\therefore \qquad (10) \qquad ay - bx = -1.$$

Soluţiile întregi ale ecuaţiei (10) fiind:

$$x = -(-1)^i P_{i-1} + at \quad , \quad y = -(-1)^i Q_{i-1} + bt,$$

se deduce din (7) şi (4) că un al doilea sistem de soluţii al problemei (1) este:

$$(11)\quad \begin{cases} A=-(-1)^i bP_{i-1}+abt\ ;\ A-1=-(-1)^i aQ_{i-1}+abt, \\ M=[-(-1)^i P_{i-1}+at][-(-1)^i Q_{i-1}+bt], \\ N=\pm[-(-1)^i P_{i-1}+at][b+(-1)^i Q_{i-1}-bt]. \end{cases}$$

In fine, soluţiile generale ale sistemelor (8) şi (9) fiind respectiv abt şi $abt+1$, se găseşte că problema mai are următoarele 2 sisteme de soluţiuni:

$$(12)\quad \begin{cases} A=abt, & A-1=abt-1, \\ M=t(abt-1), \\ N=\pm t(ab-abt+1), \end{cases}$$

şi

$$(13)\quad \begin{cases} A=abt+1, & A-1=abt, \\ M=t(abt+1), \\ N=\pm(1-t)(abt+1). \end{cases}$$

Rezultă că problema are în cazul I patru sisteme de soluţiuni, date de formulele (9), (11), (12) şi (13).

II. *Rezolvarea sistemului* (2). Fie $\alpha>\beta$ două numere prime între ele, unul putând fi egal cu 1, aşà încât să avem:

$$\alpha.\beta=K+1.$$

Cu acestea, pentru ca M dat de (5) să fie întreg, trebuie să avem:

$$(14)\quad \begin{cases} A=\alpha x \\ A+1=\beta y \end{cases}, \qquad (15)\quad \begin{cases} A=\beta x \\ A+1=\alpha y \end{cases},$$

$$(16)\quad \begin{cases} A=\alpha\beta x \\ A+1=\alpha\beta x+1 \end{cases}, \qquad (17)\quad \begin{cases} A=\alpha\beta x-1 \\ A+1=\alpha\beta x \end{cases}.$$

Din (14), se deduce:

$$(18)\qquad \alpha x-\beta y=-1.$$

Dacă R_i este redusa de ordinul i al fracţiei α/β, transformată în fracţie continuă, atunci soluţiile ecuaţiei (18) sunt:

$$x=-(-1)^i Q_{i-1}+\beta t\ ,\quad y=-(-1)^i P_{i-1}+\alpha t,$$

care introduse în (14) şi (5) ne dau sistemul de soluţii:

$$(19)\quad \begin{cases} A=\alpha[-(-1)^i Q_{i-1}+\beta t] \ , \quad A+1=\beta[-(-1)^i P_{i-1}+\alpha t], \\ M=[-(-1)^i Q_{i-1}+\beta t]\,[-(-1)^i P_{i-1}+\alpha t], \\ N=\pm[-(-1)^i Q_{i-1}+\beta t]\,[-(-1)^i P_{i-1}+\alpha t-\alpha]. \end{cases}$$

Din (15) se deduce:

$$\alpha y-\beta x=1,$$

ale cărei soluții sunt:

$$x=(-1)^i P_{i-1}+\alpha t \ , \quad y=(-1)^i Q_{i-1}+\beta t,$$

așă că (15) și (5) dau:

$$(20)\quad \begin{cases} A=\beta[(-1)^i P_{i-1}+\alpha t] \ , \quad A+1=\alpha[(-1)^i Q_{i-1}+\beta t], \\ M=[(-1)^i P_{i-1}+\alpha t]\,[(-1)^i Q_{i-1}+\beta t], \\ N=\pm[(-1)^i P_{i-1}+\alpha t]\,[(-1)^i Q_{i-1}+\beta t-\beta]. \end{cases}$$

In fine, din (16) și (17) se deduc cu ușurință sistemele de soluțiuni:

$$(21)\quad \begin{cases} A=\alpha\beta t, & A+1=\alpha\beta t+1, \\ M=t(\alpha\beta t+1), \\ N=\pm t(\alpha\beta t-\alpha\beta+1), \end{cases}$$

și

$$(22)\quad \begin{cases} A=\alpha\beta t-1, \\ M=t(\alpha\beta t-1), \\ N=\pm(t-1)(\alpha\beta t-1). \end{cases}$$

Cu aceasta, problema ce mi-am propus, este rezolvată în toată generalitatea ei. Soluțiunile generale găsite satisfac toate condițiile enunțului, ceeace se poate verifică ușor.

Dacă numărul $K\pm 1$ admite p descompuneri de forma:

$$K-1=ab \qquad \text{sau} \qquad K+1=\alpha\beta,$$

atunci problema va admite în total $2(p+1)$ sisteme de soluțiuni, căci sistemele (12), (13) respectiv (21), (22) sunt comune tuturor descompunerilor.

Aplicațiuni numerice. Să găsim toate soluțiunile problemei, în cazul $K=1000$. In acest caz, avem:

$$10^3 - 1 = 999 \times 1 = 37 \times 27,$$

$$10^3 + 1 = 1001 \times 1 = 143 \times 7 = 77 \times 13 = 91 \times 11.$$

Totul se reduce acum la a înlocui în formulele (9), (11), (12), (13), (19), (20), (21) şi (22) literele prin valorile lor corespunzătoare fiecărei descompuneri. Pentruca rezultatele să se poată citi uşor, le voiu scrie sub formă de tablou, dând prin aceasta şi putinţa verificărilor şi a comparaţiilor cu mai multă uşurinţă.

Valorile lui i, P_{i-1}, Q_{i-1}, pentru cazul aplicaţiunei la sistemul (1), sunt date de tabloul:

Descompunerea	i	P_{i-1}	Q_{i-1}
999×1	2	998	1
37×27	5	11	8

Făcând înlocuirile, cum am spus mai sus, găsesc următoarele soluţiuni în cazul întâi:

$K-1=ab$		Soluţiile sistemului (1) pentru $K = 1000$		
a	b	A	M	N
999	1	$999(1+t)$	$(1+t)(998+999t)$	$\pm(1+t)(1-999t)$
999	1	$999t-998$	$(t-1)(999t-998)$	$\pm(2-t)(999t-998)$
37	27	$37(27t-8)$	$(37t-11)(27t-8)$	$\pm(48-37t)(27t-8)$
37	27	$27(37t+11)$	$(37t+11)(27t+8)$	$\pm(37t+11)(19-27t)$
999 sau 37	1 sau 27	$999t$	$(999t-1)t$	$\pm(1000-999t)t$
999 sau 37	1 sau 27	$999t+1$	$(999t+1)t$	$\pm(1-t)(999t+1)$

Valorile lui i, P_{i-1}, Q_{i-1}, pentru cazul aplicațiunei la sistemul (2), sunt date de tabloul:

Descompunerea	i	P_{i-1}	Q_{i-1}
1001×1	2	1000	1
143×7	3	41	2
77×13	3	6	1
91×11	4	33	4

Făcând înlocuirile, ca în cazul precedent, se găsește următorul tablou al soluțiunilor:

$K+1=\alpha.\beta$		Soluțiile sistemului (2) pentru $K=1000$		
α	β	A	M	N
1001	1	$1001(t-1)$	$(1001t-1000)(t-1)$	$\pm(1001t-2001)(t-1)$
1001	1	$1000+1001t$	$(1000+1001t)(1+t)$	$\pm t[1000+1001t]$
143	7	$143(2+7t)$	$(2+7t)(41+143t)$	$\pm(2+7t)(143t-102)$
143	7	$7(143t-41)$	$(7t-2)(143t-41)$	$\pm(7t-9)(143t-41)$
77	13	$77(1+13t)$	$(6+77t)(1+13t)$	$\pm(77t-71)(1+13t)$
77	13	$13(77t-6)$	$(13t-1)(77t-6)$	$\pm(13t-14)(77t-6)$
91	11	$91(11t-4)$	$(91t-33)(11t-4)$	$\pm(91t-124)(11t-4)$
91	11	$11(33+91t)$	$(4+11t)(33+91.t)$	$\pm(4+11t)(11t-7)$
Oricare din cele 4 valori	Corespunzătorul lui α	$1001t$	$t(1001t+1)$	$\pm t(1001t-1000)$
		$1001t-1$	$t(1001t-1)$	$\pm(t-1)(1001t-1)$

Inainte de a enunța problema, a cărei soluție se încheie cu acest tablou, am spus că ea este *una din cele mai generale* și am spus așà pentrucă cea mai generală problemă, de felul celei rezolvate până aici, este următoarea:

Fiind date numerele întregi a, b, c, a', b', c', n, p *se cere să se găsiască 3 numere* A, M, N, *între care există relațiunile:*

$$a\,M \pm b\,N = c\,A^n \quad , \quad a'\,M \pm b'\,N = c'\,A^p .$$

Sub acest enunț, rezolvarea problemei generală întâmpină greutăți de neînvins. In tot cazul, chestiunea fiind pusă, se poate încercà rezolvarea ei.

LOCOT. COL. GH. BUICLIU.

NOTE MATEMATICE.

92. *Alte zece aritmetici diverse.* (Vezi nota 68, pag. 367).

61. **Afacerilor.** *C. W. Sutton & N. J. Lennes.* — Bussines arithmetic. 1919.

62. **Concretă.** *H. Leather.* — Pendlebury's new concrete arithmetic. Londra 1914.

63. **Farmaciei.** *A. B. Stevens.* — Arithmetic of pharmacy. New-York 1920.

64. **Franclin** (a lui) *E. P. Seaver & G. A. Walten.* — The Franclin written arithmetic. 1878.

65. **Intermediară.** *Smith.* — Intermediate arithmetic. Londra.

66. **Primară.** *Smith.* — Primary arithmetic. Londra.

67. **Rațională.** *T. Amodeo.* — Aritmetica razionale. Napoli. 1909.

68. **Școalelor.** *F. Cajori.* — School arithmetics. New-York. 1914.

69. **Tânără.** *R. H. Chope.* — Junior arithmetic. Londra. 1912.

70. **Tutorială.** *R. H. Chope.* — Tutorial arithmetic. Londra. 1914.

(Va urmà) ION IONESCU.

93. *Asupra problemei 90 din Revista Matematică din Timişoara.* — In acea problemă se cereau cinci numere, care luate două câte două să aibă pe 13 cel mai mare comun divizor, iar cel mai mic comun multiplu al lor să fie 2730. S'au găsit 4368 soluţii; de fapt însă, problema nu admite decât una, cum am trimis eu, deşi am fost trecut acolo cu 11 soluţii.

In adevăr, $2730 = 13 \times 2 \times 3 \times 5 \times 7$. Impărţind numerele cerute cu 13, câturile vor fi prime între ele două câte două. Dar acele numere nu mai au alţi factori decât pe 2, 3, 5, 7 care intră în compunerea lui 2730. Deci câtimile nu pot fi decât 1, 2, 3, 5, 7 şi deci singura soluţiune este 13, 26, 39, 65, 91, care nici nu figurează printre soluţiile date în număr de 436.

F. NEGRETZU.

94. **O teoremă.** *Cea mai mare putere a unui număr q, care divide numărul* $\underbrace{N!!!....!}_{n}$, *este produsul:*

$$\underbrace{A, B, C.....L,}_{n}$$

unde:

$$A = \Sigma A_i \ , \ B = \Sigma B_1 \ , \ ....L = \Sigma L_1,$$

iar:

$$A_1 = E\left(\frac{N}{q}\right) \ , \ A_2 = E\left(\frac{A_1}{q}\right) .... A_a = E\left(\frac{A_{a-1}}{q}\right)$$

$$B_1 = E\left(\frac{N!}{q_1}\right) \ , \ B_2 = E\left(\frac{B_1}{q_1}\right) .... B_b = E\left(\frac{B_{b-1}}{q_1}\right)$$

. . . . . .

$$L_1 = E\left(\frac{\underbrace{N!!...!}_{n-1}}{q_{n-1}}\right) \ , \ L_2 = E\left(\frac{L}{q_{n-1}}\right) .... L_l = E\left(\frac{L_{l-1}}{q_{n-1}}\right)$$

şi E (1) *reprezentând numărul de întregi cuprins în* I *(notaţiunea lui* LEGENDRE).

Aceasta este teorema pe care voesc să o stabilesc şi iată anume cum:

Ştiu din o altă teoremă cunoscută — pe care, de altfel, voesc

să o generalizez — că: *cea mai mare putere a unui număr* q, *care divide pe* N! *este:*

$$A = A_1 + A_2 + \cdots + A_a ,$$

în care A_1, A_2, ... A_a au semnificările de mai sus.

Voesc acum — analog cu aceasta — să arăt că: *cea mai mare putere a lui q, care divide pe* N!!, *va fi produsul* A. B.

In adevăr, puterea cea mai mare a lui $q_1 = q^A$, care divide numărul N!!, se deduce astfel:

Se notează $N! = N_1$ şi trebue să căutăm cea mai mare putere a lui q_1 care divide pe N_1 şi care se găseşte lesne — ca mai sus — că este:

$$B = B_1 + B_2 + \cdots + B_b$$

şi cum: $$q_1^B = (q^A)^B = q^{A.B},$$

urmează că cea mai mare putere a lui q, care divide pe N!!, este A. B.

Asemenea raţionând mai departe, ajungem să admitem că: *cea mai mare putere a lui q, care divide numărul* $N\underbrace{!!!\ldots.}_{n}!$, *este produsul:*

$$A.B.\ldots.L,$$

adică tocmai cazul teoremei de mai sus.

CĂPIT. I. LINTEŞ.

95. *Suma puterilor asemenea ale primelor* n *numere.* In Nota 20, D-l I. IONESCU calculează suma patratelor primelor n numere cu ajutorul unor polinoame N_k de gradul 3, definite de relaţia:

$$n^2 = N_{n+1} - N_n .$$

Acest procedeu se poate aplică pentru cazul mai general:

$$n^k = N_{n+1} - N_n .$$

Dacă: $N_n = a_0 n^m + a_1 n^{m-1} + a_2 n^{m-2} + \ldots ,$

se găseşte: $m = k + 1 ;$

iar $$n^k = \sum_{i=0}^{i=k} n^{k-i} \left(a_0 \, C_{k+1}^{i+1} + a_1 \, C_k^i + a_2 \, C_{k-1}^{i-1} + \cdots + a_i \, C_{k-i+1}^1 \right).$$

Egalând coeficienţii puterilor asemenea ale lui n, se găsesc ecuaţiile:

$$C^1_{k+1}\, a_0 = 1,$$
$$C^2_{k+1}\, a_0 + C^1_k\, a_1 = 0,$$
$$C^3_{k+1}\, a_0 + C^2_k\, a_1 + C^1_{k-1}\, a_2 = 0,$$

cu ajutorul cărora se determină coeficienţii $a_0, a_1 \ldots a_k$.

Pentru $k = 3$, găsim: $a_0 = 1/4$, $a_1 = -1/2$, $a_2 = 1/4$, $a_3 = 0$.

$$\Sigma n^3 = 1/4(n^4 - 2n^3 + n^2) = n^2(n-1)^2/4.$$

M. GHERMĂNESCU.

96. *Un loc geometric.* Se ştie că, într'o cuadrică cu centru, două secţiuni circulare de sisteme diferite aparţin unei aceleiaşi sfere. (*Salmon*, Géom. analytique a 3 dimensions, t. I, p. 122).

Ne propunem să aflăm *locul centrelor acestor sfere, când una din secţiuni variază, cealaltă rămânând fixă.*

Să luăm, pentru a fixà ideile, un elipsoid:

$$(1) \qquad x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 - 1 = 0,$$

unde presupunem ca de obiceiu $a > b > c$. Secţiunile circulare se obţin la intersecţia acestui elipsoid cu două sisteme de plane paralele:

$$(2) \qquad z\sqrt{1/c^2 - 1/b^2} + x\sqrt{1/b^2 - 1/a^2} + k = 0,$$

$$(3) \qquad z\sqrt{1/c^2 - 1/b^2} - x\sqrt{1/b^2 - 1/a^2} + k' = 0,$$

unde k şi k' variază în toate modurile posibile. Ecuaţia comună a acestor plane este deci:

$$(4)\ z^2(1/c^2 - 1/b^2) + x^2(1/a^2 - 1/b^2) + (k' - k)\, x\sqrt{1/b^2 - 1/a^2} + \ldots$$
$$\ldots + (k' + k)\, z\sqrt{1/c^2 - 1/b^2} + k\, k' = 0.$$

Ecuaţia sferei, care conţine cele două secţiuni, se obţine scăzând una din alta ecuaţiile (3) şi (4), ceeace ne dă:

$$x^2/b^2 + y^2/b^2 + z^2/b^2 - (k' - k)\, x\sqrt{1/b^2 - 1/a^2}$$
$$- (k' + k)\, z\sqrt{1/c^2 - 1/b^2}\, z - 1 - k\, k' = 0.$$

Centrul sferei va fi deci:

$$x = [(k' - k)b^2/2]\sqrt{1/b^2 - 1/a^2}, \quad y = 0, \quad z = [(k' + k)\, b^2/2]\sqrt{1/c^2 - 1/b^2}.$$

A presupune una din secţiuni fixe, înseamnă a presupune unul din parametrii k, k' constanţi. Să facem deci să varieze, de ex., numai pe k. Eliminându-l deci între prima şi ultima din ecuaţiile (5), obţinem ca loc *dreapta*:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{b^2\sqrt{1/b^2-1/c^2}}+\dfrac{z}{b^2\sqrt{1/c^2-1/b_2}}-k'=0, \\ y=0, \end{cases}$$

situată în întregime în planul $x\,o\,z$.

MIRON NICULESCU.

97. *Observare asupra notei din Gazeta Matematică anul XXVIII pag. 332.*

D-l C. E. GEORGESCU-CANTEMIR pornind de la sistemul:

$$(1)\quad \begin{cases} \Sigma\, x_i = 0 \\ \Sigma\, a_i\, x_i = 0 \\ \cdots\cdots\cdots \qquad i=1,2,\ldots n \\ \Sigma\, a_i^{n-2}\, x_i = 0 \\ \Sigma\, a_i^{n-1}\, x_i = 1 \end{cases}$$

găseşte identitatea:

$$(2)\quad \sum_{m=1}^{m=n} \frac{a_m^n - 1}{(a_m-1)(a_m-a_1)\ldots(a_m-a_n)} = 1.$$

In nota citată mai sus, trebue corectat semnul identităţii aşà cum este scris acì, precum şi valoarea lui x_m după cum urmează:

$$(3)\quad x_m = \frac{1}{(a_m-a_1)\ldots(a_m-a_n)}.$$

Insuşi autorul notei ne trimite o rectificare. Scopul acestei note este să arătăm origina sistemului (1) şi în acelaş timp va eşi că indentitatea (2) este din identităţile lui EULER.

Pentru aceasta, să considerăm fracțiunea:

$$\frac{1}{(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_n)}$$

și să o descompunem în elementele ei. Vom avea:

$$(4)\qquad \frac{1}{(x-a_1)\dots(x-a_n)} = \frac{x_1}{x-a_1} + \dots + \frac{x_n}{x-a_n}.$$

Se vede imediat că x_m are valoarea (3). Deci soluția sistemului (1) o formează coeficienții x_m din desvoltarea (4). Să vedem ce exprimă sistemul (1) pentru coeficienții x_m. Pentru aceasta, din (4) rezultă:

$$1 = \Sigma x_i (x-a_1)\dots(x-a_{i-1})(x-a_{i+1})\dots(x-a_n).$$

Scriind că termenul în x^{n-1} este nul, se obține prima ecuație din (1). Scriind pentru termenul în x^{n-2}, avem:

$$(5)\qquad \sum x_i S_1^{(i)} = 0,$$

unde $S_1^{(i)}$ înseamnă suma câte una a cantităților a_m fără a_i.

Însă avem: $S_1^{(i)} = S_1 - a_i$, unde S_1 este suma tuturor cantităților a_m. Substituind în (5), se găsește a doua ecuație din (1). Considerând identitățile următoare:

$$S_2^{(i)} = S_2 - a_i S_1 + a_i^2,$$

$$\dots \qquad \dots\dots\dots$$

$$S_{n-1}^{(i)} = S_{n-1} - a_i S_{n-2} + a_i^2 S_{n-3} - \dots + (-1)^{n-1} a_i^{n-1},$$

se găsesc pe rând toate ecuațiile (1). Deci sistemul (1) exprimă identitatea (4).

Să considerăm următoarea fracțiune:

$$\frac{x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + 1}{(x-a_1)\dots(x-a_n)}$$

și să o desvoltăm în elementele ei. Vom avea:

$$(6)\qquad \frac{x^{n-1} + \dots + 1}{(x-a_1)\dots(x-a_n)} = \frac{x'_1}{x-a_1} + \dots + \frac{x'_n}{x-a_n}.$$

Se observă imediat că între x_m și x'_m avem relația:

$$(7)\qquad x'_m = (a_m^{n-1} + \dots + 1)\, x_m.$$

Scriind că în (6) termenul în x^{n-1} are drept coeficient unitatea, se obține:

$$x'_1 + x'_2 + \ldots + x'_n = 1,$$

adică identitatea (2). Dar tocmai așà se obține clasa de identități a lui EULER. Din (7), se înțelege acum de ce în nota citată se adunau ecuațiile sistemului (1).

TH. ANGHELUȚĂ.

98. *Asupra unei chestiuni de algebră.* Să căutăm condițiile pentruca media armonică a două din rădăcinile unei ecuații de gradul al IV-lea, să fie egală cu media armonică a celorlalte două rădăcini. Fie ecuația

$$x^4 - ax^3 + bx^2 - cx + d = 0.$$

Punând: $x_1 + x_2 = m$, $x_3 + x_4 = n$, $x_1x_2 = p$, $x_3x_4 = q$, avem

(1) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = m + n = a,$

(2) $(x_1 + x_2)(x_3 + x_4) + x_1x_2 + x_3x_4 = mn + p + q = b,$

(3) $x_1x_2(x_3 + x_4) + x_3x_4(x_1 + x_2) = pn + qm = c,$

(4) $x_1x_2x_3x_4 = pq = d,$

(5) $\dfrac{2x_1x_2}{x_1 + x_2} = \dfrac{2x_3x_4}{x_3 + x_4}$, $pn = qm.$

Din (3) și (5), se deduce

$pn = qm = c/2$ (6); $mnpq = mnd = c^2/4$; $mn = c^2/4d.$

Inlocuind această valoare în (2), avem

(7) $$p + q = b - c^2/4d.$$

Rezultă că p și q sunt rădăcinile ecuației:

$$y^2 - (b - c^2/4d)y + d = 0.$$

Din (6), obținem

$$m + n = \frac{c}{2}\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right) = \frac{c}{2} \cdot \frac{p+q}{pq} = a;$$

ținând seama de (4) și (7), avem

$$\frac{c}{2} \cdot \frac{4bd - c^2}{4d^2} = a,$$

care este condiţiunea cerută.

Ecuaţia dată se poate pune sub forma

$$(x^2 - mx + p)\ (x^2 - nx + q) = 0.$$

STOENESCU AL. I.
Cl. VI-a R. Lic. „Cantemir", Bucureşti.

99. *Asupra problemei 1904.* Această problemă e susceptibilă de o extindere în spaţiu, şi anume: Dându-se două *cuadrice* să se găsiască locul punctelor M, astfel ca planele polare ale acestui punct, faţă de cele două cuadrice, să fie perpendiculare.

Fie $F(x, y, z) = 0$ şi $f(x, y, z) = 0$, ecuaţiunile celor două cuadrice raportate la un sistem de 3 axe ortogonale şi $M(\alpha, \beta, \gamma)$ un punct al locului.

Planele polare ale lui M, în raport cu cuadricele, sunt:

$$x F'_\alpha + y F'_\beta + z F'_\gamma + F'_1 = 0,$$
$$x f'_\alpha + y f'_\beta + z f'_\gamma + f'_1 = 0.$$

Condiţiunea ca aceste două plane să fie perpendiculare, este:

$$(1) \qquad F'_\alpha f'_\alpha + F'_\beta f'_\beta + F'_\gamma f'_\gamma = 0,$$

care este tocmai ecuaţiunea locului căutat, adică o cuadrică ce trece prin centrele celor două cuadrice.

In adevăr, se ştie că coordonatele centrului unei cuadrice verifică ecuaţiunile: $F'_\alpha = 0$, $F'_\beta = 0$, $F'_\gamma = 0$, analog: $f'_\alpha = 0$, $f'_\beta = 0$, $f'_\gamma = 0$, care, prin urmare, vor verifică şi pe (1).

IOAN M. ŞERBĂNESCU.

100. *Asupra funcţiunii* $\Gamma(a)$. Se ştie că funcţiunea $\Gamma(a)$ este definită de integrala

$$\int_0^\infty x^{a-1} e^{-x}\, dx,$$

unde $a > 0$.

Să facem în această intregrală substituţia $e^x = t$; avem $x = \log t$,

$$\Gamma(a) = \int_1^{\infty} \frac{\log^{a-1} t}{t^2}\, dt.$$

Punând $$\frac{\log^{a-1} t}{t} = u, \quad \frac{dt}{t} = dv$$

şi integrând prin părţi, obţinem:

$$\Gamma(a) = \left[\frac{\log^a t}{t}\right]_1^{\infty} - \int_0^{\infty} (a-1-\log t)\, \frac{\log^{a-1} t}{t}\, dt.$$

Primul termen al membrului al doilea are valoarea zero. Deci:

$$\Gamma(a) = \int_1^{\infty} (\log t - a+1)\, \frac{\log^{a-1} t}{t^2}\, dt$$

şi trecând la vechea variabilă x,

$$\Gamma(a) = \int_0^{\infty} x^{a-1} e^{-x}\, dx = \int_0^{\infty} (x-a+1)\, x^{a-1} e^{-x}\, dx.$$

Să punem: $x^{a-1}(x-a+1) = U \quad , \quad e^{-x}\, dx = dV$

şi să integrăm prin părţi. Obţinem:

$$\Gamma(a) = -\left[\frac{x^a - x^{a-i}(a-1)}{e^x}\right]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} U' e^{-x}\, dx.$$

Câtimea dintre paranteze este iarăşi nulă. Apropiind această egalitate de cea precedentă, obţinem:

$$\Gamma(a) = \int_0^{\infty} x^{a-1} e^{-x}\, dx = \int_0^{\infty} U e^{-x}\, dx = \int_0^{\infty} U' e^{-x}\, dx.$$

Putem evident continuă operaţia integrării prin părţi de

$(k-1)$ ori, k fiind cel mai mare număr întreg cuprins în a şi obţinem astfel şirul de identităţi remarcabile:

$$\Gamma(a) = \int_0^{\infty} x^{a-1} e^{-x}\, dx = \int_0^{\infty} U e^{-x}\, dx = \int_0^{\infty} U' e^{-x}\, dx$$

$$= \int_0^{\infty} U'' e^{-x}\, dx = \ldots\ldots = \int_0^{\infty} U^{(k)} e^{-x}\, dx.$$

Să vedem acum ce se întâmplă, dacă continuăm cu integrarea prin părţi. Obţinem:

$$\Gamma(a) = -\left[\frac{U^{(k)}}{e^x}\right]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} U^{(k+1)} e^{-x}\, dx.$$

Rămâne să calculăm paranteza; avem:

$$U^{(K)} = B_a^k x^{a-k} - B_{a-1}^{k+1} (a-1) \frac{1}{x^{k+1-a}},$$

unde am pus spre prescurtare:

$$B_i^j = i(i-1)\ldots(i-j+1), \qquad [i \text{ întreg sau fracţionar}]$$

sau

$$U^{(K)} = \frac{B_a^k . x - (a-1) B_{a-1}^{k+1}}{x^{k+i-a}}.$$

Se vede imediat că:

$$\lim_{x=\infty} \frac{B_a^k x - (a-1) B_{a-1}^{k+1}}{x^{k+1-a} e^x} = 0$$

şi

$$\lim_{x=0} \frac{B_a^k x - (a-1) B_{a-1}^{k+1}}{x^{k+1-a} e^x} = -\infty.$$

Deoarece $\Gamma(a)$ este finită şi pozitivă, rezultă că trebuie să avem:

$$\int_0^{\infty} U^{(k+1)} e^{-x}\, dx = \infty.$$

MIRON NICULESCU.

BIBLIOGRAFIE.

Buletinul Societăţei Române de Ştiinţe. Anul XXV. No 1—6. Ianuarie—Decemvrie 1922. Bucureşti. Asupra unor traiectorii ortogonale remarcabile ale unei clase de suprafeţe riglate de G. NICHIFOR.

Bulletin of the American mathematical Society. Anul XXIX. No. 1. Ianuarie 1923. New-York. Adunarea din Octomvrie a Societăţii, de R. RICHARDSON. Adunarea din Octomvrie a Secţiunii din Chicago, de B. BERNSTEIN. Premiul de Algebră al lui F. N. COLE, de R. RICHARDSON. Soluţii periodice în problema celor 3 corpuri, de F. MURRAY. Notă asupra quartilelor şi a măsurilor asociate, de D. JACKSON. Suprafeţe rostogolitoare cu directoare plane, de T. WHITTEMORE. Asupra sistemelor transformabile şi a covarianţilor formelor algebrice, de C. MACDUFFEC.

Idem No. 2 Fevruarie. Un sistem de puncte nenumărabile, închis şi nedens aşă că fiecare intervale complimentare se sfârşesc la fiecare extremităţi ale lor, de R. MOORE. Curbura geodesică totală şi torsiunea geodesică, de T. WHITTEMORE. Numirea de serie divergentă de F. CAJORI. O definiţiune calitativă a funcţiunilor trigonometrice şi iperbolice, de P. FRANKLIN. Grupul al căror număr de operatori cu un şir de conjugate este egal cu ordinul subgrupului comutator de G. MILLER. Asupra curbelor cinematic raportate la o curbă dată, de H. PORITSKY. HEUTH asupra matematicilor grece de D. B. SMITH.

Idem No. 3 Martie. A 29-a Adunare a Societăţii, de R. RICHARDSON. Adunarea din Evanston a Societăţii, de A. DRESDEN. A 15-a Adunare a Secţiunii din Sud-Vest, de E. STOUFFER. O serie de axiome pentru geometria liniei de G. GRABA.

Idem No. 4 Aprilie. Adunarea din Fevruarie a Societăţii, de R. RICHARDSON. Relaţiuni între funcţiunile Rimaniane inrudite P şi Q, de D. CURTISS. Reducerea singularităţilor curbelor plane prin transformări biraţionale de G. A. BLISS.

Revista de matematicas y fisicas elementales. Anul V. No. 1. Mai 1923. Buenos-Aires. Divizibilitatea numerelor în un sistem oarecare de numeraţiune, de LT. GR. ZAPAN. Asupra determinărei unei conice prin 5 puncte, de E. REBUELTO.

Idem. Anul V. No. 2 Iunie 1923 Buenos-Aires. Divizibilitatea numerelor într'un sistem oarecare de numeraţiune. Reguli generale de divizibilitate de LT. GR. ZAPAN. Caractere de divizibilitate, de A. BASSO DASTAGUE Al 4-lea concurs al revistei.

Buletinul Asociaţiei de Matematici pure şi aplicate. Anul II. No. 10. Iunie 1923. Bucureşti. Les séries trigonométriques, de T. LALESCU. Sur les fonctions périodiques polinomiales, de E. ABASOHN. O metodă grafică pentru aflarea valorii eficace a funcţiunilor periodice poligonale, de E. ABASOHN.

Mathésis. Anul XXXVII. No. 6. Iunie 1923. Bruxelles. Bibliografia triunghiului şi tetraedrului, de J. NEUBERG. Deslegarea ecuaţiei de gradul III după SIMON STEVIN, de H. BOSMANS. Asupra triunghiurilor sferice, de J. NEUBERG. Asupra ortopolului şi asupra unei teoreme a lui MORLEY, de R. GOORMAGHTIGH. Necrologie: GABRIEL MARIE, de P. MANSION (†).

Revista matematică din Timişoara. Anul IV No. 5 — 15 Iulie 1923 Timişoara. Coordonate tangenţiale; aplicaţiune de E. ABASOHN.

P. SERGESCU. *Sur les noyaux symétrisables.* Notă prezentată Academiei de ştiinţe din Paris. Extrasă din *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences* din Paris. Şedinţa din 18 Iunie 1923.

R. P. BOSMANS. Asupra interpretării geometrice dată de PASCAL spaţiului cu 4 dimensiuni. (Extras din *Annales de la Société Scientifique de Bruxelles*).

CERERI.

102. *Ludovic Filip de Orléans,* regele Franţei (1830—48), pe când era în exil prin Anglia şi Elveţia, a fost profesor de matematici.
Ce se ştie despre studiile lui în această direcţie?

ION S. ANTONIU.

103. Se spune că pitagoreii se recunoşteau între ei, după o stea regulată în cinci colţuri, pe care erau scrise literele: *y, g, i, th, a.* — Ce însemnau aceste litere?

TR. A. DORDEA.

PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 2538. *Se cere pentru* $n = \infty$, *limita lui:*

$$\frac{L n \, L n!}{n^n}$$

FL. VASILESCU.

Soluţie dată de D-l G. D. POPESCU (Elev Sc. Politehnică, Bucureşti).

Scriem: $$E = \frac{L n \, L n!}{n^n} L \sqrt[n]{n} \times \frac{L n!}{n^{n-1}}$$

şi deci: $$\lim_{n=\infty} E = \lim_{n=\infty} L\sqrt[n]{n} \times \lim_{n=\infty} \frac{Ln!}{n^{n-1}}$$

însă: $$\lim_{n=\infty} \sqrt[n]{n} = 1$$ (Culeg. de Probleme, Alg. XXXI, 32).

Pe de altă parte, se ştie (Cesàro) că dacă u_n şi v_n sunt termenii generali ai unei serii, avem:

$$\lim \frac{u_n}{v_n} = \lim \frac{u_{n+1} - u_n}{v_{n+1} - v_n}.$$

Punând deci:

$$u_n = Ln! \qquad u_{n+1} = L(n+1)!$$

$$v_n = n^{n-1} \qquad v_{n+1} = (n+1)^n,$$

vom aveà:

$$\lim_{n=\infty} \frac{Ln!}{n^{n-1}} = \lim_{n=\infty} \frac{L(n+1)! - Ln!}{(n+1)^n - n^{n-1}} = \lim_{n=\infty} \frac{L(n+1)}{n^n \left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - \frac{1}{n}\right]}$$

$$= \lim_{n=\infty} \frac{L(n+1)}{n+1} \times \lim_{n=\infty} \frac{n+1}{n^n \left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - \frac{1}{n}\right]}$$

şi cum: $$\lim_{n=\infty} \frac{L(n+1)}{n+1} = L \lim_{n=\infty} \sqrt[n+1]{n+1} = 0$$

şi $$\lim_{n=\infty} \frac{n+1}{n^n \left[\left(1+\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n}\right]} = \lim_{n=\infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{n^{n-1} \left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - \frac{1}{n}\right]}$$

$$= \frac{1}{e \times \lim\limits_{n=\infty} n^{n-1}} = 0,$$

urmează că $\lim\limits_{n=\infty} \frac{Ln!}{n^{n-1}} = 0$ şi prin urmare: $\lim\limits_{n=\infty} \frac{Ln\,Ln!}{n^n} = 0,$

ceeace erà de aşteptat, căci numărul predomină asupra logaritmului.

O soluţie foarte simplă, este următoarea: ţinând seama de neegalităţile evidente:

$$n! < n^n \quad \text{şi} \quad \lg n < n$$

şi însemnând cu E, expresiunea dată, putem scrie:

$$E < \frac{n(Ln)^2}{n^n} < \frac{1}{n^{n-3}}, \text{ deci } \lim_{n=\infty} E = 0.$$

M. G.

PROBLEMA 2637. *Se dă triunghiul* ABC, *în care picioarele a două din înălţimi,* B′ *şi* C′ *sunt fixe, iar vârfurile* B *şi* C *mobile pe câte o perpendiculară la* B′C′. *Se cere*:

1°. *Locul celui de al treilea vârf* A.

2°. *Locul ortocentrului triunghiului* ABC.

3°. *Infăşurătoarea laturii* BC.

C. H. Nicolau.

Fie β, γ perpendicularele pe care se mişcă B şi C. Dacă luăm un punct B pe β, unindu-l cu C′ şi ducând în C′ o perpendiculară pe BC′, aceasta taie pe γ în punctul C. Deci pentru fiecare punct B de pe β corespunde un punct C pe γ. Reciproc, unui punct C de pe γ îi corespunde un punct şi numai unul pe β. Deci punctele B şi C se corespund în două diviziuni omografice. Reese de aci, că înfăşurătoarea lui BC este o conică tangentă la B şi γ, căci aceste drepte sunt poziţii particulare ale lui BC, căci dacă B se îndepărtează la infinit pe β, C′ vine la intersecţia lui γ cu B′C′; analog cu C, când se îndepărtează la infinit pe γ.

Punctele B şi C descriind diviziuni omografice pe β şi γ, să considerăm fascicolele omografice, având acele diviziuni ca baze şi ca vârfuri respective B′ şi C′. In aceste două fascicole, intersecţia a două raze omoloage BC′ şi CB′ (adică punctul A), descrie o conică trecând prin B′ şi C′ şi anume o parabolă.

Ortocentrul descrie tot o parabolă.

Centrul cercului lui Euler descrie perpendiculara dusă pe mijlocul lui B′C′.

Micu Grünbaum.

PROBLEMA 2756. *Să se găsiască relaţiunea ce trebue să existe între arcele* x, y, z *pentru ca determinantul*

$$\begin{vmatrix} \sin^2\frac{1}{2}x & \sin^2\frac{1}{2}y & \sin^2\frac{1}{2}z \\ \sin x & \sin y & \sin z \\ \sin 2x & \sin 2y & \sin 2z \end{vmatrix}$$

să fie nul.

V. Cristescu.

Soluţia autorului. Să însemnăm cu D determinantul propus. Dacă împărţim coloanele sale respectiv cu $\sin x$, $\sin y$, $\sin z$, obţinem:

$$D = \sin x \sin y \sin z \begin{vmatrix} \operatorname{tg}\frac{1}{2}x & \operatorname{tg}\frac{1}{2}y & \operatorname{tg}\frac{1}{2}z \\ 1 & 1 & 1 \\ \cos x & \cos y & \cos z \end{vmatrix}.$$

In determinantul obţinut scădem coloana întâia din celelalte două şi desvoltăm apoi determinantul după elementele linjei a doua. Avem:

$$D = \sin x \sin y \sin z \begin{vmatrix} \cos y - \cos x & \cos z - \cos x \\ \operatorname{tg}\frac{1}{2}y - \operatorname{tg}\frac{1}{2}x & \operatorname{tg}\frac{1}{2}z - \operatorname{tg}\frac{1}{2}x \end{vmatrix}.$$

In ultimul determinant, transformăm diferenţele în produse şi scoatem factorii comuni. Găsim succesiv:

$$D = 4 \sin\frac{x}{2} \sin y \sin z \sin\frac{x-y}{2} \sin\frac{x-z}{2} \begin{vmatrix} \sin\frac{x+y}{2} & \sin\frac{x+z}{2} \\ \sec\frac{y}{2} & \sec\frac{z}{2} \end{vmatrix},$$

$$D = 16 \sin\frac{x}{2} \sin\frac{y}{2} \sin\frac{z}{2} \sin\frac{x-y}{2} \sin\frac{x-z}{2} \left[\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{y}{2} - \sin\frac{x+z}{2}\cos\frac{z}{2}\right],$$

sau transformând produsele din parenteză în sume:

$$D = 8 \sin\frac{x}{2} \sin\frac{y}{2} \sin\frac{z}{2} \sin\frac{x-y}{2} \sin\frac{x-z}{2} \left[\sin\frac{x+2y}{2} - \sin\frac{x+2z}{2}\right].$$

In ultima parenteză, transformăm diferenţa de sinusuri în produs şi avem în definitiv:

$$D=16\sin\frac{x}{2}\sin\frac{y}{2}\sin\frac{z}{2}\sin\frac{x-y}{2}\sin\frac{y-z}{2}\sin\frac{x-z}{2}\cos\frac{x+y+z}{2}. \quad (1)$$

Dacă egalăm pe D cu zero, obţinem următoarele soluţii, pentru care determinantul este nul:

$\sin\frac{1}{2}x=0$, $\therefore\ x=2k\pi$ şi analog $y=2k\pi$ şi $z=2k\pi$. (I)

$\sin\frac{1}{2}(x-y)=0$, $\therefore\ x-y=k\pi$ şi analog $y-z=2k\pi$ şi $z-x=2k\pi$. (II)

$\cos\frac{1}{2}(x+y+z)=0$, $\therefore\ \frac{1}{2}(x+y+z)=k\pi+\frac{1}{2}\pi$, $\therefore\ x+y+z=(2k+1)\pi$. (III)

Soluţiile (I) fac una din coloanele determinantului nulă. Astfel soluţia $x=2k\pi$ face prima coloană nulă şi exprimă condiţia necesară şi suficientă ca prima coloană să fie nulă. In adevăr, de oarece

$$\sin 2x=2\sin x\cos x=4\sin\tfrac{1}{2}x\cos\tfrac{1}{2}x\cos x,$$

pentruca prima coloană să fie nulă, e necesar şi suficient să avem

$$\sin\tfrac{1}{2}x=0, \qquad \therefore\ x=2k\pi.$$

Soluţiile (II) fac două coloane identice şi se poate arătà că sunt singurele soluţii care fac două coloane identice. In adevăr, pentruca primele două coloane să fie identice, trebue să avem simultan:

$$\sin^2\tfrac{1}{2}x=\sin^2\tfrac{1}{2}y \quad (2)$$

$$\sin x=\sin y \quad (3)$$

$$\sin 2x=\sin 2y \quad (4)$$

Ecuaţia (2) se descompune în următoarele două:

$\sin\frac{1}{2}x=\sin\frac{1}{2}y$ (3) şi $\sin\frac{1}{2}x=\sin(-\frac{1}{2}y)$. (4)

Ecuaţia (3) ne dă între arce, relaţiile:

$x=2k.2\pi+y$ (5) şi $x=(2k+1)\pi-y$. (6)

Soluţia (6) însă nu convine, căci ne dă $\sin x=-\sin y$ şi $\sin 2x=-\sin 2y$.

Ecuaţia (4) ne dă, între arce, relaţiile:

$x=2k.2\pi-y$ (7) şi $x=(2k+1).2\pi+y$, (8)

dintre care numai soluţia (8) convine.

Soluţiile (5) şi (8) găsite, se pot scrie împreună:

$$x-y=2k_1\pi.$$

Am regăsit deci soluţia (II) de mai sus.

Ecuația (3) ne dă între arce relațiile:

$$x = 2k\pi + y, \quad \text{și} \quad x = (2k+1)\pi - y,$$

dintre care numai prima satisface simultan și ecuațiile (2) și (4).

Ecuația (4) dă între arce relațiile:

$$x = k\pi + y, \quad (9) \quad \text{și} \quad x = k\pi + \tfrac{1}{2}\pi - y. \quad (10)$$

Se poate lesne vedeà că soluția (10) nu convine ecuațiilor (2) și (3), iar dintre valorile date de soluția (9), numai acele pentru care luăm pe k egal cu zero, sau cu un număr par, satisfac simultan și ecuațiile (2) și (3). Dar pentru aceste valori ale lui k, regăsim soluția (II).

Din desvoltarea determinantului, nu am găsit soluțiile care fac o linie nulă sau două linii identice.

Pentru ca o linie să fie nulă, trebue să avem una din următoarele relațiuni:

$$\sin^2 \tfrac{1}{2}x = \sin^2 \tfrac{1}{2}y = \sin^2 \tfrac{1}{2}z = 0, \quad (11)$$

$$\sin x = \sin y = \sin z = 0, \quad (12)$$

$$\sin 2x = \sin 2y = \sin 2z = 0. \quad (13)$$

Dacă ținem seamă de o observația făcută mai sus, vedem că ecuațiile (13) cuprind pe (11) și (12). Pentru ca determinantul să aibă o linie nulă e suficient deci să avem:

$$x = y = z = \tfrac{1}{2}k\pi. \quad (IV)$$

Să examinăm acum condiția ca determinantul să aibă două linii identice. Pentru aceasta, trebue să cunoaștem soluțiile următoarelor ecuații:

$$\sin^2 \tfrac{1}{2}x - \sin x = 0, \quad (14)$$

$$\sin^2 \tfrac{1}{2}x - \sin 2x = 0, \quad (15)$$

$$\sin x - \sin 2x = 0. \quad (16)$$

Ecuația (14) ne dă $\sin \tfrac{1}{2}x = 0$ și $\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}x = 0$,

$\therefore \quad x = 2k\pi \quad$ și $\quad x = k.360^0 + 126^0\,52'\,11'',6.$

Ecuația (15) se descompune în următoarele două:

$\sin \tfrac{1}{2}x = 0 \quad \therefore \quad x = 2k\pi$, (soluție dejà găsită) și

$$\sin \tfrac{1}{2}x - 4\cos \tfrac{1}{2}x \cos x = 0. \quad (17)$$

Dacă în (17) înlocuim toate liniile în funcție de $\operatorname{tg}\frac{1}{2}x$, obținem ecuația de gradul al treilea:

$$\operatorname{tg}^3\tfrac{1}{2}x + 4\operatorname{tg}^2\tfrac{1}{2}x + \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}x - 4 = 0, \qquad (18)$$

care are ca rădăcini:

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}x = \quad 0{,}81360 \quad \therefore \quad x = k.360^0 + 78^0\,15'\,11''$$
$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}x = -1{,}47068 \quad \therefore \quad z = k.360^0 + 248^0\,25'\,41'',2$$
$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}x = -3{,}34292 \quad \therefore \quad x = k.360^0 + 213^0\,18'\,28'',8.$$

Ecuația (16) ne dă:

$$\sin x = 0, \quad \text{de unde} \quad x = k\pi;$$
$$\cos x = 1/2 \quad » \quad » \quad x = 2k\pi \pm \tfrac{1}{3}\pi.$$

Observăm că soluția $x = k\pi$ găsită la ecuația (16) cuprinde în sine și soluția $x = 2k\pi$ a ecuației (15). Prin urmare, pentru ca determinantul să aibă două linii identice, trebue să avem una din următoarele relații:

$$x = y = z = k.180^0 \qquad (V)$$
$$x = y = z = k.360^0 \pm 60^0 \qquad (VI)$$
$$x = y = z = k.360^0 + 78^0\,15'\,49'' \qquad (VII)$$
$$x = y = z = k.360^0 + 126^0\,52'\,11'',6 \qquad (VIII)$$
$$x = y = z = k.360^0 + 213^0\,18'\,28'',8 \qquad (IX)$$
$$x = y = z = k.360^0 + 248^0\,25'\,41'',2. \qquad (X)$$

In rezumat, soluțiile problemei sunt în număr de zece.

E de observat că soluțiile (IV) și (V) pot face, pentru unele valori ale lui k, două sau toate liniile nule.

Observație. Soluțiile (III) și (VI) arată că determinantul propus e nul în caz când x, y, z sunt unghiurile unui triunghiu și pe această cale am stabilit problema.

In adevăr, dacă ținem seamă de relațiile propuse a se demonstrà la Problema 2760 (*G. M.* Vol. XXVI, p. 56) și de relația (4) stabilită la soluția Problemei 2759 (*G. M.* Vol. XXVIII, p. 226 și 227), se vede că există trei relațiuni distincte, liniare și omogene, între distanțele punctului φ al lui Feuerbach la picioarele înălțimilor și unghiurile unui triunghiu oarecare. Pentru ca aceste trei relațiuni să fie compatibile, trebue ca determinantul propus să se anuleze în caz când x, y, z sunt unghiurile unui triunghiu.

Notă. Nici unul dintre corespondenți nu a găsit toate soluțiile.

Au procedat la desvoltarea determinantului ca mai sus, D-nii: Emil Ștefănescu, Const. I. Georgescu, I. T. Bârsu, Adrian Gh. Cristea și Dan

D. Giuşcă. D-nul Emil Ştefănescu a pus determinantul sub forma (1). De asemenea, D-l Const. I. Georgescu ar fi ajuns la acelaş rezultat, dar schimbând tg. in cotg. a ajuns la alt rezultat.

D-nii: I. B. Florescu, D. C. Schileru şi I. D. Petrovici au inlocuit liniile trigonometrice în funcţie de $\operatorname{tg}\frac{1}{2}x$, $\operatorname{tg}\frac{1}{2}y$ şi $\operatorname{tg}\frac{1}{2}z$ şi au desvoltat apoi determinantul, găsind

$$D=\frac{16\,u\,v\,\omega\,(u-v)\,(v-\omega)\,(u\,v+v\,\omega+\omega\,u-1)}{(1+u^2)^2\,(1+v^2)^2\,(1+\omega^2)^2},$$

în care $u=\operatorname{tg}\frac{1}{2}x$, $v=\operatorname{tg}\frac{1}{2}y$, $\omega=\operatorname{tg}\frac{1}{2}z$.

Dintre cele zece soluţii de mai sus au găsit:

D-nii Adrian Gh. Cristea şi D. C. Schileru soluţiile (II) şi (III).

D-l I. T. Bârsu, soluţia (III).

D-l C. E. Georgescu soluţiile (II) şi (V).

D-l C. I. Georgescu soluţia (II).

D-l I. B. Florescu soluţiile (I) şi (II).

D-nii I. T. Rizescu şi N. P. Arcadian soluţia (V)

D-l I. Coşereanu soluţia (I).

PROBLEMA 2800. *Normala în* M *la o elipsă cu focarele* F *şi* F', *întâlneşte axa mică în* N. *Se cere locul punctelor de întâlnire al dreptelor* MF' *şi* MF.

Locot. Col. Gh. Buicliu.

Soluţie dată de d-l Emil Manolescu.

Fie $F(c,0)$, $F'(-c,0)$, $M(x,y)$ şi a, b axele elipsei. Ecuaţia normalei MN fiind:

$$Y-y=\frac{a^2y}{b^2x}(X-x),$$

coordonatele lui N vor fi $(0, -c^2y/b^2)$. Cu aceste elemente se stabilesc uşor următoarele ecuaţii, respectiv ale lui NF şi MF':

$$(1)\qquad b^2Y=(X-c)\,cy,$$

$$(2)\qquad (x+c)Y=y(X+c).$$

Din ecuaţiile (1) şi (2), se deduce uşor:

$$x=\frac{(b^2-c^2)X+a^2c}{c(X-c)},\qquad y=\frac{b^2y}{c(X-c)}.$$

Ţinând seamă că $M(x,y)$ se află pe elipsă, se poate scrie:

$$\frac{[(b^2-c^2)X+a^2c]^2}{a^2c^2(X-c)^2}+\frac{b^4y^2}{b^2c^2(X-c)^2}-1=0.$$

De unde, făcând toate calculele şi ţinând seamă că între a, b, c există relaţiunea $a^2—b^2=c^2$, se găseşte că locul cerut este conica:

$$(3a^2—4b^2)X^2—a^2Y^2—2a^2cX—a^2c^2=0,$$

al cărei gen este foarte uşor de aflat.

Notă. Au rezolvat problema, cu mici erori de calcul în stabilirea ecuaţiei finale, d-nii: L. KRICENOFCHER, T. BÂRSU, P. GOILAV şi I. COŞEREANU.

PROBLEMA 2857. *Egalitatea:*

$$y = 1{,}845\,x + 0{,}682$$

se aplică în practică pentru $3{,}2 \leqslant x \leqslant 5{,}5$. *Se cere a se înlocui cu alta aproximativă, cât mai apropiată, de forma:*

$$y = \alpha\, x.$$

I. IONESCU.

Soluţie dată de D-nii A. MICLESCU, F. GEORGESCU, S. GEORGESCU GORJAN, D. PANAITESCU, V. BUCHNER, W. SOLOMON.

Valoarea medie a lui x este $\frac{1}{2}(3{,}2+5{,}5)=4{,}35$, pentru care găsim $y = 8{,}70775$. Putem lua ca valoare medie a lui α, câtul $8{,}70775 : 4{,}35 = 2{,}001781...$ Egalitatea căutată este dar:

$$y = 2{,}001781\,x.$$

Soluţiunea aceasta revine la următoarea construcţiune grafică: Faţă de două axe de coordonate O X, O Y, construim dreapta $y = 1{,}845\,x + 0{,}682$. Fie A şi B punctele de pe dânsa corespunzătoare lui $x = 3{,}2$ şi $x = 5{,}5$. Unim mijlocul lui AB cu O, şi dreapta obţinută corespunde ecuaţiei căutate $y = \alpha\, x$.

Soluţie dată de D-nii D. SCHILERU, E. ŞTEFĂNESCU.

Pentru $x = 3{,}2$ cele două egalităţi ar da aceeaşi valoare, dacă:

$$3{,}2\,\alpha = 1{,}845 \times 3{,}2 + 0{,}682$$
$$\therefore \quad \alpha = 2{,}058125$$

Pentru $x = 5{,}5$ cele două egalităţi ar da aceeaşi valoare, dacă:

$$5{,}5\,\alpha = 1{,}845 \times 5{,}5 + 0{,}682,$$
$$\therefore \quad \alpha = 1{,}969.$$

Acestea sunt valorile extreme ale lui α. Pentru valoarea cerută, să luăm media lor. Găsim $\alpha = 2{,}0135625$.

Observare. Soluţiile date sunt aproximative, căci condiţia din enunţ *„cât mai apropiată"* este înlocuită numai cu *„apropiată"*. Fie în general ecuaţiile:

$$y = a\,x + b, \qquad y' = \alpha\,x$$

şi să ne propunem ca pentru $q \leqslant x \leqslant p$ să alegem pe α aşă fel în cât pentru totalitatea valorilor lui x, dintre aceste limite, y' să fie cât mai aproape de y. Avem:

$$y - y' = (a - \alpha)\,x + b.$$

Ar trebui ca suma tutulor diferenţelor $(y - y')$ să fie cât mai mică, pentru ca y' să se apropie cât mai mult de y, pentru toate valorile lui x între p şi q. Însă $(y - y')$, poate fi uneori pozitiv, alteori negativ şi suma diferenţelor să fie mică, deşi unele din ele ar fi mari în un sens şi altul. De aceea, după principiile din teoria erorilor de observaţiune, vom luà în loc de diferenţe, patratele lor care au acelaşi semn, şi vom pune condiţiunea:

$$\int_q^p (y - y')^2\,dx = \text{minimum},$$

din care scoatem:

$$\int_q^p [(a - \alpha)\,x + b]^2\,dx = \int_q^p [(a - \alpha)^2\,x^2 + 2\,(a - \alpha)\,bx + b^2]\,dx$$

$$= \frac{1}{3}(a - \alpha)^2(p^3 - q^3) + (a - \alpha)\,b\,(p^2 - q^2) + b^2(p - q).$$

Trebue să alegem α, astfel ca rezultatul să fie cât mai mic posibil. Derivăm în raport cu α şi anulăm. Avem:

$$-\frac{2}{3}(a - \alpha)(p^3 - q^3) - b\,(p^2 - q^2) = 0,$$

$$\therefore \qquad \alpha = a + \frac{3}{2} \cdot \frac{p^2 - q^2}{p^3 - q^3}\,b.$$

Egalitatea căutată este:

$$y' = \left[\alpha + \frac{3}{2} \cdot \frac{p + q}{p^2 + q^2 + p\,q}\,b\right] x. \qquad (1)$$

Valoarea lui x, care face $y' = y$, este dată de:

$$\frac{3}{2} \cdot \frac{p^2 - q^2}{p^3 - q^3}\,x = 1,$$

$$\therefore \qquad x = \frac{2}{3} \cdot \frac{p^3 - q^3}{p^2 - q^2}.$$

Interpretarea grafică a acestui rezultat este următoarea: ducem paralele cu $O'y$ la distanţele p şi q, şi prin O' o dreaptă arbitrară, care închide cu Ox şi acele paralele un trapez. Centrul de greutate G al trapezului se pro-

iectează pe O x la distanța x, dată de relația de mai sus. Deci dreptele $y=ax+b$ și $y'=\alpha x$ se taie pe paralela la Oy dusă prin G. Deci proectanta lui G taie dreapta dată în un punct, care unit cu O, ne dă dreapta $y'=\alpha x$ căutată. Pentru datele problemei, (1) devine :

$$y' = 1{,}9982\ x.$$

I. I.

PROBLEMA 2938. *Să se stabiliască formulele:*

1) $$\log(x+10) = \log(x+8) + \log(x+6) - 2\log x + \log(x-8) + \log(x-6) - \log(x-10) - 2\sum_0^\infty \frac{1}{2n+1}\left(\frac{1152}{x^4-100x^2+1152}\right)^{2n+1},$$

2) $$\log(x+13) = \log(x+12) + \log(x+5) - 2\log x + \log(x-12) + \log(x-5) - \log(x-13) - 2\sum_0^\infty \frac{1}{2n+1}\left(\frac{1100}{x^4-169x^2+1800}\right)^{2n+1}.$$

Să se generalizeze.

N. CIORĂNESCU.

Soluțiune dată de Domnul N. GEORGESCU-ROEGEN (elev clasa VI, Liceul Mânăstirea Dealului).

Se știe că:

$$\log\frac{y+a}{y-a} = 2\sum_0^\infty \frac{1}{2n+1}\left(\frac{a}{y}\right)^{2n+1}. \qquad \left(\frac{a}{y}\right)<1$$

(G. M. vol. XXVII, pag. 254)

Aci, făcând $a=1152$, $y=x^4-100x^2+1152$, obținem:

$$\log\frac{x^4-100x^2+2304}{x^4-100x^2} = \log\frac{(x-8)(x+8)(x-6)(x+6)}{x^2(x-10)(x+10)} = 2\sum_1^\infty \frac{1}{2n+1}\left(\frac{1152}{x^4-100x^2+1152}\right)^{2n+1},$$

care demonstrează relaţiunea (1), cu condiţiunea ca:

$$\left| \frac{1152}{x^4 - 100\,x^2 + 1152} \right| < 1$$

şi luând pentru x numai valori reale, avem:

$$x > 10\ ,\ 6 < x < 8\ ,\ -6 > x > -8\ ,\ -10 > x.$$

Pentru formula (2), $a = 1800$, $y = x^4 - 169\,x^2 + 1800$, prin urmare:

$$\log \frac{(x+12)(x-12)(x+5)(x-5)}{x^2(x+13)(x-13)} = 2 \sum_0^{\infty} \frac{1}{2n+1} \left(\frac{1500}{x^4 - 169\,x^2 + 1800} \right)^{2n+1},$$

x luând valorile indicate de inegalităţile:

$$x > 13\ ,\ 5 > x > 12\ ,\ -3 > x > -12\ ,\ x < -13.$$

Generalizarea problemei este dată în G. M. pag. 256.

Au mai dat soluţiuni şi generalizări D-nii: M. Adam (Liceul Constanţa), I. S. Antoniu (M-rea Dealului), E. I. Ballan (elev Cl. VIII, particulară), A. A. Buşilă, I. Coşereanu (Liceul Piatra-Neamţ), Tr. A. Dordea (Liceul M-rea Dealului), M. Dumitrescu (Liceul Carol I, Craiova), I. B. Florescu (elev Cl. VIII, particulară), L. Focşăneanu (Galaţi), C. E. Georgescu (elev clasa VIII, liceul Cantemir-Vodă, Bucureşti), C. I. Georgescu (Craiova), F. E. Georgescu (elev clasa VI, liceul Cantemir-Vodă, Bucureşti), Gorjan St. Georgescu (elev Cl. VIII, liceul Carol I, Craiova), Cristea Goilav (student în Matematici, Tecuci), E. Iliescu (Lic. M-rea Dealului), C. C. Ionescu (Cl. VIII, liceul Cantemir-Vodă), Longin Ionescu (elev Cl. VIII, particulară), A. Miclescu (Şcoala de Artilerie), A. N. Mocanu (Cl. VIII, Liceul Cuza-Vodă, Huşi), Ernest G. Oprişanu (Cl. VIII, Bârlad), Pincu Katz (Liceul Comunităţii Israelite, Galaţi), Th. I. Popa (Cl. VII, Liceul Cantemir-Vodă), T. Popoviciu (Cl. VII, Liceul Moise Nicoară, Arad), N. G. Săvescu (Cl. VIII, Liceul Internat, Iaşi), I. Rizescu (Liceul din Constanţa), I. Şerbănescu (Cl. VI Liceul Mihai-Viteazul, Bucureşti), I. A. Teodorescu (Liceul Petru şi Pavel, Ploeşti), M. St. Theodoru (Cl VIII, Liceul Cuza-Vodă, Huşi).

Foarte mulţi corespondenţi s'au referit la soluţiunea problemei No. 2859 propusă de D-l P. Sergescu.

E. A.

PROBLEMA 2944. *Să se demonstreze relaţia:*

$$\sum_{k=1}^{k=p^n} (a+k)^{p^{n-1}(p-1)} + p^{n-1} = \mathcal{M}\, p^n ,$$

unde p *este un număr prim, iar* a *şi* n *oarecare.*

N. GEORCESCU-ROEGEN.

Soluţie dată de D-nii: T. POPOVICIU (Lic. Arad), I. B. FLORESCU (cl. VIII particulară), A. TAUBER (Lic. Botoşani), C. I. GEORGESCU, B. M. BARBĂLATT (Lic. Bârlad), W. SOLOMON (Lic. Mateiu-Basarab), L. ROSENFELD (Lic. Botoşani).

Din şirul de numere consecutive: $a+1,\ a+2,\ldots,\ a+p^n$, se observă că sunt divizibile cu p, numai termenii din p în p, începând dela un termen oarecare. In total, se divid cu p numai p^{n-1} numere, iar $p^n - p^{n-1}$, nu se divid şi sunt deci prime cu p.

Dacă $(a+k)$ se divide cu p, atunci avem:

$$(a+k)^{p^{n-1}(p-1)} = \mathcal{M}\, p^n ,\quad \text{deoarece } p^{n-1}(p-1) > n.$$

Dacă $(a+k)$ nu se divide cu p, atunci:

$$(a+k)^{p^{n-1}(p-1)} = \mathcal{M}\, p^n + 1,$$

căci $(a+k)$ şi p sunt primi, iar p prim absolut. (A se vedeà *G. M.* vol. XXVII, pag. 396).

Rezultă, deci, că:

$$\sum_{k=1}^{k=p^n} (a+k)^{p^{n-1}(p-1)} = \mathcal{M}\, p^n + (p^n - p^{n-1}),$$

numărul termenilor ce dau ca rest 1, fiind $(p^n - p^{n-1})$.

De unde, avem imediat:

$$\sum_{k=i}^{k=p^n} (a+k)^{p^{n-1}(p-1)} + p^{n-1} = \mathcal{M}\, p^n ,$$

adică relaţia din enunţ.

PROBLEMA 2990. *Care este patratul de patru cifre, la care prima cifră este suma ultimelor două, iar produsul primelor două, este răsturnatul numărului format de ultimele două?*

N. TAILER.

Soluţiuni date de D-l FL. E. GEORGESCU (cl. VI R. Lic. Cantemir Vodă, Bucureşti).

I. Fie $N = 1000a + 100b + 10c + d$

patratul perfect căutat. Din enunţ rezultă:

$$a = c + d, \qquad a \times b = 10d + c,$$

$$\therefore \qquad a = \frac{9d}{b-1}.$$

d fiind ultima cifră a unui patrat perfect, ea nu poate fi decât una din următoarele:

0, 1, 4, 5, 6 şi 9.

Avem deci de examinat cazurile:

$\mathbf{d = 0}$, trebue să fie şi $c = 0$, pentruca N să fie patrat perfect, deci $\mathbf{a = 0}$ şi N nu mai este de patru cifre: 0100.

$\mathbf{d = 1}$ $\therefore$ $a = \frac{9}{b-1}$ $b-1=1$ $a=9$ $c=8$ N=9281 } nu sunt patrate
$b-1=3$ $a=3$ $c=2$ 3421 }

$\mathbf{d = 4}$ $\therefore$ $a = \frac{36}{b-1}$ $b-1=4$ $a=9$ $c=5$ 9554 nu este patrat
$b-1=6$ $a=6$ $c=2$ **6724** este »

$\mathbf{d = 5}$ $\therefore$ $a = \frac{45}{b-1}$ $b-1=5$ $a=9$ $c=4$ 9645 nu este patrat

$\mathbf{d = 6}$ $\therefore$ $a = \frac{54}{b-1}$ $b-1=6$ $a=9$ $c=3$ 9736 » »

$d = 9$ $\therefore$ $a = \frac{81}{b-1}$ $b-1=9$, ceea este imposibil.

Avem deci o singură soluţiune: $\mathbf{6724} = 82^2$.

II. Din *Culegere de Probleme* (Aritm. XXXIX) se ştie că patratele perfecte se termină cu: 00, 25, 01, 09, 21, 29, 41, 49, 61, 64, 81, 89, 04, 16, 24, 36, 44, 56, 69, 76, 84, 96.

Eliminăm grupele la care suma cifrelor este >9, căci suma cifrelor trebue să dea pe a. Rămân grupele:

00, 25, 01, 09, 21, 41, 61, 81, 04, 16, 24, 36, 44.

Răsturnatele lor fiind:

00, **52**, 10, **90**, 12, 14, 16, 18, 40, **61**, 42, 63, **44**,

eliminăm pe acelea subliniate, întrucât nu se pot descompune în doi factori $\leqslant 9$; deasemenea eliminăm pe 00, care dă falsa soluție $N = 0100$.

Deducem ca și la prima soluție, egalitatea: $a = \frac{9\,d}{b-1}$.

Observăm că d nu poate fi egal cu 9, căci ar trebui atunci $b = 10$; rezultă că a este divizibil cu 3, alegem din grupele precedente deci numai pe acelea divizibile cu 3, adică:

$12 = 3.4$	$18 = 9.2$	$42 = 6.7$	$63 = 9.7$
$\therefore N = 3421$	9281	**6724**	9736.

Dintre acestea numai **6724** este patrat perfect.

Au dat soluțiuni foarte bune, urmând una din cele două căi precedente, D-nii: I. Coșereanu, A. Abramovici, R. Septilici, C. I. Georgescu, E. Ștefănescu, M. Bogdan, Fl. Negretzu, C. Röder, M. Goldstein, B. Zuckerman, St. Teodorescu, S. Weiss, A. Bușilă, Cr. Goilav, I. Lazarovici, Em. Iliescu, T. Popoviciu, I. Dragomir, I. Lazarovici, C. Schönfeld, C. E. Georgescu, E. Ballan, G. Mateescu, I. Popovici, Th. Popa, M. Dimitriu, D. Atanasiu, St. Marin, Dobrescu Băbici.

Au mai rezolvat problema: D-ra Elena Lăzărescu și D-nii: M. Adam, L. Dvoirin, A. Antoniu, Tr. Dordea, D. Ghițescu, H. Petreanu, D. Vasilescu, Ionescu I. Brezuica, P. Katz, M. Rothenberg, W. Solomon, D. Blumenfeld.

Soluțiuni cu demonstrațiuni incomplete, sau prea complicate, au dat D-nii: F. Rabinovici, O. Vlad, St. Epure, V. Cazacincu, S. Solacolu, E. Bercovici, C. Răuț, S. Măcrineanu, S. Aronovici, Longin Ionescu, A. Tauber, L. Weis, F. Marcus, A. Miclescu, I. Constantinescu, O. Popea, L. Munteanu, M Pinchis, S. Katz, N. Arcadian, D. Solomon, I. Fântâneanu, I. Sager.

Observațiuni. 1. Unii corespondenți nu au căutat, la rezolvarea problemei, să elimine prin raționament combinațiunile care nu ar îndeplini condițiunile din enunț și nu s'au sfiit să facă aproape toate combinațiunile de

10 obiecte luate câte 4, în scopul de a găsi numărul N, prin încercări. Curios că în aceste condiţiuni au găsit soluţiunea problemei!

2. Nu se poate trece cu vederea că un rezolvitor, student al unei şcoale Politechnice, este încredinţat că patratele perfecte *«nu se termină decât cu cifrele 2, 4, 6 şi 8»*!

PROBLEMA 3009. *Să se afle unghiurile x, cuprinse între* $(\frac{1}{2}\pi$ *şi* $-\frac{1}{2}\pi)$, *care verifică relaţiunea:*

$$\operatorname{tg} x = \sqrt[3]{\frac{\sin 220^0\,35'\,48''_0 \cos 138^0\,40\,15''}{\operatorname{tg} 245^0\ 3'\,20''\ \operatorname{cotg} 305^0\,15'\,40''}}.$$

E. ABASOHN.

Soluţiune dată de D-nii: CAROL T. IONESCU şi IOAN KIRIŢESCU, (elevi cl. VI reală, Liceul Cantemir-Vodă, Bucureşti).

Observăm că expresiunea de sub radical este negativă, prin urmare nu am puteà aplica logaritmii unui număr negativ. Să notăm însă:

$$x' = -x,$$

avem:

$$\log.\operatorname{tg} x' = \tfrac{1}{3}\Big(\log\sin 40^0\,35'\,48'' + \log\cos 41^0\,19'\,x\,5''$$

$$+ \operatorname{colog.}\operatorname{tg} 65^0\,3'\,20'' + \operatorname{colog.}\operatorname{cotg} 54^0\,44'\,20''\Big)$$

$$= \overline{1},83571;$$

deci:

$$x = -x' = -34^0\,24'\,43'',44,$$

care este singurul arc, cuprins între $\frac{1}{2}\pi$ şi $-\frac{1}{2}\pi$, care răspunde chestiunei.

Notă. Această problemă, care este de fapt o aplicaţiune imediată a cunoştiinţelor ce se dau în manualele de trigonometrie pentru clasa VI reală, mi-a fost inspirată de o chestiune analoagă, propusă de d-nul prof. A. G. IOACHIMESCU la examenul de admitere din anul 1922 la Şcoala Politehnică din Bucureşti. Am găsit nimerit să o propun în Gazeta Matematică, de oarece în jurul acestui exerciţiu simplu se comit greşeli mari, chiar de către elevii care au terminat liceul şi care se ocupă în special de matematici!

După cum voiu arăta mai jos, problema nu este chiar atât de lipsită de interes, cum ne scrie d-nul C. I. GEORGESCU (elev cl. VIII reală, Liceul

Mihai Viteazul) şi care, desigur, este obicinuit să rezolve probleme cu mult mai grele...

Astfel, doi elevi dela liceele din Galaţi, au aplicat logaritmii expresiunii din enunţ, fără să se mai ingrijească de semnul ei şi au scris între altele :

$$\log \sin 220^0\, 35'\, 48'' = \log \sin 40^0\, 35'\, 48''\ !$$

Un elev din clasa VII, dela Liceul Laurian din Botoşani şi un elev, din diviziunea pregătitoare dela Şcoala Politehnică din Bucureşti, ne scrie că

$$\log \sin 220^0\, 35'\, 48'' = -\log \sin 40^0\, 35'\, 48''\ !$$

Recordul îl obţine un elev din clasa VII reală dela Liceul Lazăr din Bucureşti, când scrie şirul de egalităţi

$$\sin 220^0\, 35'\, 48'' = \sin 40^0\, 35'\, 48''$$
$$\cos 138^0\, 40'\, 15'' = \cos 41^0\, 19'\, 45'' \text{ etc.}$$

Dacă aceste greşeli nu ar fi făcute de elevi, cari par a avea ca predilecţie studiul Matematicilor, desigur că nu am fi insistat atâta asupra lor !...

E. A.

PROBLEMA 3011. *Se transformă $3/2^n$ şi $5/2^n$ în fracţii zecimale. Care sunt ultimele patru cifre zecimale dela dreapta?*

E. Ştefănescu.

Soluţie dată de D-nii: M. Adam, N. Arcadian, E. Ballan, B. M. Barbăltt, D. Blumenfeld, A. Buşilă, Tr. Dordea, I. Dragomir, M. G. Dumitrescu, Fl. Er. Georgescu, C. I. Georgescu, St. Georgescu-Gorjan, Cr. Goilav, P. şi S. Katz, Dima Iliescu, St. Măcrineanu, Ştefan Marin, F. Marcus, O. Popea, F. Rabinovici, M. Rothenberg, S. Solacolu, D. Solomon, N. Tailer, A. Tauber, V. Vasilescu, R. D. Cădere.

Fracţiile zecimale corespunzătoare fiind $3 \cdot 5^n/10^n$ şi $5^{n+1}/10^n$, problema revine la aflarea ultimelor patru cifre ale numerelor $3 \cdot 5^n$ şi 5^{n+1}.

Dacă:

$n = \mathscr{M}4$	5^{n+1} se termină cu 3125, iar $3 \cdot 5^n$ cu 1875.
$n = \mathscr{M}4 + 1$	5^{n+1} se termină cu 5625, iar $3 \cdot 5^n$ cu 9375.
$n = \mathscr{M}4 + 1$	5^{n+1} se termină cu 8125, iar $3 \cdot 5^n$ cu 6875.
$n = \mathscr{M}4 + 1$	5^{n+1} se termină cu 0625, iar $3 \cdot 5^n$ cu 4375.

PROBLEMA 3015. *Dându-se*:

$$\frac{x_1 - a_1}{b_1 - a_1} = \frac{x_2 - a_2}{b_2 - a_2} = \ldots = \frac{x_n - a_n}{b_n - a_n},$$

unde: $a_1 < b_1$, $a_2 < b_2 \ldots a_n < b_n$,

să se arate că dacă $x_1 < a_1$, *avem:* $x_2 < a_2, \ldots x_n < a_n$, *iar dacă* $x_1 > b_1$, *avem* $x_2 > b_2, \ldots x_n > b_n$.

Ce se întâmplă când $a_1 < x_1 < b_1$ *?*

B. Ig. Baidaff.

Soluție dată de D-nii: M. Adam, E. Ballan, B. M. Barbălatt, M. Bogdan, M. Brătescu, A. Buşilă, I. Coşereanu, I. Dragomir, M. şi I. Focşeneanu, C. I. Georgescu, St. Georgescu-Gorjan, V. Ghiţescu, E. Herşcovici, I. P. Iliescu, Longin Ionescu, P. Katz, Şt. şi I. Lăzărescu, St. Măcrineanu, F. Marcus, D. Măru, G. Mateescu, C. D. Mihăescu, Gr. Moisil, E. Oprişanu, H. Petreanu, O. Popea, T. Popoviciu, F. Rabinovici, I. Şerbănescu, S. Solacolu, D. şi W. Solomon, Gh. Stavrat, E. Ştefănescu, A. Tauber, L. Weiss, E. Zaharia, Fl. E. Georgescu.

Numitorii şirului de rapoarte egale fiind toţi pozitivi, numărătorii trebue să fie de acelaş semn; ori dacă $x_1 < a_1$, primul numărător este negativ şi deci:

(1) $x_2 < a_2, \ldots x_n < a_n$.

Dacă $x_1 > a_1$, rezultă pentru acelaş motiv:

(2) $x_2 > a_2, \ldots x_n > a_n$.

Dacă scădem numitorii din numărători, obţinem şirul de rapoarte:

$$\frac{x_1 - b_1}{b_1 - a_1} = \frac{x_2 - b_2}{b_2 - a_2} = \ldots = \frac{x_n - b_n}{b_n - a_n}.$$

Numărătorii trebuind iarăşi să fie de acelaş semn, rezultă condiţiile:

Dacă $x_1 < b_1$ avem: $x_2 < b_2, \ldots x_n < b_n$. (3)

Dacă $x_1 > b_1$ avem: $x_2 > b_2 \ldots x_n > b_n$. (4)

Şirurile de neeagalităţi (2) şi (3) arată că dacă:

$$a_1 < x_1 < b_1,$$

atunci şi: $a_2 < x_2 < b_2$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$a_n < x_n < b_n.$$

PROBLEMA 3033 *Intr'o poezie,* EMINESCU *spune următoarele:*

„Te-i răzimà, dulce copil de al meu umăr
„Şi fir cu fir, păru-ţi aurit, am să-l număr".

Cam cât timp i-ar fi trebuit lui, ca să facă această numărătoare?

I. IONESCU.

Suprafaţa medie a capului, acoperită cu păr, la un om, este de 775 cm² şi pe fiecare cm² sunt aproximativ 165 fire de păr *). Deci un om are cam $165 \times 775 = 127875$ fire de păr în cap. Experimentând, am găsit că într'un minut se pot numărà 40 fire de păr în condiţiunile copilului lui EMINESCU, la care părul este «lung, subţire şi mătăsos».

De acì, reese că, într'o oră, s'ar putea numărà 2400 fire; iar cele 127875 fire în 53 ore şi 17 minute.

I-ar fi trebuit dar lui EMINESCU aproape două zile şi un sfert continuu pentru a terminà numărătoarea.

Aceasta este soluţia matematică a problemei pe baza datelor admise. Ea presupune că 54 ore EMINESCU nu ar mâncà, nu ar dormì, nu ar pierde răbdarea, etc. De fapt însă, dânsul spune în aceeaşi poezie:

„Lângă salcâmi sta-vom noi noaptea întreagă,
„Ore întregi spune-ţi-oiu, cât îmi eşti dragă",

iar mai departe:

„Şi surâzând vom adormì sub înaltul
„Vechiul salcâm . . . . . ".

---

*) Date luate din manuscrisul *Culegere de probleme de Aritmetică,* ediţia II de d-l I. IONESCU, Cap. IX problema 9, ce mi-au fost încredinţate spre cercetare şi transcriere.

T. D.

In asemenea condiţiuni, problema devine nedeterminată. Concluzia este că EMINESCU nu şi-a făcut socoteala când a scris acele versuri.

TR. A. DORDEA.

In „*Dictionnaire populaire de médicine usuelle.* (Paris 1890) de Dr. LUBARTHE găsesc scris la pag. 427 Vol. I:

«WILSON, qui s'est livré à ce sujet à de minutieuses investigations, estime que chaque pouce carré de cuir chevelu contient 1066 cheveux; or la superficie de la tête humaine étant d'environ 120 pouces carrés il s'en suit que la moyenne d'une chevelure est de 127920 cheveux».

Presupun că se poate numără mai greu decât de a desprinde firele de păr şi că pronunţarea unei silabe cere în mediu o secundă. Numerele de 6 cifre au şi 22 silabe; deci în mediu să punem 12 silabe de număr. Ne va trebui $127920 \times 12 = 1535040$ secunde, sau 17 zile şi 18 ore.

Aceasta e teoria, căci practica mi-a arătat că părul este foarte neastâmpărat la numărătoare!

I. COŞEREANU.

EXERCIŢII.

85. Se scriu patru cifre consecutive una după alta, în ordine crescândă şi se schimbă între ele prima dela stânga cu a doua. In ce caz, numărul astfel scris este patrat perfect?

S. KATZ.

R. Fie a cifra cea mai mică. Numărul este:

$$1000\,(a+1)+100\,a+10\,(a+2)+(a+3)=1111\,a+1023.$$

Unimile patratului pot fi 0, 1, 4, 5, 6, 9, deci $a = 7, 8, 1, 2, 3, 6$. Se găseşte că $a = 3$ dă patratul $4356 = 66^2$.

86. Suma a patru numere în progresie geometrică este 60, iar diferenţa extremilor 28. Să se afle numerele.

A. MICLESCU.

R. Ecuaţiile problemei sunt:

$$a(1+q+q^2+q^3)=60,$$
$$a(q^3-1)=28,$$

sau:

$$a(q+1)(q^2+1)=2^2\times 3\times 5,$$
$$a(q-1)(q^2+q+1)=2^2\times 7,$$

deducem $a = 2^2 = 4$, apoi din $q+1=3$, $q=2$. Numerele căutate sunt:

4, 8, 16, 32.

87. Se cere patratul de patru cifre, în care produsul primelor două este egal cu numărul format de ultimele două, iar cifra sutelor este suma ultimelor două cifre.

M. Pinchis.

R. Fie $m\,s\,z\,u$ numărul căutat. Avem:

$$m\,s\,z\,u = n^2, \qquad m \times s = 10z + u, \qquad s = z + u.$$

Din ultimele două, scoatem prin scădere:

$$(m-1)\,s = 9z,$$

care se poate satisface astfel:

$z=0$	; 1	; 2	; 3	; 4	; 5	; 6	; 7	; 8.
$s=0,$	s ; 3,	9 ; 3,	6, 9 ; 9	; 9	; 9	; 9	; 9	; 9.
$m=m,$	1 ; 4,	2 ; 7,	4, 3 ; 4	; 5	; 6	; 7	; 8	; 9.
$u=0,$	s ; 2,	8 ; 1,	4, 7 ; 6	; 5	; 4	; 3	; 2	; 1.

Soluţiile ce dau $u = 2, 3, 7, 8$ nu corespund, căci acele cifre nu termină patrate. Deci am puteà luà $m000$, $1s0s$, 7321, 4624, 4936, 5945; 6954, 9981. Dintre acestea, numai $4624 = 68^2$ este patrat perfect.

88. Să se construiască un triunghiu cunoscându-se vârful A, ortocentrul H, centrul cercului lui Euler, ω şi o dreaptă Δ, pe care se află vârful B.

Virgil Ghiţescu.

R. N fiind mijlocul lui AH, din ω ca centru şi cu raza ω N, descriem cercul lui Euler, care intersectează pe AH în A'. Perpendiculara în A' pe AH ne va da direcţiunea laturii BC. La intersecţia ei cu Δ, găsim punctul B. Punctul C va fi simetricul lui B în raport cu M, a doua intersecţie a cercului cu direcţiunea BC.

89. Fie ABC un triunghiu ascuţit—unghiu oarecare, H ortocentrul, A', B' şi C' mijloacele laturilor BC, AC şi AB, E mijlocul lui BH; se uneşte E respectiv cu A', B' şi C' şi se ia pe EA' o lungime $EA'_1 = BC$, pe EB' o lungime $EB'_1 = AC$ şi pe EC' o lungime $EC'_1 = AB$; să se arate că patrulaterul $A'_1\,B'_1\,C'_1\,E$ este un paralelogram.

W. Solomon.

R. Se observă că $\sphericalangle B'\,E\,A' = \sphericalangle B'\,C'\,A' = \sphericalangle A'\,C\,B'$ şi că $\sphericalangle C'\,E\,B = \sphericalangle C'\,A'\,B' = \sphericalangle C'\,A'\,B'$; triunghiurile $A'_1\,B'_1\,E$, $B'_1\,C'_1\,E$ şi ABC sunt egale, $\sphericalangle A'_1\,B'_1\,E = \sphericalangle B'_1\,E\,C'_1$ şi $\sphericalangle C'_1\,B'_1\,E = \sphericalangle A'_1\,EB'_1$, sau $A'_1E \parallel B'_1C'_1$ şi $A'_1\,B'_1 \parallel E\,C'_1$.

90. Să se demonstreze că între elementele unui triunghiu avem relaţia:

$$\frac{a^2(\sin 2B + \sin 2C) + b^2(\sin 2A + \sin 2C) + c^2(\sin 2A + \sin 2B)}{a\cos A + b\cos B + c\cos C} = 6R.$$

L. Weiss.

R. Se ştie că avem $2S = R(a\cos A + b\cos B + c\cos C)$,

$a^2 \sin 2B + b^2 \sin 2C = b^2 \sin 2C + c^2 \sin 2A = c^2 \sin 2A + a^2 \sin 2B = 4S$, etc.

91. Să se demonstreze relaţia:

$$\frac{b+c}{a}\sin^2\frac{A}{2} + \frac{c+a}{b}\sin^2\frac{B}{2} + \frac{a+b}{c}\sin^2\frac{C}{2} = 1 + \frac{r}{R}.$$

Emil Ştefănescu.

R. Avem: $\frac{b+c}{a} = \frac{\sin B + \sin C}{\sin A} = \operatorname{cosec} \frac{A}{2} \cos \frac{B-C}{2}$, etc.,

astfel ce relația propusă devine:

$$\Sigma \sin \frac{A}{2} \cos \frac{B-C}{2} = \Sigma \cos \frac{B+C}{2} \cos \frac{B-C}{2} = \cos A + \cos B + \cos C, \text{ etc.}$$

92. Fie C_1 intersecția paralelelor P_a și P_b ale lui Artz ale triunghiului ABC. Triunghiurile ABC și $A_1B_1C_1$ sunt omotetice, centrul de omotetie fiind G.

Gr. C. Moisil.

R. Coordonatele lui C_1 vor satisface simultan ecuațiilor

$$\begin{cases} \alpha^2 - 4\beta\gamma = 0 \\ \beta^2 - 4\alpha\gamma = 0 \end{cases} \quad \therefore \quad \alpha = 1, \beta = 1, \gamma = \tfrac{1}{4}\ C_1.$$

Triunghiurile ABC, $A_1 B_1 C_1$ sunt izobare.

Dreapta $A_1 B_1$ intâlnește pe AB in punctul (1,—1, 0) la infinit, deci sunt paralele.

93. Funcțiunea $f(x)$ derivată în raport cu $F(x)$ dă rezultatul $f_1(x)$. Să se determine o funcție $\varphi(x)$, care derivată în raport cu $F(x)$, să dea rezultatul $f'_1(x)$.

T. Popoviciu.

R. Avem:

$$\frac{\partial f(x)}{\partial F(x)} = \frac{\partial f(x)}{\partial x} - \frac{\partial x}{\partial F(x)} \quad \therefore \quad \frac{\partial x}{\partial F(x)} = \frac{\partial f(x)}{\partial F(x)} : \frac{\partial f(x)}{\partial x}.$$

Tot așă $$\frac{\partial X}{\partial F(x)} = \frac{\partial \varphi(x)}{\partial F(x)} : \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x},$$

de unde scoatem $$\frac{\partial \varphi(x)}{\partial x} = \frac{f'_1(x)}{f_1(x)} f(x).$$

$$\therefore \quad \varphi(x) = \int \frac{f'_1(x)}{f_1(x)} f(x) \partial x.$$

PROBLEME PROPUSE.

3081. Congresul Panortodox dela Constantinopol a hotărît ca din anii $\mathscr{M}100$, să nu fie bisecți decât cei de forma $\mathscr{M}9+2$ și $\mathscr{M}9+6$. Care este durata mijlocie a anului după această normă? Cum stă această durată, față de anul astronomic?

I. Ionescu.

3082. Care sunt numerele de trei cifre, care împărțite prin produsul cifrelor lor dau la cât suma acelor cifre?

O. Orănescu.

3083. Să se descompună expresiunea:

$$2^6.5^4+2^2.5^2+1,$$

în produs de doi factori. Generalizare.

Tr. A. Dordea.

3084. Bisectoarea unghiului A, în triunghiul ABC, întâlneşte în punctul P paralela dusă prin vârful C la latura $\overline{AB}$.

Să se găsiască locul punctului P, când vârfurile A şi B rămân fixe, iar latura $\overline{AC}$ constantă.

Să se generalizeze. O. N. Ţino.

3085. Să se arate că polarele centrului radical a trei cercuri în raport cu aceste cercuri, întâlnesc liniile centrelor lor în trei puncte situate pe o dreaptă. T. Mareş

3086. Să se discute natura rădăcinilor ecuaţiei:

$$(x^2+a)\ (x^2+b)=K,$$

a, b fiind două constante, oarecari, şi K un parametru arbitrar.

Se recomandă o metodă geometrică.

D. V. Ionescu.

3087. Să se determine α, astfel ca expresiunea:

$$x^\alpha(\sin x - \operatorname{artg} x),$$

să aibă o limită finită şi diferită de zero, când x tinde către zero.

Şt. Lăzărescu.

3088. Intr'un triunghiu ABC fie R raza cercului circumscris şi d distanţa OH dintre ortocentrul şi centrul cercului circumscris. Să se demonstreze că dacă avem

$$2R\cos A=\pm d,$$

triunghiul e isoscel sau dreptunghic.

Al. Şcodrano.

3089. Se consideră trei străzi AB, BC, AC, formând un triunghiu. Strada AB e asfaltată, iar celelalte două noroioase. O maşină intră în A cu viteză constantă. Se întreabă pe care drum ajunge mai repede această maşină în punctul C.

Locot. Gh. Niculescu.

3090. Să se afle centrul de greutate al ariei, situată deasupra axei ox, coprinsă între curba $y=ax^3$ şi dreapta $y=a^3x$.

G. I. Dumitrescu.

TABLA DE MATERII

TABLA DE MATERII

A. ARTICOLE.

Aritmetica.

		Pag.
Lt. I. Linteş.	Mărimea indicatorului unui număr faţă de numărul divizorilor lui.	17
C. D. Orăşeanu.	Aritmetica Românească de *Matei Millo Spătar.* . .	81
Lt. I. Linteş.	Comparaţiune între suma divizorilor unui număr şi suma numerelor prime lui şi inferioare dânsului . .	125
Lt. I. Linteş.	Comparaţiune între produsul numerelor prime cu un număr dat şi inferioare lui şi produsul divizorilor acelui număr	166
Gh. Zapan.	Generalizarea teoremei lui *Fermat* în cascadă . . .	323
Căpitan I. Linteş.	O problemă cu indicatori	363
Lt.-Col. G. Buicliu.	Generalizarea unei probleme de aritmetică	441

Geometria.

V. Cristescu.	Asupra triunghiului automedian	241
B. M. Barbălatt.	Asupra punctelor şi triunghiurilor isobarice	401

Algebra.

I. Ionescu.	O rezolvare elementară a ecuaţiilor numerice de gradul al treilea	13
G. Bratu.	Despre formula creşterilor finite	162
Th. Angheluţă.	O expresiune remarcabilă a câtului şi restului diviziunei a două polinoame	201
Th. Angheluţă.	Asupra unei clase de ecuaţii algebrice cu toate rădăcinile reale	361

Geometria Analitică.

Cristea Mateescu.	O cubică remarcabilă în legătură cu o nouă generalizare a teoremei lui *Simson*	43
M. Ghermănescu.	Asupra unei curbe remarcabile	46
Ad. Mineur.	Sur la cubique de *M. Cristea Mateescu* et le théorème de *Simson*	161
M. Ghermănescu.	Asupra unei transformări geometrice	281

Pag.

Analiză.

V. Alaci. Calcularea câtorva integrale definite 83

Diverse.

Ion Ionescu. / *Ioan Buşilă.* Premiile şi alte dispoziţiuni ale fondurilor „Gazetei Matematice". 11

Gh.Em. Filipescu. / *M. Saligny.* Regulamentul premiului „Lt.-Col. Gh. Tănăsescu". . . 19

Gazeta Matematică. Incoronarea dela Alba-Iulia 43

Ion Ionescu. Premiile Concursului din anul 1916 44

Ion Ionescu. / *Ion D. Teodor.* / *G. Em. Filipescu* Premiul „Vasile Conta". 47

I. Ionescu. Munca Matematică 92, 121

Delegaţia Societ. Concursul „Gazetei Matematice". 95

N. Georgescu. / *Ion Ionescu.* / *G. Ţiţeica.* Premiul „Vasile Conta" pe anul 1921 — 1922 . . . 97

C. D. Orăşeanu. / *Maior G. Liteanu.* Raportul Comisiunei pentru acordarea premiului„ „Vasile Conta" pe anul 1920 — 1921 205

M. Saligny. / *Maior G. Liteanu.* Raportul comisiunei pentru acordarea premiului de matematici aplicate la Ştiinţele militare pe intervalul 1 Sept. 1921 — 1 Sept. 1922 245

G. Ţiţeica. Rezultatul Concursului „Gazetei Matematice". 321

B. NOTE MATEMATICE.

1 *I. Ionescu.* Alte zece mecanici diverse 19
2 *Gh. Em. Filipescu.* Produsul vectorial al trei vactori 19
3 *A. Tauber.* Asupra exerciţiului No. 31 21
4 *Tr. Dordea.* Asupra triunghiurilor în care K. $a = m.b + n.c$. 22
5 *I. Ionescu.* Zece algebre diverse 49
6 *I. Ionescu.* Circonferinţa patratului! 50
7 *I. B. Florescu.* Asupra problemei 2723 51
8 *B. M. Barbălatt.* Asupra unghiului lui Brocard 52
9 *M. Ghermănescu.* Asupra problemei 2836 53
10 *Const. E. Georgescu.* Asupra problemei 2924 53
11 *Ion Ionescu.* Alte zece geometrii diverse 98
12 *N. Georgescu. R.* Asupra problemei 2549 98
13 *A. Tauber.* Asupra problemei 2579 99
14 *I. I.* Asupra problemei 2592 100
15 *N. Georgescu R.* Asupra problemei 2714 100
16 *Ad. Mineur.* Sur la question 2823 128
17 *Ad. Mineur.* Sur la question 2868 129
18 *Ad. Mineur.* Sur la question 2893 129
19 *I. Ionescu.* Zece trigonometrii diverse 130
20 *I. Ionescu.* Suma patratelor primelor n numere 130
21 *V. C.* Asupra problemei 2954 131
22 *Lt. Col. Gh. Buicliu.* Un exerciţiu greşit 132

			Pag.
23	*Th. Angheluță.*	Asupra problemei 2907	133
24	*I. Ionescu.*	Alte zece aritmetici diverse	167
25	*Ad. Mineur.*	Produsul vectorial a trei vectori	168
26	*N. Georgescu R.*	Asupra notei 28 anul XXVII	169
27	*Lt. Col. Gh. Buicliu.*	Reciproca problemei 2321	170
28	*Th. Angheluță.*	Descompunerea trinomului bipatrat	170
29	*Const. E. Georgescu.*	Generalizarea problemei 2876	171
30	*Miron Niculescu.*	Asupra unei curbe remarcabile	173
31	*B. M. Barbălatt.*	Asupra problemei 2364	173
32	*I. Ionescu.*	Incă zece mecanici diverse	207
33	*E. Iliescu.*	Valoarea lui π	207
34	*N. Georgescu R.*	Asupra şirului lui Fibonacci	207
35	*A. Tauber.*	Asupra exerciţiului No. 6 (Anul XXIV)	209
36	*V. Cristescu.*	Asupra problemor 161, 173, şi 200 din Revista Matematică din Timişoara	209
37	*Lt. Col G. Buicliu.*	Trisectorul	211
38	*I. Ionescu.*	Alte zece aritmetici diverse	247
39	*M. Vasiliu.*	Asupra unei teoreme	248
40	*M. Ghermănescu.*	Asupra formulei creşterilor finite	248
41	*Const. E. Georgescu.*	Asupra problemei 2698	249
42	*V. Cristescu.*	Asupra dreptei lui Simson	249
43	*Marin G. D-trescu.*	Asupra unei relaţii	250
44	*I. Fundăţeanu.*	Generalizarea unei teoreme a lui Chasles	251
45	*Tr. Tordea.*	Asupra problemei 2914	252
46	*Ion Coşereanu.*	Asupra problemei 2480	252
47	*Gh. Jujescu.*	Asupra unei probleme de Geometrie Analitică	253
48	*Miron Niculescu.* / *Gr. Moisil.*	Asupra curbei Γ	254
49	*I. Ionescu.*	Alte zece algebre diverse	285
50	*C. I. Geogescu.*	O generalizare	286
51	*Teodor. I. Popa.*	Asupra problemei 2927	286
52	*B. M. Barbălatt.*	Asupra problemei 2389	287
53	*Ion Rizescu.*	Generalizarea problemei 2704	288
54	*Const. I. Georgescu.*	Asupra problemei 2760	288
55	*I. Al. Stoenescu.*	Calculul sumei puterilor a cincea	289
56	*M. Ghermănescu.*	Asupra notei 36	290
57	*Mircea I. Adam.*	Asupra problemei 200 din Revista Matematică	291
58	*Florea I. Negretzu.*	Asupra unor relaţii trigonometrice	291
59	*Lt. Col. Gh. Buicliu.*	Generalizarea problemei 2750	292
60	*I. Ionescu.*	Alte zece trigonometrii diverse	328
61	*I. B. Florescu.*	Suma primelor n termeni din şirul lui Fibonacci	328
62	*Lt. Col. Gh. Buicliu.*	Fracţii sau frângeri	329
63	*Gh. Zapan.*	O generalizare	329
64	*B. M. Barbălatt.*	Asupra problemei 2657	330
65	*Gh. D. Popescu.*	Asupra unui loc geometric	331
66	*C. E. Georgescu.*	Stabilirea unui identităţi algebrice	332
67	*A. T. Nicolau.*	Asupra unei serii	335
68	*I. Ionescu.*	Alte zece aritmetici diverse	367
69	*M. Vasiliu.*	Asupra problemei 2621	368
70	*A. Tauber.*	Asupra problemei 2662	369
71	*Tr. Lalescu*	Asupra problemei 2962	369
72	*Tr. Lalescu.*	Asupra notei 42	371
73	*N. Blaha.*	Asupra problemei 2389	371
74	*V. Cristescu.*	Asupra triunghiului automedian	372
75	*N. Blaha.*	O rectificare	372

			Pag.
76	*Gh. I. Dumitrescu.*	Generalizarea teoremei lui Ptolomeu	372
77	*Gh. Bratu.*	Despre formula creşterilor finite	374
78	*N. P. Arcadian.*	Asupra exerciţiului No. 10	375
79	*Fl. Er. Georgescu*	Asupra problemei 1614	376
80	*I. Ionescu.*	Alte zece mecani diverse	406
81	*I. B. Florescu.*	Asupra problemei 2557	406
82	*M. Adam.*	Asupra exerciţiului 27 (Anul XXVI)	406
83	*M. Davidescu.*	Asupra şirului lui Fibonacci	407
84	*V. Cristescu.*	Asupra problemei 2299	408
85	*N. Georgescu R.*	Asupra problemei 2657	408
86	*Tiberiu Popoviciu.*	O generalizare a teoremei lui Franke	409
87	*I. T. Rizescu,*	Asupra problemei 1730	410
88	*Fl. Er. Georgescu.*	Asupra unei probleme de maximum	411
89	*Th. Angheluţă.*	Asupra unei teoreme relativă la funcţiile simetrice	411
90	*B. M. Barbălatt.*	Asupra elipselor lui Steiner	414
91	*A. Th. Nicolau.*	Soluţiunea unei chestiuni de examen	415
92	*Ion Ionescu.*	Alte zece aritmetici diverse	447
93	*F. Negretzu.*	Asupra problemei 90 din Revista Matematică	448
94	*Căpitan I. Linteş.*	O teoremă	448
95	*M. Ghermănescu.*	Suma puterilor asemenea	449
96	*Miron Niculescu.*	Un loc geometric	450
97	*Th. Angheluţă.*	Observare asupra notei dela pag. 332	451
98	*I. Stoenescu.*	Asupra unei chestiuni de algebră	453
99	*Ion Şerbănescu.*	Asupra problemei 1904	454
100	*Miron Niculescu.*	Asupra funcţiunei Γ(a)	454

C. CHESTIUNI DE EXAMEN.

		Pag.
Şcoala Politechnică din Bucureşti	Lucrarea scrisă din 2 decemvrie 1921	23
„	Lucrarea scrisă din 17 fevruarie 1922	24
„	Examenul general de Geometrie Analitică din 1922	54
Facultatea de Ştiinţe din Bucureşti	Examenele de Algebră şi Analiză din iunie 1922	100
Facultatea de Ştiinţe din Cluj	Examenele de Analiză şi Mecanică din octomvrie 1922	134
„	Examenele din octomvrie 1922	174
Gazeta Matematică	Concursul din 1923	337
Examenul de capacitate pentru profesori	Probele scrise dela 25 şi 26 aprilie 1923	377

D. BIBLIOGRAFII.

Pag.

Anales de la Sociedad Cientifica Argentina 25, 102, 177, 378
Mathesis 25, 135, 178, 202, 293, 295, 341, 417, 458
Revista de matematicas y fisicas elementales 25, 56, 102, 135, 177, 212, 293 341, 378, 417, 457
Buletinul asociaţiei de matematici pure şi aplicate 26, 56, 102, 136, 177, 202 293, 342, 417, 457
Revista Matematică din Timişoara 56, 102, 136, 178, 202, 295, 342, 378, 417, 458
Şcoala Politechnică din Timişoara 56
Revista Artileriei 56, 102, 136, 417
Bulletin of the American mathematical Society . . . 56, 102, 295, 341, 457.

Pag.

N. Abramescu — Sur les séries des polynomes à deux variables complexes 56
Revista del centro estudiantes del instituto del profesorado secondario 102
M. Kraitchik — Decomposition de $a^n \pm b^n$ en facteurs 135
Griffith Conrad Evans — Functionals and their applications 136
Bulletin de la Section scientifique de l'Académie Roumaine. . 136, 202, 341
W. Hefter & Sons—Cataloque of works 136
Maurice Lecat — Bibliographie du Calcul des variations 1850—1913 . . 176
Maurice Lecat — Bibliographie du Calcul des variations depuis les origines 177
Anuarul Societăţii „Matematica Bârlădeană" 177
Natura 177
Note matematice şi ştiinţifice 178, 293
Maurice Lecat — Bibliographie des séries trigonométriques 212
P. Mansion — L'essence de la trigonométrie 213
J. Neuberg — Géométrie et mécanique 213
M. N. Saltycow — Sur le developpement de la théorie des équations . 213
J. Neuberg — Notes mathématiques 213
V. Thébault — Contributions à la Géométrie du tétraedre 213
Locot. Col. Gh. I. Popescu — Apărarea antiaeriană 294
R. C. Archibald — Euclide's book on division of figures 294
Gaspard Monge — Géométrie descriptive 295
B. M. Barbălatt — Două puncte remarcabile 297
Journal de mathématiques élémentaires 342, 378
Gazeta Matematicelor elementare, financiare şi speciale 342, 378
N. Abramescu — Sule serie di polimoni di una variabile complessa . . 342
N. Abramescu — Sur l'autogénération des courbes 342
Lt. I. Linteş — O metodă pentru regularea tragerii 342
Micu Grünbaum — Teoréme de geometrie 342
American mathematical Society 342
D. Vasilovici — Table de logaritmi 416
Buletinul Societăţii Române de ştiinţe 457
P. Sergescu — Sur les noyaux simétrisables 458
R. P. Bosmans — Asupra interpretării geometrice dată de Pascal spaţiului cu patru dimensiuni 458

E. CERERI.

No. cererii	*Pagina la care a fost*		*No. cererii*	*Pagina la care a fost*	
	Propusă	Dat răspuns		Propusă	Dat răspuns
90	397 (XXVII)	26, 103, 297, 379	97	213 ((XXVIII)	
91	26 (XXVIII)		98	213 „	
92	57 „		99	256 „	
93	57 „		100	297 „	
94	103 „		101	342 „	
95	136 „		102	458 „	
96	136 „		103	458 „	

F. DIVERSE.

No. Pag.

1 *I. I.* Cărţi de matematici 57

G. PROBLEME PROPUSE.

a) Repartizarea problemelor propuse după materii.

Aritmetica. 2964, 2965, 2966, 2967, 2976, 2977, 2978, 2979, 2990, 2991, 2992, 3001, 3002, 3011, 3012, 3020, 3021, 3022, 3023, 3031, 3032, 3033, 3041, 3042, 3051, 3052, 3061, 3062, 3063, 3067, 3071, 3072, 3081, 3082, 3083.

Geometria. 2968, 2969, 2970, 2971, 2981, 2982, 2983, 2984, 2985, 2986, 2993, 2994, 2999, 3003, 3004, 3005, 3016, 3017, 3018, 3026, 3027, 3028, 3036, 3037, 3038, 3043, 3044, 3045, 3046, 3050, 3053, 3054, 3055, 3064, 3065, 3066, 3069, 3073, 3074, 3079, 3084, 3085.

Algebra. 2972, 2973, 2980, 2995, 2996, 3006, 3007, 3013, 3014, 3015, 3024, 3025, 3034, 3035, 3047, 3048, 3056, 3057, 3068, 3075, 3076, 3077, 3086, 3087.

Trigonometria. 2974, 2987, 2988, 2997, 2998, 3009, 3029, 3039, 3049, 3058, 3059, 3078, 3088.

Geometria analitică. 2975, 2989, 3019, 3030, 3060, 3090.

Mecanica. 3000, 3010, 3040, 3070, 3080, 3089.

Analiza. 3008.

b) Indicarea paginei la care a fost propusă sau rezolvată.

No. problemei	Pagina la care a fost: Propusă [1]	Rezolvată [2]
171	76 (II), 198 (XVI)	NR
485	104 (V), 198 (XVI)	NR
581	148 (VI), 51 (XI), 238 (XVI)	NR
585	172 (VI), 238 (XVI)	
676	148 (VII)	
691	196 (VII), 278 (XVI)	NR
766	124 (VIII), 319 (XVI)	
825	288 (VIII), 358 (XVI)	
886	172 (IX)	NR
887	172 „, 358 (XVI)	NR
914	267 (IX)	NR
944	52 (X)	NR
1000	220 (X), 438 (XVI)	NR
1008	244 (X), 462 (XVI	NR
1040	52 (XI)	297
1056	100 „	NR
1058	100 „	NR
1083	172 „	NR
1092	196 „	NR
1146	76 (XII)	NR
1156	100 „	
1162	124 „	NR
1178	172 „	NR
1180	172 „	NR
1188	228 „	
1214	296 „	NR
1236	64 (XIII)	NR
1270	192 „	NR
1271	192 „	NR
1287	256 „	NR
1297	288 „	NR
1299	319 „	NR
1307	320 „	
1310	352 „	

1) Numărul latin din paranteză indică volumul colecției s. ex. 172 (VI), înseamnă că problema 585 a fost propusă la pag. 172 din volumul VI; problemelor mai vechi nerezolvate încă, sau rectificate, li s'a publicat din nou enunțul, s. ex: problema 585 s'a mai publicat la pag. 238 vol. XVI.

2) NR însemnează că problema nu a fost încă rezolvată. Pentru acelea în dreptul cărora nu e trecut niciun număr, redacția posedă soluțiuni bune care nu au fost încă publicate.

No. problemei	Pagina la care a fost: Propusă[1])	Rezolvată[2])
1333	32 (XIV), 198 (XVIII)	
1342	64 (XIV)	
1343	64 „	
1355	96 „	NR
1364	128 „	NR
1367	128 „	NR
1377	160 „	NR
1379	160 „	NR
1384	191 „	NR
1386	192 „	NR
1398	224 „	NR
1399	224 „, 200 (XVI)	NR
1412	256 (XIV)	NR
1424	288 „	
1434	320 „	NR
1450	352 „	NR
1453	372 „	343
1482	64 (XV)	NR
1489	96 „	
1490	96 (XV)	NR
1497	128 „	
1500	128 „	
1511	160 „	
1533	224 „	
1534	224 „	
1553	288 „	NR
1563	320 „	
1564	320 „	
1576	352 „	
1577	352 „	
1584	372 „, 158 (XX)	NR
1587	372 (XV)	NR
1591	39 (XVI)	
1608	80 „	
1626	159 „	NR
1632	159 „	
1637	160 „	NR
1650	200 „	NR
1656	239 „	
1676	279 „	NR
1679	280 „	NR
1690	320 „	
1702	360 „	
1711	399 „	NR
1729	440 „	NR
1733	463 „	NR
1734	463 „	
1735	464 „	NR
1753	80 (XVII)	NR
1764	120 „	NR
1766	160 „	213

No. problemei	Pagina la care a fost: Propusă[1])	Rezolvată[2])
1773	160 (XVII)	
1778	199 „	
1782	200 „	
1783	200 „	
1790	240 „	NR
1799	280 „	
1807	320 „	
1823	400 „	
1831	439 „	
1835	440 „	NR
1840	466 „	
1858	78 (XVIII)	
1876	119 „	NR
1882	120 „	NR
1884	158 „, 200 „	NR
1891	160 „	
1892	160 „	
1895	199 „	
1898	199 „	
1905	200 „	NR
1906	200 „	NR
1907	238 „	379
1911	239 „	
1914	239 „, 280 „	NR
1922	278 „	
1929	279 „	NR
1933	280 „	
1934	280 „, 320 „	
1937	318 „	
1944	319 „	NR
1945	320 „	NR
1948	358 „	
1949	358 „	NR
1958	359 „	
1959	360 „	NR
1968	399 „	
1969	399 „	
1973	400 „, 461 „	NR
1976	431 „	
1979	431 „	NR
1983	432 „	
1986	462 „	
1987	462 „	NR
1991	38 (XIX)	
2003	40 „	NR
2004	40 „	NR
2016	79 „	NR
2017	80 „	NR
2018	80 „	
2024	118 „	

No. problemei	Pagina la care a fost: Propusă[1])	Rezolvată[2])
2025	119 (XIX)	
2031	120 „	
2032	120 „	NR
2035	159 „	
2038	159 „	
2040	159 „	344
2048	198 „	
2055	200 „	
2056	200 „	
2058	200 „	
2063	238 „	
	280 „	
2065	239 „	
2070	240 „	NR
2074	278 „	NR
2079	279 „	
2081	279 „	
2083	280 „	
2091	319 „	
2096	320 „	
2097	320 „	
2106	358 „	
2108	359 „	
2110	359 „	
2111	360 „	NR
2112	360 „	NR
2116	398 „	
2117	398 „	
2118	399 „	
2122	399 „	
2129	438 „	
2130	460 „	
2133	439 „	
2138	439 „	
2144	461 „	
2145	462 „	
2147	462 „	
2170	119 (XX)	NR
2176	120 „	
2187	160 „	
2191	197 „	
2194	197 „	
2197	198 „	
2203	199 „	
2217	239 „	
2222	240 „	
2227	279 „	
2233	280 „	
2234	280 „	
2235	280 „	
2240	318 „	
2245	319 „	256
2247	320 „	
2248	320 „	

No. problemei	Pagina la care a fost: Propusă[1])	Rezolvată[2])
2249	320 (XX)	
2250	320 „	
2254	358 „	178
2260	359 „	417
2263	359 „	
2264	360 „	
2265	360 „	
2266	360 „	
2274	398 „	
2278	399 (XX)	
2281	400 „	
2282	400 „	
2284	439 „	
2289	439 „	
2290	439 „	
2295	461 „	
2296	461 „	218
2298	462 „	
2299	462 „	408
2300	462 „	NR
2301	462 „	
2302	462 „	
2308	39 (XXI)	
	80 „	
2311	40 „	
2318	79 „	
	160 „	
2320	79 „	
2329	118 „	
2330	118 „	
2332	119 „	
2335	119 „	345
2336	120 „	
2337	120 „	
2338	120 „	
2340	157 „	
2343	157 „	
2344	158 „	
2346	158 „	
2347	158 „	NR
2349	159 „	
2353	159 „	NR
2354	198 „	
2356	199 „	
2357	199 „	
2358	199 „	
2359	199 „	
2360	199 „	
2365	200 „	
2366	200 „	
2370	239 „	
2375	240 „	
2377	240 „	
2380	278 „	

No. problemei	Pagina la care a fost: Propusă[1])	Rezolvată[2])
2381	278 (XXI)	
2382	278 „	
2383	278 „	
2386	279 „	
2389	279 „	
2390	280 „	
2391	280 „	NR
2392	280 „	NR
2394	318 „	
2395	318 „	NR
2396	319 „	
2397	319 „	
2398	319 „	
2402	320 „	
2405	320 „	
2408	359 „	NR
2410	359 „	140
2411	359 „	298
2413	360 „	418
2414	360 „	NR
2416	360 „	
2421	399 „	
2422	399 „	NR
2423	399 „	
2428	439 „	NR
2429	439 „	349
2430	439 „	NR
2331	439 „	
2434	440 „	NR
2435	440 „	
2436	440 „	
2439	440 „	NR
2440	459 „	NR
2443	459 „	NR
2444	459 „	NR
2448	460 „	NR
2449	460 „	141
2453	31 (XXII)	NR
2456	31 „	NR
2458	32 „	
2459	32 „	NR
2460	32 „	103
2461	32 „	NR
2462	62 „	NR
2466	63 „	NR
2469	63 „	NR
2471	64 „	NR
2473	64 „	NR
2477	95 „	NR
2478	95 „	
2479	95 „	NR
2481	96 „	NR
2484	96 „	NR
2487	120 „	NR

No. problemei	Pagina la care a fost: Propusă[1])	Rezolvată[2])
2491	120 (XXII)	NR
2492	120 „	256
2497	144 „	NR
2500	144 „	NR
2501	167 „	NR
2502	167 „	NR
3503	167 „	NR
2510	191 „	NR
2511	191 „	NR
2512	192 „	NR
2524	240 „	NR
2529	262 „	NR
2532	262 „	380
2535	287 „	259
2537	287 „	458
2538	288 „	
2539	288 „	NR
2543	311 „	NR
2544	311 „	NR
2545	312 „	NR
2546	312 „	NR
2552	47 (XXIII)	
2553	47 „	
2555	48 „	NR
2556	48 „	NR
2560	72 „	NR
2566	120 „	
2569	120 „	NR
2571	144 „	NR
2573	144 „	
2575	168 „	
2577	168 „	NR
2578	168 „	NR
2580	192 „	NR
2581	192 „	179
2582	192 „	NR
2585	215 „	
2586	216 „	
2587	216 „	NR
2590	240 „	105
2591	240 „	NR
2593	264 „	NR
2594	264 „	350
2596	288 „	NR
2597	288 „	NR
2598	288 „	
2599	288 „	NR
2600	16 (XXIV)	
2602	16 „	NR
2603	16 „	181
2604	31 „	
2605	31 „	
2607	31 „	NR
2608	32 „	NR

No. problemei	Pagina la care a fost: Propusă[1])	Rezolvată[2])
2609	32 (XXIV)	
2610	160 „	NR
2613	48 „	NR
2615	64 „	
2623	80 „	NR
2629	112 „	105
2631	112 „	
2635	112 „	460
2637	127 „	
2638	127 „	NR
2639	127 „	220
2640	128 „	
2641	128 „	
2643	128 „	NR
2644	143 „	NR
2645	143 „	NR
2647	143 „	NR
2650	175 „	NR
2651	176 „	
2654	176 „	
2655	191 „	NR
2656	191 „	NR
2658	191 „	NR
2660	191 „	NR
2661	192 „	
2664	24 (XXV)	
2665	24 „	NR
2668	24 „	27
2669	24 „	NR
2671	48 „	NR
2674	63 „	
2675	63 „	NR
2681	64 „	27
2682	64 „	
2683	79 „	
2684	80 „	NR
2686	80 „	NR
2687	80 „	57
2688	80 „	
2689	80 „	
2690	80 „	381
2691	108 „	421
2692	108 „	NR
2693	108 „	
2694	108 „	NR
2695	109 „	NR
2696	109 „	NR
2700	140 „	300
2701	141 „	
2705	141 „	351
2706	142 „	
2709	142 „	NR
2712	143 „	355
2713	143 „	NR

No. problemei	Pagina la care a fost: Propusă[1])	Rezolvată[2])
2717	143 (XXV)	NR
2719	144 „	
2721	144 „	29
2722	167 „	301
2726	168 „	259
2627	168 „	NR
2728	168 „	423
2731	191 „	
2732	191 „	106
2734	191 „	302
2735	192 „	NR
2738	192 „	NR
2743	216 „	NR
2745	216 „	NR
2747	239 „	NR
2748	240 „	
2752	264 „	
2755	55 (XXVI)	59
2756	55 „	461
2758	56 „	NR
2759	56 „	NR
2760	56 „	224
2764	78 „	NR
2766	79 „	
2769	79 „	NR
2773	80 „	
2778	104 „	NR
2780	104 „	NR
2781	104 „	181
2789	135 „	NR
2792	137 „	
2795	159 „	
2796	159 „	
2799	159 „	
2800	159 „	465
2803	160 „	
2807	191 „	304
2809	192 „	NR
2813	192 „	260
2814	192 „	NR
2815	215 „	
2818	216 „	
2820	216 „	
2821	216 „	107
2822	216 „	
2825	247 „	
2827	247 „	
2828	248 „	
2829	248 „	NR
2832	248 „	32
2835	279 „	
2836	279 „	32
2837	279 „	
2838	279 „	

No. problemei	Pagina la care a fost: Propusă[2])	Rezolvată[2])
2839 . . .	280 (XVI)	61
2841 . . .	280 „	
2842 . . .	304 „	63
2848 . . .	335 „	66
2849 . . .	335 „	
2850 . . .	335 „	
2851 . . .	335 „	NR
2852 . . .	335 „	262
2853 . . .	336 „	NR
2856 . . .	38 (XXVII)	
2857 . . .	39 „	466
2858 . . .	39 „	424
2860 . . .	39 „	NR
2861 . . .	40 „	
2864 . . .	40 „	
2865 . . .	70 „	NR
2872 . . .	71 „	
3874 . . .	72 „	305
2875 . . .	72 „	
2879 . . .	102 „	
2880 . . .	103 „	
2884 . . .	103 „	183
2885 . . .	104 „	33
2886 . . .	104 „	NR
2887 . . .	104 „	
2888 . . .	104 „	NR
2889 . . .	104 „	NR
2891 . . .	143 „	
2892 . . .	143 „	110
2894 . . .	143 „	67
2895 . . .	143 „	
2896 . . .	144 „	112
2898 . . .	144 „	
2899 . . .	183 „	
2901 . . .	183 „	426
2902 . . .	183 „	NR
2903 . . .	184 „	351
2905 . . .	184 „	
2906 . . .	184 „	
2909 . . .	221 „	NR
2910 . . .	221 „	
2912 . . .	222 „	NR
2913 . . .	222 „	
2915 . . .	222 „	NR
2916 . . .	223 „	NR
2917 . . .	224 „	68
2918 . . .	224 „	
2919 . . .	262 „	71
2920 . . .	262 „	
2922 . . .	263 „	
2923 . . .	302 „	
2924 . . .	263 „	72
2926 . . .	264 „	NR
2927 . . .	264 „	34

No. problemei	Pagina la care a fost: Propusă[1])	Rezolvată[2])
2928 . . .	303 (XXVII)	
2929 . . .	303 „	
2930 . . .	303 „	306
2931 . . .	303 „	
2932 . . .	304 „	
2933 . . .	304 „	307
2934 . . .	304 „	114
2935 . . .	343 „	343
2936 . . .	343 „	NR
2937 . . .	343 „	
2938 . . .	344 „	468
2939 . . .	344 „	309
2941 . . .	344 „	264
2942 . . .	375 „	142
2943 . . .	375 „	143
2944 . . .	375 „	470
2945 . . .	375 „	NR
2946 . . .	375 „	
2947 . . .	376 „	
2949 . . .	376 „	148
2950 . . .	416 „	
2951 . . .	416 „	311
2952 . . .	416 „	
2953 . . .	416 „	NR
2954 . . .	416 „	74
2955 . . .	416 „	
2956 . . .	416 „	NR
2957 . . .	447 „	264
2958 . . .	447 „	186
2959 . . .	448 „	
2960 . . .	448 „	
2961 . . .	448 „	NR
3962 . . .	448 „	152
2963 . . .	448 „	267
2964 . . .	38 (XXVIII)	230
2965 . . .	38 „	
2966 . . .	39 „	268
2967 . . .	39 „	232
2968 . . .	39 „	186
2969 . . .	39 „	
2970 . . .	39 „	
2971 . . .	39 „	
2972 . . .	40 „	
2973 . . .	40 „	155
2974 . . .	40 „	
2975 . . .	40 „	188
2976 . . .	79 „	233
2977 . . .	79 „	
2978 . . .	79 „	
2979 . . .	79 „	312
2980 . . .	79 „	
2981 . . .	79 „	270
2982 . . .	79 „	313
2983 . . .	79 „	NR

No. problemei	*Pagina la care a fost:* Propusă[1])	Rezolvată[2])
2984	80 (XXVIII)	189
2985	80 „	
2986	80 „	
2987	80 „	234
2988	80 „	194
2989	80 „	427
2990	118 „	471
2991	119 „	
2992	119 „	382
2993	119 „	
2994	119 „	
2995	120 „	NR
2996	120 „	
2997	120 „	272
2998	120 „	386
2999	120 „	
3000	120 „	NR
3001	158 „	388
3002	158 „	390
3003	159 „	
3004	159 „	355
3005	159 „	NR
3006	159 „	274
3007	159 „	
3008	160 „	NR
3009	160 „	473
3010	160 „	NR
3011	199 „	474
3012	199 „	
3013	199 „	NR
3014	199 „	
3015	199 „	475
3016	200 „	276
3017	200 „	
3018	200 „	429
3019	200 „	NR
3020	200 „	430
3021	239 „	
3022	239 „	
3023	239 „	
3024	239 „	
3025	239 „	NR
3026	239 „	
3027	240 „	432
3028	240 „	391
3029	240 „	393
3030	240 „	
3031	278 „	
3032	278 „	
3033	279 „	476
3034	279 „	
3035	279 „	
3036	279 „	
3037	279 „	

No. problemei	*Pagina la care a fost.* Propusă[1])	Rezolvată[2])
3038	280 (XXVIII)	
3039	280 „	
3040	280 „	NR
3041	319 „	
3042	319 „	NR
3043	319 „	
3044	319 „	
3045	319 „	NR
3046	320 „	
3047	320 „	
3048	320 „	
3049	320 „	434
3050	320 „	
3051	359 „	
3052	359 „	
3053	360 „	
3054	360 „	
3055	360 „	NR
3056	360 „	NR
3057	360 „	
3058	360 „	
3059	360 „	
3060	360 „	NR
3061	398 „	
3062	398 „	
3063	399 „	
3064	399 „	
3065	399 „	
3066	399 „	
3067	438 „	
3068	400 „	
3069	400 „	NR
3070	400 „	NR
3071	439 „	NR
3072	439 „	
3073	439 „	
3074	439 „	
3075	439 „	NR
3076	439 „	
3077	440 „	NR
3078	440 „	
3079	440 „	
3080	440 „	NR
3081	479 „	NR
3082	479 „	NR
3083	480 „	NR
3084	480 „	NR
3085	480 „	NR
3086	480 „	NR
3087	480 „	NR
2088	480 „	NR
3089	480 „	NR
3090	480 „	NR

H. EXERCIŢII.[1]

Aritmetica. 1 (38); 4 (77); 5 (77); 10 (117); 11 (117); 12 (117); 13 (118); 16 (156); 17 (156); 23 (197); 24 (197); 25 (197); 26 (197); 31 (236); 32 (236); 33 (237); 41 (276); 42 (277); 43 (277); 46 (316); 47 (316); 48 (317); 55 (356); 56 (356); 66 (396); 67 (396); 68 (396); 69 (396); 76 (436); 77 (436); 85 (477); 86 (477); 87 (478).

Geometria. 2 (38); 15 (118); 18 (157); 19 (157); 27 (198); 28 (198); 29 (198); 37 (238); 38 (238); 44 (277); 49 (317); 50 (317); 51 (318); 52 (318); 57 (357); 58 (357); 59 (357); 64 (358); 70 (397); 73 (397); 78 (437); 83 (438); 88 (478); 89 (478).

Algebra. 6 (77); 7 (78); 14 (118); 20 (157); 34 (237); 35 (237); 36 (237); 53 (318); 60 (357); 61 (357); 62 (358); 63 (358); 71 (397); 72 (397); 79 (437); 80 (438); 81 (437).

Trigonometria. 3 (38); 8 (78); 21 (158); 30 (198); 39 (238); 40 (238); 45 (278); 54 (318); 65 (359); 74 (398); 82 (438); 84 (438); 90 (478); 91 (478).

Geometria analitică. 75 (398); 92 (479).

Geometria descriptivă. 22 (158).

Analiza. 9 (78); 93 (479).

I. TABLOUL NUMELOR.

Abasohn E. 5, 6, 80, 160, 212, 293, 320, 439, 457, 458, 469, 472, 473, 474.
Ablov A. 230, 233, 270, 312.
Abramescu N. 5, 6, 160, 220, 342.
Abramovici A. 142, 312, 472.
Adam M. 232, 269, 270, 273, 291, 309, 312, 313, 355, 356, 388, 391, 392, 394, 398, 407, 424, 435, 469, 472, 474, 475.
Agopian G. 428.
Alaci V. 6, 80, 91, 103, 140, 141, 159, 218, 342, 345, 381.
Alexe N. 368.
Amărăscu G. 66, 308.
Anastasiu E. 66.
Anghelescu A. 6.
Angheluţă T. 5, 6, 112, 134, 136, 160, 171, 177, 199, 205, 357, 360, 363, 397, 413, 426, 437, 440, 453.
Antoniu I. 59, 66, 156, 188, 196, 232, 236, 263, 269, 270, 307, 312, 313, 322, 393, 395, 439, 457, 469, 472.
Arcadian N. 143, 196, 230, 270, 274, 308, 312, 376, 391, 395, 396, 435, 465, 472, 474.
Aron L. 394.
Aronovici S. 471.
Atanasiu D. 229, 230, 312, 472.
Augustin R. 42, 179, 349.
Avramescu C. 6.

Bădărău A. 105.
Baidaf Ig. 179, 199, 212, 378, 475.
Ballan E. 151, 188, 191, 230, 233, 235, 236, 264, 270, 271, 276, 298, 313, 315, 318, 355, 385, 386, 388, 391, 394, 434, 435, 440, 469, 472, 474, 475.
Banciu I. 6.
Barbălatt B. 34, 35, 36, 53, 66, 70, 73, 76, 80, 105, 114, 117, 136, 150, 152, 154, 156, 174, 185, 187, 188, 189, 196, 198, 224, 226, 228, 230, 234, 256, 272, 274, 276, 287, 288, 298, 300, 307, 308, 309, 312, 313, 314, 319, 322, 330, 355, 369, 393, 394, 395, 405, 414, 429, 430, 470, 474, 475.
Bărbulescu C. 312.
Bărglăzan A. 393.
Barisien E. 298.
Bârsu I. 29, 67, 180, 182, 300, 301, 305, 355, 464, 465, 466.
Beleş I. 6.
Bercovici D. 71, 143, 313.
Bercovici E. 71, 186, 194, 234, 264, 270, 274, 308, 313, 392, 393, 397, 472.
Bercovici M. 66, 300.

1) Numerele din paranteză indică pagina, iar cele din afară numărul ce poartă exerciţiul.

Berdan C. 308.
Biberi P. 308.
Blaha N. 372.
Blumenfeld D. 71, 148, 156, 196, 229, 233, 266, 269, 273, 308, 312, 313, 391, 393, 436, 472, 474.
Bogdan M. 62, 66, 71, 195, 308, 391, 472, 475.
Bonea I. 228.
Borneanu G. 5, 6, 42, 321.
Brăileanu A. 274, 308, 317.
Brătescu M. 313, 394, 475.
Brătescu N. 230, 33, 270, 273, 308, 312.
Bratu G. 6, 166, 248, 375.
Brener A. 140.
Bruckner V. 6.
Brumărescu C. 219, 345.
Buchner V. 39, 62, 66, 67, 110, 186, 466.
Budeanu I. 6.
Buicliu G. 5, 6, 71, 72, 80, 100, 105, 106, 119, 132, 136, 139, 159, 170, 211, 213, 218, 240, 278, 293, 300, 309, 329, 355, 356, 382, 424, 427, 440, 447, 465.
Bunescu A. 379.
Bungetzianu D. 321.
Buradescu T. 6.
Buşilă A. 143, 149, 156, 188, 189, 191, 196, 229, 230, 234, 266, 270, 272, 273, 280, 307, 308, 312, 315, 317, 355, 356, 358, 394, 395, 418, 427, 435, 469, 472, 474, 475.
Buşilă C. 6.
Buşilă I. 6, 13.

Cădere R. 73, 269, 270, 474.
Cambureanu V. 6.
Capriel D. 6.
Capriel I. 7.
Caraman E. 7, 136.
Cazacincu V. 313, 391, 472.
Cazacu C. 7. 77, 78.
Charas J. 230, 270.
Chiricuţă A. 7.
Chiţulescu I. 7.
Cioc M. 7.
Cioică I. 232.
Ciorănescu I. 40, 68, 78, 103, 140, 155, 237, 264, 468.
Climescu C. 50.
Clujanu A. 319.
Constantinescu I. 66, 143, 188, 195, 230, 269, 273, 308, 312, 355, 393, 472.
Constantinescu Tancred 7,
Coşereanu I. 66, 71, 73, 77, 112, 143, 148, 149, 156, 188, 189, 196, 229, 230, 240, 252, 266, 270, 271, 273, 305, 308, 312, 320, 355, 391, 392, 395, 398, 427, 432, 434, 439, 465, 466, 469, 472, 475, 477.
Costinescu D. 7.
Cotaru P. 66.
Cristea A. 60, 66, 464, 465.
Cristescu V. 57, 34, 54, 76, 114, 117, 119, 132, 152, 155, 191, 194, 211, 223, 224, 228, 240, 244, 249, 250, 259, 287, 288, 289, 290, 291, 300, 351, 369, 371, 372, 393, 408, 429, 437, 461.

Dan B. 73, 308.
Dan V. 66, 143, 230, 266, 270.
Davidescu M. 219, 349, 408.
Diaconescu N. 297.
Dimitriu M. 472.
Dinulescu N. 71, 73.
Dinulescu V. 308.
Dobrescu F. 143.
Dobrescu-Băbici I. 195, 230, 235, 270, 308, 312, 393, 395, 472.
Doncescu A. 392, 394, 434.
Dordea T. 23, 57, 59, 66, 98, 103, 156, 196, 212, 229, 230, 252, 266, 269, 307, 309, 312, 313, 391, 436, 458, 469, 472, 474, 476, 477, 480.
Drăgănescu E. 188, 191, 192, 314, 432.
Dragomir I. 143, 156, 188, 196, 198, 229, 230, 273, 308, 312, 318, 356, 379, 393, 434, 472, 474, 475.
Dumitrescu D. 7.
Dumitrescu G. 66, 136, 140, 199, 374, 380, 480.
Dumitrescu M. 143, 195, 229, 251, 266, 308, 313, 469, 474.
Dumitriu V. 393, 434.
Dvoirin L. 230, 235, 472.

Epure Şt. 195, 394, 436, 472.

Fajon M. 66, 143.
Fântânaru I. 143.
Fântâneanu I. 396, 472.
Felix C. 7.
Filipescu G. 7, 19, 21, 26, 32, 49, 168.
Finţescu A. 66, 68, 106, 426.
Florescu I. 52, 66, 71, 73, 114, 142, 183, 230, 262, 293, 305, 308, 310, 311, 329, 385, 406, 423, 426, 465, 469, 470.
Focşăneanu L. 39, 66, 156, 188, 195, 196, 232, 268, 271, 272, 308, 469, 475.
Focşeneanu M. 185, 188, 191, 195, 236, 272, 312, 315, 355, 393, 430, 475.
Fotiade I. 66.
Freyer B. 301.
Fundăţeanu I. 40, 149, 188, 200, 251, 276.

Gabrielescu R. 7.
Gâlcă T 7.
Gâtan M. 305, 308.
Georgescu C. C. 236.
Georgescu E. C. 54, 71, 117, 148, 156, 173, 188, 191, 195, 233, 235, 249, 266, 269, 271, 273, 308, 312, 335, 357, 386, 434, 451, 465, 469, 472.
Georgescu I. C. 35, 37, 38, 62, 66, 68, 69, 73, 80, 110, 114, 142, 143, 148, 149, 153, 156, 183, 188, 191, 192, 194, 226, 230, 232, 233, 234, 236, 259, 264, 265, 269, 272, 273, 274, 276, 278, 279, 286, 289, 299, 302, 303, 305, 307, 309, 311, 312, 316, 318, 320, 355, 381, 394, 397, 400, 423, 426, 427, 437, 440, 464, 465, 469, 470, 472, 473, 474, 475.
Georgescu Fl. 71, 118, 136, 143, 148, 156, 157, 194, 196, 197, 230, 234, 266,

267, 269, 271, 273, 274, 308, 312, 313, 342, 376, 385, 386, 411, 466, 469, 471, 474, 475.
Georgescu I. 66.
Georgescu M. 269, 270, 308, 394.
Georgescu N. 5, 7, 49, 96, 97, 206, 247.
Georgescu N. N. 7.
Georgescu-Gorjan Şt. 71, 230, 235, 293, 313, 386, 391, 393, 466, 469, 474, 475.
Georgescu-Roegen N. 26, 34, 57, 66, 67, 73, 75, 99, 100, 105, 106, 150, 151, 159, 169, 189, 209, 229, 230, 274, 280, 291, 292, 311, 322, 329, 330, 399, 409, 468, 470.
Gheorghiu C. 436.
Gheorghiu I. 7.
Gheorghiu M. 7.
Ghermănescu M. 5, 7, 33, 47, 53, 78, 110, 112, 120, 136, 140, 141, 173, 222, 224, 248, 264, 275, 277, 279, 285, 290, 360, 374, 375, 380, 381, 400, 450, 460.
Ghimuş D. 5, 7.
Ghiolu S. 136. 219, 380.
Ghiţescu D. 472.
Ghiţescu N. 392.
Ghiţescu V. 156, 188, 189, 196, 232, 234, 266, 273, 274, 308, 309, 312, 357, 391, 394, 435, 475, 478.
Giuşcă D. 66, 465.
Gogălniceanu M. 66, 196, 230, 270, 308, 313.
Goilav C. 66, 69, 73, 143, 156, 189, 195, 229, 230, 234, 235, 266, 269, 308, 313, 386, 391, 436, 466, 469, 472, 474.
Goldenberg I. 274.
Goldstein M. 472.
Gotcu M. 66.
Grabovski E. 380.
Grigorescu C. 7.
Grigorescu E. 34, 343.
Grigorescu V. 344, 380.
Grigoriu E. 141.
Grünbaum M. 34, 66, 68, 77, 79, 105, 150, 154, 156, 179, 185, 188, 189, 191, 200, 234, 256, 270, 272, 300, 313, 323, 342, 355, 420, 429, 460.
Grünberg B. 308.
Grünberg H. 274.
Gutzu A. 434.
Gutzu V. 7.

Hahn L. 42, 140, 349.
Haimovici S. 274.
Hamburger L. 350, 379, 418.
Hangan M. 42.
Herscovici E. 66, 475.
Hrisanide D. 309.
Hristescu A. 136, 379.
Huber I. 35, 37, 65, 71, 183, 188, 240.

Iliescu D. 391, 474.
Iliescu E. 59, 66, 143, 156 196, 207, 213, 229, 230, 263, 269, 308, 312, 394, 395, 469, 472.
Iliescu Gh. 5, 8, 321.
Iliescu I. 66, 71, 308, 393, 436, 475.
Ioachimescu A. 8, 155, 473.
Ioanovici A. 8.
Ionescu A. 245.
Ionescu T. C. 156.
Ionescu Carol 230, 266, 270, 312, 469, 473.
Ionescu Corneliu 71, 148, 156, 158, 188, 197, 229, 308, 309.
Ionescu G. 230.
Ionescu I. 5, 8, 13, 16, 19, 26, 27, 29, 39, 42, 49, 51, 57, 59, 66, 67, 79, 95, 97, 98, 100, 103, 105, 107, 110, 120, 125, 130, 131, 143, 148, 158, 168, 169, 170, 177, 178, 179, 186, 200, 207, 212, 232, 233, 240, 247, 256, 259, 279, 286, 295, 297, 320, 328, 345, 349, 350, 360, 363, 367, 369, 379, 388, 390, 391, 398, 406, 407, 414, 417, 430, 431, 447, 466, 468, 476, 479.
Ionescu Longin 195, 308, 313, 395, 435, 469, 472, 475.
Ionescu Marg. (D-na) 31.
Ionescu N. 436.
Ionescu T. 308.
Ionescu V. 280, 357, 360, 480.
Ionescu-Brezuica I. 195, 235, 270, 274, 309, 313, 435, 472.
Ioniţă I. 196, 234, 270, 308, 312.
Iordache I. 393.
Iordanian N. 274.
Iorgulescu C. 71, 73, 114.
Iosif I. 66.
Iosipescu N. 188, 230, 232, 235, 312.
Istrati C. 219.

Jijie A. 8.
Jujescu G. 22, 38, 66, 79, 105, 107, 120, 183, 254, 297, 308, 386.

Kanner A. 69, 114.
Katz P. 71, 188, 196, 232, 235, 259, 266, 270, 272, 273, 274, 308, 313, 315, 350, 355, 386, 393, 391, 469, 472, 474, 475.
Katz S. 230, 234, 237, 239, 266, 313, 391, 396, 436, 472, 474, 477.
Kaufmann N. 423.
Kaufmann S. 42, 140.
Kiriţescu I. 473.
Kricenofcher L. 61, 64, 65, 213, 424, 426, 466.

Lalescu Tr. 5, 8, 89, 96, 97, 102, 178, 212, 223, 293, 370, 371, 417, 429, 457.
Lăzărescu E. (D-ra) 112, 236, 307, 312, 391, 472.
Lăzărescu I. 309, 391, 475.
Lăzărescu J. 312, 313.
Lăzărescu Şt. 308, 312, 355, 392, 399, 475, 480.
Lăzărescu F. St. 392.
Lazarovici I. 230, 266, 312, 386, 393, 472.
Lefter D. 139.
Lemeş M. 66, 114.
Leon A. 300.
Lerner A. 248, 375.
Leviţchi B. 230.
Linteş I. 5, 8, 18, 128, 135, 142, 143, 156, 167, 171, 199, 256, 259, 319, 335,

342, 359, 367, 417, 421, 423, 440, 449.
Liteanu G. 5, 8, 38, 120, 185, 205, 206, 230, 232, 245, 247, 267, 313.
Luca L. 302.

Măcrineanu Şt. 275, 472, 474, 475.
Malcoci C. 8.
Manolescu E. 66, 71, 114, 465.
Manolescu M. 66.
Manoliu A. 140.
Marcus F. 230, 275, 312, 313, 317, 390, 391, 472, 474, 475.
Mareş T. 5, 8, 38, 39, 159, 311, 360, 421, 480.
Marin St. 394, 472, 474.
Martinian B. 230, 269, 312, 395, 435.
Măru D. 71, 112, 143, 151, 186, 188, 229, 230, 233, 266, 272, 308, 313, 319, 355, 386, 390, 393, 475,
Mateescu C. 5, 8, 45, 79. 120, 152, 160, 161, 213, 280, 400.
Mateescu G. 274, 276, 312, 394, 472, 475.
Meirovici I. 230.
Meirovici S. 312.
Mereuţă C. 230, 232, 312, 391.
Miclescu A. 73, 117, 119, 143, 156, 186, 195, 198, 229, 230, 234, 266, 270, 308, 312, 391, 394, 396, 466, 469, 472.
Mihăescu C. 273, 355, 392, 393, 394, 475, 477.
Mihăescu S. 66, 68, 74, 112, 200.
Mihăilescu C. 188, 312, 391.
Mihalopol C. 8.
Mineur A. 129, 162, 168, 169.
Mirea St. 8.
Mirescu P. 195, 275, 394.
Mitescu C. 42.
Mititelu C. 8.
Mititelu I. 8.
Mocanu A. 308, 469.
Moisil Gr. 255, 260, 322, 357, 385, 475, 479.
Moţoi I. 8.
Munteanu L. 234, 472.

Naneş G. 298.
Năsturaş D. 8.
Negretzu F. 66, 69, 114, 143. 148, 188, 230, 266, 269, 273, 292, 312, 322, 355, 388, 436, 448, 472.
Negretzu I. 8.
Neuberg J. 213, 243, 260, 300, 429, 458.
Nichifor G. 5, 8, 38, 40, 158, 304, 399, 457.
Nicolau A. 66, 69, 73, 141, 183, 308, 337, 381, 416, 419, 420.
Nicolau C. 48, 105, 222, 223, 224, 245, 259, 355, 460.
Nicolau I. 143, 270.
Nicolau M. 8, 143, 200.
Nicolescu G. 136, 379.
Nicolescu N. 9.
Nicolescu S. 66, 140.
Niculescu A. 62, 66, 68, 119, 148, 149, 189, 360, 378, 439.
Niculescu B. 66.
Niculescu C. 9.
Niculescu G. Lt. 67, 480.
Niculescu M. 66, 76, 103. 149, 152, 155, 157, 173, 187, 188, 191, 206, 255, 271, 358, 397, 451, 456,
Niculescu S. 194, 219, 235, 308, 380.

Onicescu O. 5, 9, 136, 177, 178.
Oprişanu E. 66, 149, 153, 156, 188, 189, 196, 230, 271, 274, 308, 309, 310, 395, 434, 436, 469, 475.
Orănescu O. 27, 239, 317, 320, 479.
Orăşanu C. 5, 9, 72, 181, 205, 206.
Orăşanu Gr. 9.

Pamula A. 66, 143, 196, 230, 270, 302, 312.
Panaitescu A. 195, 231, 269, 273, 274, 308, 312.
Panaitescu D. 181, 305, 466.
Panaitescu Sc. 9, 245, 247.
Pantazi A. 219.
Papafil E. 140.
Pârvulescu T. 308.
Păsărică I. 136, 345, 380.
Patriciu T. 9.
Perieţeanu D. 48.
Petreanu H. 392, 472, 475.
Petrovici I. 40, 66, 73, 114, 308, 426, 465.
Philipide M. 9.
Pinchis A. 233.
Pinchis M. 232, 235, 266, 270, 274, 312, 391, 472, 478.
Pintilescu V. 141.
Poledinu St. 391.
Popa T. 66, 143, 148, 149, 188, 196, 231, 269, 287, 308, 359, 391, 469, 472.
Popea O. 71, 143, 148, 196, 229, 232, 233, 266, 269, 270, 273, 276, 308, 313, 391, 394, 434, 472, 474, 475.
Popeanu A. 66, 149, 196, 271, 272, 273, 274, 308, 309, 318, 322, 355.
Popescu A. 42.
Popescu G. 9, 321.
Popescu D. G. 27, 32, 66, 105, 114, 120, 188, 191, 239, 272, 332, 381, 458.
Popescu I. 9.
Popescu-Văleni I. 156, 189, 266.
Popovici D. 143, 229.
Popovici I. 274, 312, 472.
Popoviciu T. 35, 37, 66, 68, 69, 71, 106, 112, 114, 149, 151, 153, 158, 184, 188, 189, 191, 194, 196, 231, 235, 236, 237, 259, 266, 269, 272, 273, 275, 276, 308, 310, 311, 312, 313, 315, 322, 355, 356, 386, 388, 390, 393, 395, 410, 434, 469, 470, 472, 475, 479.
Popp N. 42.
Potop A. 272.
Protopopescu Gr. 246, 247.

Rabinovici F. 275, 312, 390, 391, 472, 474, 475.
Radu M. 9.
Rădulescu M. 309.
Răşcanu A. 343.
Răuţ C. 310, 472.

Reinhorn M. 140, 219.
Revici T. 9.
Rizescu I. 35, 37, 66, 73, 118, 183, 229, 301, 308, 309, 411, 465, 469.
Roco M. 9.
Roeder C. 472.
Rosenberg G. 140, 219.
Rosenfeld L. 27, 274, 277, 302, 470.
Roşu Al. 256.
Roşu V. 9.
Rotaru C. 379.
Rothenberg M. 388, 391, 472, 474.
Rovinaru C. 308.
Russu E. 73, 195, 229, 269, 272, 308, 323, 393, 436, 438.

Sager I. 232, 313, 472.
Şain H. 66.
Saligny A. 9.
Saligny M. 9, 19, 49, 245, 247.
Samoilă D. 195, 196, 274.
Samovici I. 73.
Sane M. 274, 393, 436.
Săpunaru G. 9.
Sarian M. 19, 29, 141, 381, 439.
Săvescu M. 66, 73, 114, 308.
Săvescu N. 469.
Schileru D. 62, 66, 73, 186, 188, 191, 196, 197, 235, 236, 238, 274, 308, 310, 312, 313, 465, 466.
Schönfeld C. 71, 148, 156, 195, 229, 230, 266, 267, 308, 312, 393, 472.
Şcodrano A. 150, 153, 188, 195, 196, 230, 270, 272, 274, 308, 309, 313, 428, 435, 480.
Septilici R. 472.
Şerbănescu I. 72, 73, 114, 149, 156, 188, 189, 191, 196, 229, 235, 268, 273, 298, 308, 309, 350, 394. 428, 435, 454, 469, 475,
Şerbănescu M. 272.
Şerbănescu V. 10.
Sergescu P. 10, 39, 102, 157, 177, 198, 237, 239, 267, 277, 293, 305, 351, 458, 469.
Sfinţescu C. 10.
Silion I. 308.
Simionescu M. 195, 308.
Smântânescu A. 10.
Socianu E. 71.
Solacoglu S. 29, 142, 188, 195, 231, 233, 308, 312.
Solacolu C. 231.
Solacolu S. 143. 196, 231, 234, 266, 312, 391, 392, 472, 474, 475.
Solacolu T. 313.
Solomon A. 66, 73, 312.
Solomon D. 232, 391, 398, 432, 472, 474, 475.
Solomon N. 188, 231, 313, 391.
Solomon W. 62, 143, 148, 149, 188, 230, 266, 270, 272, 278, 308, 310, 311, 312, 315, 323, 355, 386, 434, 466, 470, 472, 475, 478.
Stan D. 10.
Stancu G. 66, 71, 143, 156, 186, 189, 231, 308.
Stănescu N. 71, 196, 308, 313.
Stavrat G. 475.
Stavrat M. 274, 395, 435, 436, 438.
Ştefănescu E. 66, 72, 73, 80, 103, 105, 143, 151, 156, 188, 196, 197, 199, 230, 266, 269, 273, 274, 304, 309, 312, 322, 360, 385, 388, 391, 393, 395, 400, 434, 439, 464, 465, 466, 472, 474, 475, 478.
Stoenescu A. 156, 189, 196, 235, 271, 290.
Stoenescu I. 71, 73, 118, 156, 189, 196, 197, 229, 231, 269, 308, 309, 312, 454.
Stoica A. 66.
Stroescu G. 391.
Sucaciu T. 66.
Suchar I. 42, 140.
Sufleţel A. 308.

Tailer N. 71, 77, 117, 118, 156, 191, 229, 231, 238, 266, 272, 308, 313, 391, 471, 474.
Tănăsescu T. 355.
Tauber A. 22, 27, 59, 63, 73, 79, 99, 148, 156, 196, 209, 229, 230, 234, 269, 273, 274, 302, 311, 312, 369, 386, 388, 391, 395, 470, 472, 474, 475.
Teodor I. 5, 10, 49, 96, 97, 206, 247.
Teodoreanu V. 10.
Teodorescu D. 434.
Teodorescu I. 73, 143, 156, 189, 229, 231, 269, 272, 312, 355, 382, 394, 428, 469.
Teodorescu S. I. 195, 236, 472.
Teodorescu N. 10.
Teodoriu L. 57, 345, 360, 379.
Teodoru R. 245.
Theodorescu Şt. 271.
Theodoru N. 66, 71, 143, 148. 308, 469.
Thierrin G. 10, 321.
Ţino O. 10, 480.
Ţiţeica G. 5, 10, 50, 97, 177, 323, 363, 410, 411, 412.
Toia C. 266.
Tuhai N. 79, 270.

Ulescu A. 10.

Vardala I. 10.
Vasilache S. 143, 156, 229, 231, 270, 312.
Vasilescu D. 73, 195, 472.
Vasilescu F. 345, 418, 458.
Vasilescu Gr. 395.
Vasilescu I. 10, 245.
Vasilescu M. 274, 308, 313.
Vasilescu V. 156, 269, 274, 312, 388, 428, 474.
Vasiliu A. 195.
Vasiliu M. 62, 142, 151, 189, 195, 231, 235, 248, 309, 313, 368, 369.
Velescu I. 219,
Vişoianu C. 345.
Vişoianu I. 219.
Vlad O. 391, 472.
Vorónca S. 42, 106, 345.

Weber D. 393, 394.
Weinstein J. 312.
Weiss L. 188, 231, 233, 234, 235, 266, 312, 391, 393, 435, 472, 475, 478.
Weiss S. 231, 313, 472.
Witzman-Vania M. 273.

Zaharia E. 390, 475.

Zamfirescu Gr. 229, 345.
Zapan Gh. 5, 10, 30, 32, 40, 61, 63, 79, 239, 262, 263, 306, 307, 327, 379, 417, 418, 439.
Zapan Gr. 5, 10, 79, 107, 297, 307, 309, 359, 400, 457.
Zuckerman B. 472.

J. UVRAGE CITATE.

Pag.

Gazeta Matematică 11, 12, 21, 22, 37, 46, 50, 83, 89, 128, 129, 130, 131, 140, 152, 161, 167, 168, 174, 176, 205, 206, 211, 213, 214, 223, 236, 241, 245, 248, 249, 253. 281, 286, 287, 288, 289, 308, 326, 327, 328, 329, 330, 363, 368, 369, 371, 372, 374, 375, 376, 406, 407, 408, 410, 411, 412, 420, 429, 464, 468, 469

Revista Matematică din Timişoara 23, 142, 155, 209, 210, 291, 335, 423

Culegere de probleme — Trigonometria 28, 235, 236, 376

Rouché et de Combe-rousse Géométrie plane 34, 36, 190, 191, 223, 241, 250, 287, 310, 314, 315, 371

F. G. — M. Exercices de Géométrie 37, 115, 117, 221, 256, 259, 289, 314, 351, 371

Natura 93, 168

L'Enseignement mathématique 94, 95, 121

Mathesis 115, 131, 168, 228, 241, 243, 250, 300, 372, 429

Mathematische Zeitschrift 162

I. Fitz-Patrick Exercices d'Arithmétique 169

Mathematische Annalen 205

E. Catalan Théorèmes et Problèmes de Géométrie . . 211

Journal de Vuibert 228

J. Neuberg Sur les projections et contre projections d'un triangle fixe 228, 429

Culegere de Probleme — Aritmetica 231, 329, 390, 471, 476

Culegere de Probleme — Algebra 289, 291, 459

Culegere de Probleme — Geometria 331

Laurent Traité d'Analyse 374

Goursat Cours d'Analyse 374

Maupin Questions d'Algèbre 374

Memorialul Geniului 245

Aeronautica Română 245

Revista Artileriei 245, 246

Salmon Géométrie analythique à troix dimensions . . . 450

Dr. Lubarthe Dictionnaire populaire de médicine usuelle . . 477

Afară de uvrajele de mai sus, sunt citate:

30 Mecanici diverse . . . . . 19, 207, 407.
20 Algebre diverse . . . . . 49, 285.
10 Geometrii diverse . . . . . 98.
20 Trigonometrii diverse . . . . . 130, 328.
40 Aritmetici diverse . . . . . 167, 247, 367, 447.

Dela apariţia ultimului număr s'au primit spre publicare: articole (A), note (N), cereri (C), exerciţii (E), probleme propuse (P), recreaţiuni (R) şi probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela D-nii:

Ablov (2991); *Adam M.* (2298, 340, 766, 856, 978, 3022, 52, 63, 76, 79); *Antoniu I.* (2864, 3068); *Arcadian N.* (2340, 887, 3058, 59, 61, 62, 72, 76, 79, E. P.); *Ballan E.* (2887); *Barbălatt M. B.* (2796, 3003, 47, 50, 65, 76, 79, E. N. R.); *Bărbulescu C.* (2991); *Bocancea I. K.* (2991); *Bonea I.* (3063, 68); *Brătescu M.* (3059, 65); *Buşilă A.* (2835, 3064, 74, E.); *Cantacuzino I.* (2991); *Ciorănescu N.* (2864); *Constantinescu I.* (2991); *Coşereanu I.* (2613, 3058, 59, 62, 64, 65, 68, 76, 79, E.); *Dimitriu V.* (3039, 47, 58, 64, 65, 68); *Dobrescu Băbici I.* (3039, 43, 47, 48, 57, 58, 59); *Dragomir I.* (2978); *Dumitrescu G. M.* (3068, 79); *Epure Şt.* (2991, 3017, 73, 74); *Focşeneanu M.* (2985, 3043, 46, 50, 59, 64, 65, 74, N.); *Georgescu I. C.* (2827, 51, 65, 68, A. P.); *Georgescu Fl.* (3079); *Ghiţescu Virgil* (3044, 64, 67, 74, E.); *Goilav Cr.* (2856, 918); *Iliescu Dima* (2766, 838, 991, 3062, 63, E.); *Iliescu E.* (2991); *Iliescu I.* (3039); *Ionescu-Brezuica I.* (3057, 59, 63, E.); *Katz S.* (3072, E.); *Lăzărescu Elena* (3034); *Lăzărescu I.* (3017, 31, 57, 76, E.); *Lăzărescu St.* (2946, 3017, 61, 62, 68, 74, 76, E.); *Marcus Fr.* (2683, 3031, 59, 79); *Mateescu G.* (3044, 47, 74, 79); *Mihăiescu D. C.* (2991, 3047, 59, E.); *Mitescu D.* (E.); *Niculescu Al.* (3065, 68); *Niculescu S.* (3059, 68); *Oprea I. Radu* (3058); *Panaitescu Al.* (3058, 59); *Popeea O.* (2891, 3043, 57, 59, 64, 65, 68, 74); *Popescu D. G.* (2538, 605, 3034, C. R.); *Popovici Dan* (3079); *Popoviciu Tiberiu* (2693, 991, 3047, A. N.); *Rabinovici F.* (2991); *Rigani Cr.* (2887); *Rothenberg M.* (2991); *Samoilă D.* (3079, E); *Sane M.* (3039, 58, 59); *Schlifca E.* (3062); *Solacolu S.* (2991); *Solomon D.* (2340, 683, 856, E.); *Solomon W.* (2991, 3046, 58, 59, 63, 66); *Ştefănescu E.* (2766, 838, 3024, 43, 62, 63, 67, E. P.); *Stroescu G.* (2991); *Ţanţăreanu P.* (3059); *Tauber Al.* (3052, 58, 59, 64, 67, 74, 76, 79); *Teodorescu D.* (3039, 47, 65); *Weiss L.* (2887, 3021, 48, 62, 67, 72, 76, E.); *Weiss S.* (3063, E.).

Problemele de geometrie rezolvate cât şi cele de propus a căror soluţie nu va fi însoţită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în consideraţiune.

La redacţia revistei **„Gazeta Matematică“** *se primesc abonamente pentru* **„Revista de matematicas y fisicas elementales“** *din Buenos-Aires, Anul V (Mai 1923 — Aprilie 1924). Costul unui abonament anual este de 70 lei.*

Soluţiunile primite în ultimul timp la problemele: 2035, 63, 295, 98, 440, 97, 512, 24, 635, 51, 69, 82, 795, 835, 38, 61, 72, 79, 87, 95, 902, 10, 18, 29, 32, 55, 72, 78, 83, 91, 93, 3013, 14, 36, 38, 51, 52, 53, 56, 70, 71, şi 80 nu au fost încă examinate de redactorii cărora le-au fost repartizate.

Colecțiunea „GAZETEI MATEMATICE“

27 VOLUME

Colecțiunea întreagă . . . . . Lei 1000,—

Se vând și volume izolate, cu prețul de 50 lei, afară de volumele: I, X, XV, XIX, XX și XXI care se vând numai cu colecțiunea întreagă.

Biblioteca „GAZETEI MATEMATICE“

1. **I. Ionescu, G. Țițeica, A. G. Ioachimescu și V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Aritmetică, Geometrie, Algebră și Trigonometrie. (520 pag. cu 3381 probleme).* (Epuizată).

2. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de probleme de algebră* (teoria ecuațiilor), (82 pag. cu 462 probleme). (Epuizată).

3. **N. Abramescu,** *Curs de algebră superioară* pentru cl. VIII reală, *Ediția IIa revăzută și adăogită,* 1921. (Epuizată).

4. **A. G. Ioachimescu și G. Țițeica,** *Culegere de probleme de mecanică și geometrie analitică* (222 pag. cu 825 probleme și o planșă) (Epuizată).

5. **Tr. Lalescu și Șt. N. Mirea,** *Culegere de probleme de geometrie descriptivă și cosmografie* . . . . . Lei 15,—

6. **Tr. Lalescu,** Tratat de Geometrie analitică,
Fascicola I (Epuizată).
Idem, Fascicola II Conice . . . . . Lei 20,—
Idem, Fascicola III Cuadrice . . . . . Lei 20,—

7. **Gh. Lazăr,** *Trigonometria dreptă liniară* (după cursul predat de Gh. Lazăr la colegiul Sf. Sava) . . . . . Lei 5,—

8. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de probleme de Algebră,* ediția II-a revăzută și adăogită, 400 pagini cuprinzând 1765 probleme . . . . . Lei 60,—

La aceste prețuri se vor adăoga taxele poștale pentru expediție.

Biblioteca Technică a „GAZETEI MATEMATICE“
(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

I. Ionescu, *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcțiune și a principiilor de calcul.* Volum legat, cuprinzând 128 de pagini și 15 tabele numerice practice, pentru proiectarea construcțiunilor de beton armat. Lei 12,—

Gazeta Matematică apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 50 lei anual, se plătește înainte și începe la 15 Septemvrie, ori când s'ar face achitarea lui în cursul anului și nu se face pe termene mai scurte de un an. Abonamentele, schimbările de adrese, reclamațiunile și cererile pentru cărți din biblioteca «Gazetei Matematice», se vor trimete D-lui: **I. D. Teodor,** Inginer Inspector General, Directorul General al Regiei Monopolurilor Statului (adresa: Fabrica de Chibrituri, București).

Schimburile de reviste, uvrage pentru recenzii și orice alte cereri, afară de cele privitoare la cassierie și expediție, se vor trimite D-lui Inginer Inspector General I. IONESCU, Str. Căluşei 23, Bucureşti.